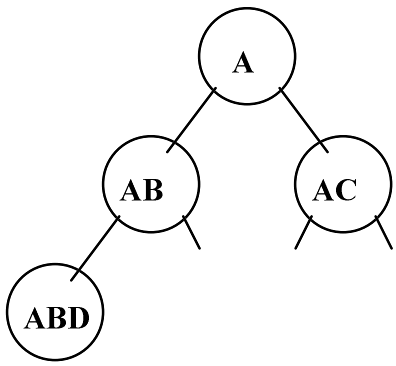
GRUNDRISS DER PYRAMIDALEN LOGIK

mit einer logischen Kritik der mathematischen Logik und Bibliographie der Logik

Lehrmaterialien aus dem
Philosophischen Institut der HHU
Düsseldorf
Forschungsabteilung für Wissenschaftstheorie

Prof. Dr. L. Geldsetzer



INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung

Zum Konzept der pyramidalen Logik

Das hier vorgelegte Konzept der Logik unterscheidet sich von den bisher entwickelten Logiktypen in mehrfacher Hinsicht.

1. Intensionale und extensionale Aspekte der logischen Verhältnisse werden rückintegriert in eine intensional-extensionle Logikkonzeption, die Defizite und Fehler der einseitig "intensionalen Logiken" und der "extensionalen Logiken" aufdeckt und vermeidet.

2. Es wird eine neue "pyramidale" Notation für die logischen Elemente der Intensionen und Extensionen der Begriffe, der Begriffe selbst, der Junktoren, der Urteilsformen und der Schlußformen eingeführt. Diese Notation stellt eine Weiterentwicklung der traditionellen "porphyrianischen Bäume" bzw. der (dazu inversen) Begriffspyramiden dar. Die Notation besteht aus einem graphischen Pyramidenschema für die Darstellung von Begriffsextensionen sowie Buchstaben für die Darstellung der Begriffsintensionen. Die Beziehungen zwischen den Begriffspositionen in den Pyramiden werden je nach ihrer Richtung als Junktoren gelesen. Zusammen mit den verknüpften Begriffen ergeben sie Ausdrücke und Urteile bzw. Schlüsse.

3. Die pyramidale Notation legt die Vernetzung von Intensionen (Merkmalen) und Extensionen (Umfänge) von Begriffen, Urteilen und Schlüssen offen. Begriffe werden durch den Formalismus der Notation zugleich definiert.

4. Die pyramidale Notation bzw. der logische Formalismus löst eine alte Forderung der Logiktheorie ein: Wahrheit, Falschheit und Unentscheidbarkeit von Urteilen und Schlüssen werden unmittelbar im Formalismus sichtbar und ablesbar.

5. Grundelemente der pyramidalen Logik sind Intensionen und Extensionen der Begriffe sowie die Junktoren als Verknüpfungen zwischen Begriffen. Sie werden durch die Grundzeichen und die Lageverhältnisse im pyramidalen Formalismus dargestellt.

6. Urteile (Aussagen) und Schlüsse werden davon abgeleitet und somit in ihrer logischen Funktion als formale Gestalten von Wahrheit, Falschheit und Unentscheidbarkeit erklärt. Begriffe und aus Begriffen jungierte Ausdrücke sind nicht wahrheitswertfähig .

7. Als Testfälle für die Leistungsfähigkeit des pyramidalen Logikkonzeptes werden der Behandlung der sog. logischen Axiome, der Begriffsdefinition, der sog. Dialektik (des Widerspruchs), der Wahrscheinlichkeit, der Implikation und der Induktion besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

8. Die pyramidale Explikation der Junktorentheorie, der Zahlentheorie und der hegelschen Theorie des Geistes demonstrieren die Leistungsfähigkeit der pyramidalen Notation für Theoriedarstellungen "auf einem Blatt".

I. Einführung

Die Logik dürfte wohl zu den schwierigsten und am wenigsten über sich selbst aufgeklärten Wissenschaftsdisziplinen gehören. Und zwar deswegen, weil sie eine Voraussetzung für alle anderen Wissenschaften bildet. Es ist schwer einzusehen, wie die Logik als Voraussetzung aller Wissenschaften selber durch wissenschaftliche Mittel, die sich ihrer immer schon bedienen müssen, auf ihre eigenen Voraussetzungen hin geprüft, durchschaut und geklärt werden könnte. Diese Eigentümlichkeit verleiht ihr im Konzert der Wissenschaften und im Zusammenhang der philosophischen Begründungsdiziplinen eine einzigartige Autonomie.

Wo diese Autonomie anerkannt und alle anderen wissenschaftlichen Gesetzlichkeiten auf ihre Kompetenz zur Gesetzgebung zurückgeführt wurden - und das war die längste Zeit ihrer Geschichte der Fall - da wurde die Logik wie eine Offenbarungslehre gepflegt, ihre Prinzipien und "Gesetze" als Dogmen geglaubt und ihre Begründer als "Orakel" verehrt. Man sollte nicht davon ausgehen, daß das heute ganz und gar vorbei sei.

Im Gegenteil. Die Logik hat wie alle Wissenschaften am neuzeitlichen Modernisierungsschub teilgenommen und sich durch mancherlei neue Themenstellungen bereichert, aber dadurch ihre Autonomie weder eingebüßt noch auch nur geschwächt. Es ist jetzt üblich, ihre vormoderne Geschichte und deren dogmatischen Gehalt als "klassische Logik" von ihren neueren Entwicklungen abzugrenzen. Dabei heißt "klassisch" nach modernem Begriff zugleich grundlegend für Späteres und daher aller Ehren wert, aber doch im ganzen überholt und durch das Neuere ersetzt. Das Neue aber ist dabei die Verschmelzung der klassischen Logik mit der Mathematik zu dem, was man seither "mathematische Logik" nennt.

Die Ehe, die die klassische Logik mit der Mathematik eingegangen ist, ist weder problemlos noch dürfte absehbar sein, ob die daraus entsprungenen Abkömmlinge an logischen Spezialdisziplinen fruchtbar sind oder eher die Natur von Maultieren aufweisen. Auf jeden Fall hat das Bündnis den Autonomiecharakter und die Orakelhaftigkeit der neueren Logik eher verstärkt. Da die Mitgift der Mathematik als eines Voll- und Spezialstudiums selber so voraussetzungs- und mühevoll ist, hat dies dahin geführt, daß die ehemalige gelehrte Kundschaft der klassischen Logik es längst aufgegeben hat, sich überhaupt noch mit dieser mathematischen Logik zu befassen.

Naturgemäß besteht gleichwohl Bedarf, die Gehalte der Logik (inklusive des Mathematischen an ihr) wenigstens plausibel und für Anwendungen in wissenschaftlichen Verfahren handhabbar zu machen. Und das geschah und geschieht in immer neuen Schüben von Reduktionsversuchen, in denen die Logik von anderen Wissenschaften eine gewisse Beleuchtung erfahren oder gar auf diese begründet werden sollen.

Der neueste und anhaltende Versuch dazu ist das, was man den linguistizistischen Reduktionismus nennen könnte. Hier wird die Logik ebenso wie die Mathematik, und also auch die mathematische Logik als *Idealsprache* (G. Frege, B. Russell, L. Wittgenstein, R. Carnap u. a.) behandelt. Das ist umso erstaunlicher, als die Propagatoren dieser Auffassung sich mit Entschiedenheit dagegen wendeten, daß die Logik vordem von vielen Logikern als normative Disziplin des "gesunden bzw. normalen Denkens" in entsprechender Reduktion auf die Psychologie - man könnte sagen: als *Idealpsychologie* des gesunden Menschenverstandes - behandelt worden ist. Der logische Antipsychologismus der Wende vom 19. zum 20 Jahrhundert hat diesen Reduktionsversuch zwar entschieden diskriminiert aber nicht beseitigt. Auch entschiedene Antipsychologisten reden weiter von "Gedanken an sich" (wobei solche Gedanken nicht gedacht zu werden brauchen!). Erst recht blüht noch immer die französisch-niederländische mathematische Logikerschule der Intuitionisten von Poincaré, Brouwer und Heyting, die alles wesentlich Logische und Mathematische auf psychische Anschauungs- und Denkleistungen zurückführt. Sie hat weit über den eigenen Anhängerkreis hinaus die Rede von "Intuitionen" in der Logik populär gemacht. Aber die Intuitionen sind offensichtlich noch immer das, was auch schon Platon in dialektisch-metaphorischer Redeweise eine "geistige Anschauung" (der Ideen) genannt hat, nämlich eine "übersinnliche unanschauliche Anschauung" mittels eines weiter nicht zu explizierenden geistigen Organs (des "inneren Auges"). Tatsächlich sind dann die "Intuitionen" nur in Bildern, Metaphern, Beispielen, Analogien, "Modellen" zu explizieren, die genau das nicht sind, wofür sie stehen sollen.

Offensichtlich geht es auch in der Logik (wie in allen Wissenschaften) nicht ohne Denken, Wahrnehmen, Beobachten, Erinnern, Hinweisen, Aufschreiben und Zeichnen ab, welches sämtlich psychische und somatische Akte sind. Wir werden sie daher auch im folgenden zu berücksichtigen und zur Erklärung des Logischen heranzuziehen haben. Insbesondere werden wir dabei die Rolle der unmittelbaren sinnlichen Anschauung und der Erinnerung an solche Anschauungen hervorheben, wobei wir von bisher allzu sehr vernachlässigten Einsichten des George Berkeley fruchtbaren Gebrauch machen. Wir hoffen dabei allerdings, dadurch nicht gleich in den Geruch einer "psychologistischen Logikbegründung" zu geraten. Und dies ebenso wenig, wie wir wegen der Berücksichtigung sprachlicher Ingredienzien der Logik gleich den logischen Linguistizisten zugerechnet werden wollen.

Dem neueren logischen Linguistizismus, der die Teildisziplinen der Logik als Annexe der Sprachwissenschaft vorführt ("Idealsprache" mit logischer Syntax, logischer Semantik und logischer Pragmatik) und viele logische Begriffe als Spezifikationen sprachwissenschaftlicher Begriffsbildung verstehen will (propositionaler Gehalt, performativer Gehalt), wäre also zumindest mit gleicher Vorsicht wie dem Psychologismus in der Logik zu begegnen. Grammatische Elemente, Wörter, Sätze, Argumentationen, Behauptungen, Lügen, mithin sprachliche Elemente kommen auch in der Logik reichlich vor und sind unentbehrlich. Aber das kann nicht rechtfertigen, die Logik gleichsam zu einem Annex der Sprachwissenschaft zu machen. Von psychischen Gegebenheiten kann und muß in der Logik ebenso die Rede sein wie von sprachlichen Fakten, will man überhaupt verstehen, um was es dabei geht.

Und man muß dazu keineswegs den jetzigen Stand oder gar künftige Forschungsergebnisse der Psychologie und Sprachwissenschaft heranziehen oder abwarten, ehe man Logik betreiben kann. Es genügt, wenn man mit solchen "operativen" Begriffen deutlich machen kann, was in der Logik damit gemeint ist.

Indem wir also auch in der Logik dazu auffordern, zu sehen, zu lesen, zu verstehen, sich zu erinnern, zu denken, zu schreiben und zu zeichnen (also psychische und körperliche Akte zu vollziehen, ohne gleich zum Psychologen zu werden), wollen wir vor allem in didaktischer Hinsicht einige Bemerkungen über sprachliche Tatsachen anfügen, die auch der Logik zugrunde liegen, und die man kennen sollte, ohne gleich zum Sprachwissenschaftler zu werden.

Es läßt sich weder historisch noch systematisch verkennen, daß die Logik ihr Bauzeug in einer Auslese aus sprachlichen (lautsprachlichen und schriftsprachlichen) Elementen gewonnen hat. Geben wir davon eine Liste, in der wir grammatisches Ausgangsmaterial und ihre Stilisierungen zu logischen Elementen einander gegenüberstellen.

Grammatische Elemente	*Logische Elemente*
1. Laute und Buchstaben	Buchstaben in lautlicher Lesung
2. Wortsinn, "Vorgestelltes"	Intension, Merkmal von Begriffen
3. Gemeintes, Gegenstand	Extension, Umfang, Begriffsbereich
4. Substantive und Adjektive	Begriffe als Subjekte und Prädikate
5. Eigennamen	Individuenkonstanten, Kennzeichnungen
6. Artikel und Verknüpfungspartikel	Junktoren
ist, sind	Kopula (ist, sind)
nicht (Verneinung)	Negation
es gibt	Existenzoperator
und	Konjunktion bzw. Adjunktion
oder	ausschließende (Alternative) und nichtaus-schließende Disjunktion
wenn ... dann	Implikation, Inklusion, Korrelation
Zählwörter: ein, einige, alle, kein	Quantoren: ein, einige, alle, kein (nicht ein)
das heißt, bzw., resp., nur dann wenn	Äquivalenz (mathematische Gleichheit)
7. Behauptungssätze	wahre, falsche und unentscheidbare Urteile
8. Nichtbehauptende Sätze (insbes. Sätze im Konjunktiv)	Hypothetische und Modalurteile i. e. S. Wahrscheinlichkeitsurteile,
9. Satzgefüge, Perioden	Schlüsse
10. Argumentationsgesamt, Rede	Theorie, Beweis

Es wird nicht bestritten werden können, daß sich die abendländische Logik seit ihrer ersten relativ umfassenden Ausgestaltung durch Aristoteles sehr eng an gewissen grammatischen Formen und Gestalten der griechischen (und allgemeiner: der indogermanischen) Sprache und ihrer alphabetischen Lautschrift orientiert hat und seither dabei geblieben ist. Insbesondere ist zu betonen, daß dabei der sprachliche Sinn der Junktoren (in der mathematischen Logik meist "logische Konstanten" oder auch "Funktoren" genannt) vollständig in die Logik übernommen worden ist. Selbst wenn diese heute gewöhnlich durch eigene Symbole formal dargestellt werden, so sind diese Junktoren-Symbole nichts anderes als eine kurzschriftliche Notation des identischen Wortsinnes der entsprechenden sprachlichen Verbindungswörter. Sie verknüpfen mittels sprachlicher Wörter deren Bedeutungen ebenso, wie sie in der Logik die Bedeutungen der formalen Elemente verknüpfen, und sie werden auch als solche "gelesen" und verstanden.

Wenn das so ist, muß schon die aristotelische Bestimmung der Junktoren als "Synkategoremata" (lat.: connotationes, eigentlich: "mitbestimmende Partikel", die nur durch die Verbindung mit anderen Wörtern bzw. Begriffen eine Bedeutung erhielten, für sich genommen aber "sinnlos" blieben) als folgenreicher Irrtum bezeichnet werden. Die stoische Logik, die ja in engster Verknüpfung mit der Grammatik entwickelt wurde, hat versucht, diesen (sprachlich-logischen) Sinn der Junktoren genauer zu bestimmen und zu definieren, und dies Unternehmen ist in der modernen Aussagenlogik durch Post und Wittgen stein (in den sog. Wahrheitswerttabellen) weitergeführt worden. Dazu wird später einiges kritisch zu sagen sein. An dieser Stelle sei nur so viel vorausgenommen, daß der ursprüngliche und auch jetzt noch logisch relevante Sinn der Junktoren in der Verknüpfung von Wörtern bzw. Begriffen zu Ausdrücken und nur einiger Junktoren darüber hinaus auch zu Urteilen besteht. Diese Funktion der (meisten) Junktoren, nichtwahrheitsfähige, aber sinnvolle Ausdrücke bzw. komplexe Begriffsverbindungen herzustellen, ist in der Logik bisher zu wenig beachtet worden. Sie wird im folgenden näher dargestellt werden.

Auch ein Blick auf einen anderen Sprachtyp dürfte für das Verständnis der Logik noch immer hilfreich und lehrreich sein, wenngleich die abendländische Logik nichts daraus gelernt und übernommen hat, vielmehr recht mühsam zu analogen Einsichten gelangt ist. Wir meinen die chinesische piktographische Zeichenschrift. Die chinesischen Schriftzeichen notieren nicht den Laut von Wörtern und Begriffen, sondern direkt ihren Sinn bzw. ihre Bedeutung, und zwar durch stilisierte und meistens auch jetzt noch leicht verständliche Bilder. Daß dabei einige sinnhafte Zeichen zugleich auch die Lautung mit andeuten und die Schriftzeichen heute auch von Chinesen meistens nur noch gemäss ihren Lautungen gelernt werden, ändert nichts am System der "ikonischen" Zeichenbildung.

Das piktographische System besteht darin, aus einfachen Bildzeichen, sog. Radikalen, die meistens zugleich auch selbständige Wörter darstellen, durch Kombinationen von Zweier-, Dreier- usw. bis (höchstens) Sechsergruppen alle chinesischen Wörter darzustellen. Das System geht vermutlich auf die Kombinationsgestalten des Yi Jing (Buch der Wandlungen) zurück, in welchem aus der Kombination von nur zwei Grundelementen ("Yao" genannt, als deren ontologische Entsprechungen "Yin" und "Yang" gelten) solche Zweier-, Dreier- und Sechsergruppen (letztere sind in den berühmten Hexagrammen, Ba Gua, vorgeprägt) gebildet werden. Dabei können auch die niederrangigen Kombinationen als eigenständige Elemente mit eigener Bedeutung in den höherrangigen sinntragend fungieren. Das System bringt es mit sich, daß bei jedem chinesischen Wort in der Schrift (nicht aber in der Aussprache) sichtbar wird, welche Merkmale zu seinem Sinnbestand beitragen (vgl. darüber L. Geldsetzer und Han-ding Hong, Grundlagen der chinesischen Philosophie, Kap. 4, 2: Die Logik des Yi Jing, Stuttgart 1998, S. 177 - 203.

Wir geben ein Beispiel, indem wir aus den überaus zahlreichen Schriftzeichen, die aus der Kombination des Radikals für "Baum" (mu) mit anderen Radikalen und Kombinationen gebildet wurden, einige auswählen und diese zugleich in einer pyramidalen Darstellung anordnen.

Wie man leicht bemerkt, ist diese Schrift darauf abgestellt, sich beim Schreiben und Lesen von Wörtern und Begriffen jederzeit darüber klar zu werden, welche anderen Wort- und Begriffsbedeutungen als Merkmale in das jeweils thematische Wort eingegangen sind. Es ist genau das, was durch logische Definitionen erreicht werden soll. Ein zu definierender Begriff wird meistens (nach aristotelischem Vorschlag) dadurch "erklärt", daß man seine generischen und spezifischen Merkmale, die zugleich eigenständige Bedeutungen anderer Begriffe sind, angibt.

Eine solche Schreibweise für Begriffe in der Logik kann somit die Definitionen ersetzen. Dies machen wir uns bei unserer pyramidalen Notation zunutze, indem wir bei jedem thematischen Begriff die Intensionen bzw. Merkmale durch große lateinische Buchstaben bezeichnen und in die extensionale Position der Pyramide eintragen Dadurch wird an jeweils gleichen Buchstaben sichtbar, welche Merkmalsanteile von einer höheren Gattung herstammen, und welche ihm darüber hinaus spezifisch zukommen. Insbesondere wird dadurch sichtbar gemacht, was an Begriffen und ihren Unterbegriffen identischer Merkmalsbestand ist. Und dies erklärt zugleich, was in der Logik überhaupt Identität bedeuten kann.

Es sei damit betont, daß die großen lateinischen Buchstaben in unserer Notation nicht ganze Begriffe (wie seit Aristoteles üblich) bezeichnen, sondern ausschließlich Merkmale von Begriffen, was also der Rolle der chinesischen Radikalschriftzeichen in komplexen Schriftzeichen entspricht. Damit verschwindet auch das traditionelle logische Problem (der "quinque voces"), nach der begrifflichen Natur "spezifischer Differenzen" oder des "Proprium" zu fahnden. Diese können als Komponenten von Begriffen nicht selber vollständige Begriffe sein, sondern bleiben in und an Begriffen bloße Merkmale bzw. Intensionen. Und da diese neben den Extensionen Aufbaulemente der Begriffe sind, sollte eine Logik, die vom Elementaren und Grundsätzlichen ausgeht und alles weiter zu Behandelnde darauf aufbaut, auch in der Lage sein, sie formal darzustellen. Gelingt dies, so ist das meiste, was dann noch in der Logik zu leisten ist, der Nachweis, wie sich die "radikalen" Merkmalsbedeutungen auch in den Begriffen, Urteilen, Schlüssen und Theoremen identisch durchhalten und zum Sinngehalt auch der komplexesten logischen Gebilde beitragen.

Dies führt uns zu einigen Bemerkungen über die *Rolle des Formalen und des Formalismus* in der Logik, über die gerade durch die linguistizistischen Logiker, wie uns scheint, falsche und schädliche Meinungen in der Logik verbreitet worden sind. Die übliche Meinung darüber ist, der logische Formalismus bilde insgesamt eine ideale Sprache, oft auch "Metasprache" genannt, gegenüber der normalen Sprache. Er sei exakt und allgemein, während die Normalsprache vage und konkret sei. Insbesondere ließen sich durch logische Formalisierung sprachlicher Texte und Reden ein evtl. vager und undeutlicher Sinn verdeutlichen oder gar sprachlicher Unsinn in Sinn verwandeln.

Das ist weit überzogen und irreführend. Um mit einer Sprache richtig umzugehen, braucht man in erster Linie Pflege eines großen und differenzierten Wortschatzes und grammatische Kenntnisse. Und dafür gibt es kein besseres Mittel als klassischen Latein- und Griechischunterricht für die paradigmatische Durchschaubarkeit auch moderner westlicher Sprachen. Nicht nur grammatisches Kombinationsvermögen wird hierdurch geschult, sondern die Kenntnis der griechischen und lateinischen "Etymema" in der (älteren) Wissenschaftsterminologie läßt oft verstehen oder wenigstens ahnen, was mit den Termini gemeint sein soll. Über Sinn und Unsinn entscheidet dabei nicht die Logik, sondern die Hermeneutik, und die Probe für Sinnhaftigkeit ist die Übersetzbarkeit in eine verständliche sprachliche Form. *Es wird aber nichts aus Sprache in Logik "übersetzt", noch spricht oder schreibt irgend jemand "Logik", sondern er argumentiert allenfalls und bestenfalls "logisch" in gepflegter Bildungssprache.*

Daher ist nun besonders irreführend die in der neueren Logik üblich gewordene Parallelisierung der Darstellung der logischen Unterdisziplinen mit der neueren Einteilung der sprachwissenschaftlichen Disziplinen, die sich eben der Meinung verdankt, Logik bzw. ihr Formalismus sei auch eine Art Sprache. Es gehört dabei zu den Merkwürdigkeiten der neueren Logikgeschichte, daß es fast durchweg Mathematiker und mathematische Logiker und im weiteren Sinne Naturwissenschaftler gewesen sind, die diese Übertragung propagiert haben. Merkwürdig deshalb, weil sie ihrer Profession und fakultätsmäßiger Arbeitsteilung gemäß am allerwenigsten mit den Sprachstudien zu tun haben. Rudolf Carnap, der mit seinen Büchern "Logische Syntax der Sprache" von 1934 und "Introduction to Semantics. Studies in Semantics I, Cambridge, Mass. 1942 und "Formalization of Logic. Studies in Semantics II", Cambrige, Mass. 1943, 2. Aufl. 1947 (zusammen mit dem vorgenannten) wohl am meisten dazu beigetragen hat, hatte bekanntlich ein Faible für die künstliche Sprache "Esperanto", in der er sich auch gerne mit seinen Besuchern unterhielt. Offensichtlich schwebte ihm vor, die von ihm konzipierte logische Wissenschaftssprache sei die zum Esperanto passende Stenographie. Und lange vor ihm hatte der italienische Mathematiker Giuseppe Peano sich schon eines von ihm selbst gemachten Lateins ohne Flexionen bedient.

Wer sich wissenschaftlich mit einer Sprache befaßt, der hat es mit ihrer *Semantik, Syntax und Pragmatik* zu tun, in denen alle älteren disziplinären Aspekte des Sprachstudiums wie Lexikographie, Etymologie, Onomasiologie, Phonologie (oder Phonetik), Grammatik, Stilistik, Phraseologie u. a. zusammengefaßt worden sind. Sie erforschen jeweils einen besonderen Aspekt an der jeweiligen Sprache, die insgesamt doch immer als lebendiger Organismus im Sinne W. v. Humboldts oder als ganzheitlicher Strukturzusammenhang im Sinne des heute dominierenden Strukturalismus aufgefaßt wird.

Die *Semantik* thematisiert den Bezug sprachlicher Laut- und Schriftzeichen auf die außersprachliche Wirklichkeit. Man nennt das deren "Referenz". Was hier als außersprachliche Wirklichkeit behandelt werden kann, enthält jedoch eine grundsätzliche Problematik, die sich analog auch in der Logik zeigt. In üblichem Verständnis und in der Lehre wird diese Wirklichkeit als das genommen, worauf Sinn- und Bedeutung sprachlicher Elemente hinweisen. Meistens ist es eine recht materialistisch verstandene "Dingwelt", die dann zur Plausibilisierung der Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem dient. Es hängt aber schon vom theoretischen Verständnis dessen ab, was Sprache selber ist, ob man auch die lautliche und schriftzeichenmäßige materielle Seite der Sprache (gleichsam abgelöst von ihrem Sinngehalt) zu dieser außersprachlichen Wirklichkeit rechnet. Modernes (materialistisches) Sprachver ständnis geht gewöhnlich davon aus, daß diese materielle Seite des Sprachlichen - also artikulierte Lautphänomene und Codierungen - selber schon "die Sprache" seien.

Die Folge davon ist, daß man dann glaubt und behauptet, in der Semantik könne "die Sprache selbst" zum Referenzbereich der sprachlichen Zeichen gehören. Daß die Semantik sich damit das Problem der Selbstreferenz und damit eine Dialektik im Zeichenbegriff einhandelt, dürfte jedem klar sein, der im Gegensatz dazu davon ausgeht, daß die ganze materielle Seite des Sprachlichen zwar zur außersprachlichen Wirklichkeit gehört, aber gerade deswegen nicht selber Sprache sein kann. Die logische Entsprechung ist schon in den scholastischen Suppositionslehren der Termini (Begriffe) ausgearbeitet worden. Denn auch hier wurde schon von den meisten Terministen behauptet, die puren materiellen "Zeichen" (abgelöst von ihrer Bedeutung) gehörten "in materialer Supposition" zum Referenzbereich der Begriffe. Und auch daraus wurde fälschlich geschlossen, die logischen Zeichen könnten sich (neben ihrem "formalen Sinngehalt") auch selbst bezeichnen.

Die so begründete Selbstreferenz der Sprache auf Sprache ist ersichtlich auch der Grund für die Weiterungen, die dieser Ansatz in der von Russell und Tarski eingeführten Theorie der Sprachstufen (Objektsprache, Metasprache, Meta-meta-Sprache usw.) gefunden hat. Darauf ist später noch vielfach kritisch einzugehen.

Noch viel verzwickter stellt sich die Lage dar bei der Frage nach der Gegenständlichkeit der psychischen Vorstellungen, die durch die materiellen Sprachzeichen evoziert werden. Es dürfte ja unbestritten sein, daß das allermeiste, was sprachliche Zeichen bezeichnen, keineswegs zur sinnlich wahrnehmbaren Dingwelt gehört, sondern allein und ausschließlich als psychische Vorstellung existiert (was schon Aristoteles in seiner Hermeneutikschrift verkannt hat, als er behauptete, alle durch Sprache evozierten psychischen Vorstellungen seien "Abbilder" der Dinge). Hier argumentieren nun die idealistischen Semantiker im Gegensatz zu den realistisch-materialistischen so, daß sie die psychischen Vorstellungen auf eine gänzlich undingliche Welt der geistigen Gebilde und Ideen "referieren" lassen, die naturgemäß von den realistisch-materialistischen Semantikern geleugnet wird. Der Fehler liegt auch hier in einem "halbierten" Sprachbegriff, der nun die geistig-psychische Seite der Sprache für die "ganze" Sprache hält und ihre materielle Seite der Dingwelt zuschlägt. Diesen Fehler hat jedenfalls W. v. Humbolt nicht begangen, als er darauf bestand, daß von Sprache nur die Rede sein könne, wenn sie als Einheit des lautlichen (und schriftlichen) materiellen Ausdrucks und des geistig-psychischen Inhalts an Sinn und Bedeutung verstanden wird. Und das setzen wir auch hier bei unserem Sprach- und Zeichenverständnis voraus.

Das muß nun auch vom logischen Formalismus gelten, wenn man ihn auf linguistischer Grundlage erklären will. Er ist wie die "ganze Sprache" ein Vorrat materieller Laut- oder Schriftzeichen oder (wie von uns vorgeschlagen) dieses in Verbindung mit graphischen Figuren, und er gehört damit der sinnlich erfaßbaren Dingwelt an, zugleich aber ist er auch logischer Sinn, der im Verständnis des Formalismus evoziert und aktiviert wird. Ohne dieses Sinnverständnis wird er zu einer sinnlosen Sache und bleibt so nicht Formalismus. Und dies ebenso, wie kein sprachliches oder nichtsprachliches "Zeichen" tatsächlich Zeichen sein kann, wenn es nicht verstanden wird oder wenn es gar als "sinnleer" behandelt wird.

Die *Syntax* thematisiert den Zusammenhang sprachlicher Laut- und Schriftzeichen untereinander und insbesondere die gesetzliche Kombination derselben zu grammatischen Einheiten (Wörter, Ausdrücke, Sätze). Sie blendet insofern den semantischen Aspekt, den sie ja der Semantik überläßt, grundsätzlich aus. Könnte ihr das gelingen, so bliebe in der Syntax nach allem gerade Gesagten kein sprachliches "Zeichen" Zeichen und kein "Zeichenkomplex" tatsächlich Zeichenkomplex. Die Syntax kann dann auch nicht mehr irgend eine Sprache zum Gegenstand haben. Sie muß vielmehr eine reine Laut- und Zeichenkombinatorik werden, die sich ggf. traditioneller Buchstaben zur Bezeichnung von Lautwerten bedient (und dafür ja auch in der Tat eigene "phonetische Lautschriften" entwickelt hat).

Von "logischer Syntax" zu reden, transportiert diese Entsinnlichung der logischen Formalismen auch in die Logik. Und formale Logik als "logische Syntax" wird so zu einer puren Buchstaben-, Chiffren- und "Symbol"-Kombinatorik. Man bemerke, daß hier ein linguistischer und logischer Terminus fehlt, mit dem man genau das bezeichnen könnte, was der eigentliche Gegenstand solcher Sytaxstudien ist. Man muß sich damit behelfen, "Zeichen", "Symbol" und Entsprechendes in Anführungszeichen zu setzen, um wenigstens anzudeuten, daß die "Zeichen" und "Symbole" in der Syntax keine Zeichen und Symbole sein können. Und das ist prekär genug angesichts des linguistischen und logischen Usus, auch das mittels Anführungszeichen Zitierte noch gemäß seinem Wortsinn zu verstehen und dies Verständnis in den Umgang damit einfließen zu lassen. In der Tat dürfte es auch noch keinem noch so konsequenten

Syntaktiker in der Linguistik oder Logik gelungen sein, von Sinn und Bedeutung seiner "Symbole" wirklich abzusehen.

Diese Problematik, die ihre eigene Dialektik mit sich bringt, ist jedenfalls nicht nur in der logischen Syntax, sondern darüber hinaus vorwiegend in der mathematischen Logikkonzeption dafür verantwortlich, daß hier so unbefangen von "Begriffen" ohne Inhalt und Bedeutung oder von "undefinierten bzw. uninterpretierten Begriffen", von "ungedeuteten Kalkülen" und "reinen Formen" gesprochen wird. Die Dialektik zeigt sich darin, daß der mathematische Logiker als Mathematiker immer schon gelernt und verstanden hat, was die vorgeblich sinnlehren Zeichen und Kalküle als Formalsinn aus der Mathematik in die Logik transportieren, und was dann als nicht weiter diskutables Vorverständnis des Logischen für "selbstverständlich" und "evident" gehalten wird.

Die *Pragmatik*, die jüngste Aspektdisziplin der Linguistik, thematisiert das Verhältnis der sprachlichen Elemente zu ihren "Benutzern", insbesondere die kommunikative und manipulative Rolle der Sprache im zwischenmenschlichen Bereich, aber auch ihre Eignung und Funktion für Eingriffe mittels der Sprache in die Wirklichkeit. In letzterer Hinsicht hat vor allem J. L. Austin mit seinen berühmt gewordenen Harvard-Vorlesungen von 1955 über "How to do things with words" (hg. von J. A. Urmson, London-Oxford-New York 1962, 2. Aufl. Cambridge, Mass. 1975, dt: Zur Theorie der Sprechakte, hg. von E. v. Savigny, Stuttgart 1972, 2. Aufl. 1981) grundlegende Einsichten vermittelt. Bei alledem kann die "Sprachpragmatik" offensichtlich nicht von den semantischen und syntaktischen Aspekten absehen, sondern muß diese gerade einbeziehen. Deshalb ist sie wohl auch die am wenigsten konsolidierte Disziplin. Gleichwohl ist sie am meisten mit der Logik insgesamt vermengt worden. Wer etwa nach Literatur zur "logischen Pragmatik" sucht, der wird fast ausschließlich auf logisch verbrämte linguistische Fachliteratur verwiesen.

Die Übertragung dieser linguistischen Disziplinentitel "Semantik", "Syntax" und "Pragmatik" auf die Logik führt, wie wir zeigen wollen, zu gravierenden Fehleinschätzungen darüber, um was es sich bei der Logik handelt. Sie befestigen das genannte Verständnis der Logik als einer - wenn vielleicht auch "ideal" genannten - Sprache. *Die Logik ist aber, wie gesagt, keine Sprache. Das gilt ebenso für die Mathematik und die darauf gegründete mathematische Logik.* Um dies noch deutlicher herauszustellen, mögen noch einige Bemerkungen nützlich sein.

Was in der Linguistik als semantischer und syntaktischer Aspekt einer Sprache unterschieden wird, die dabei doch als ein Ganzes vorausgesetzt wird, das fällt in der sog. logischen Semantik und logischen Syntax gänzlich auseinander. *Logische Semantik* befaßt sich vorgeblich explizit mit Sinn und Bedeutung der logischen Zeichen. Aber im offenbaren Widerspruch dazu wird ihnen als "formalen Zeichen" gerade kein logischer Eigensinn zugesprochen, vielmehr wird ihnen Sinn und Bedeutung nur bei der Anwendung auf inhaltliche (sprachliche oder wissenschaftliche) Gegebenheiten oder bei "Interpretationen der Formalismen durch Modelle" zugelegt.

Entsprechend werden die logischen Formalismen in der *logischen Syntax* als gänzlich sinn- und bedeutungslose "Zeichen" behandelt. Der Widerspruch in der Programmatik zeigt sich schon darin, daß "Zeichen" keine Zeichen sein können, wenn sie nichts bedeuten bzw. keinen Inhalt haben, wie wir oben zeigten. Das hat zur Folge, daß das, was man in dieser logischen Syntax weiterhin Zeichen, Symbole, Formalismen und Kalküle nennt, entgegen dem Wortsinn als pure materielle Gegenstände aufgefaßt werden müssen, die nur nach schematischen Kombinations- und Analyseregeln manipuliert werden können. Da es aber vorgeblich um die logische Sprache geht, nennt man gleichwohl den gesamten "Zeichen-"Vorrat "logisches Vokabular" und die Regeln des Umgangs mit ihnen "logische Grammatik".

Daß in der logischen Syntax vorausgesetzt wird, die logischen "Symbole" seien inhalts- und bedeutungslos, zeigt der Inhalt vieler logischer und besonders mathematisch-logischer Lehrbücher. Der Leser, der hier logisches Denken lernen will, wird zunächst darauf verwiesen, daß er eine Menge technischer Regeln (die dann gerne als "logische Gesetze" bezeichnet werden) für den Umgang mit Groß- und Kleinbuchstaben aller möglichen Alphabete, Ziffern, Kommata, Punkten, Anführungszeichen, Klammern der verschiedensten Formen, mathematischen Symbolen (die ausdrücklich keinen mathematischen Sinn haben sollen) und logischen Zeichen (deren "Sinn" bzw. Zweck - und das ist nicht ihr Bedeutungsgehalt - später durch den übenden Umgang mit ihnen eingesehen und in aufwendigen Definitionen nachgeliefert werden sollen) seinem Gedächtnis einverleiben muß. Er wird geradezu aufgefordert, eigenes Denken und Verstehenwollen vorerst einzustellen und sich ganz der technischen Umwandlung der Kalkülbestandteile in immer wieder andere Konfigurationen nach vorgegebenen, aber meistens nicht weiter diskutierten Regeln zu widmen, bis ihm die Sache in Fleisch und Blut übergegangen sei.

Niemand sagt dem Lernenden aber explizit, daß alle diese Zeichen immer schon ihren sprachlichen, grammatischen und ggf. mathematischen Sinn mit sich führen und auch in der Logik beibehalten. Z. B. daß "A" den Laut A bezeichnet, eine Ziffer eine Zahl oder eine Stelle in einer geordneten Reihe bedeutet, ein Komma Nebeneinandergestelltes von einander abgrenzt, Anführungszeichen oder Klammern den Sinn von dadurch eingeschlossenen Zeichen einerseits liquidieren, andererseits aber gerade hervorheben. Und dabei ist es wiederum "geistesgeschichtlich" merkwürdig, daß gerade die naturwissenschaftlich und mathematisch orientierten Logiker die in den philosophischen Fakultäten gerade abgeschafften humanistischen Kenntnisse des griechischen und sogar des hebräischen Alphabets (für mathematische Mächtigkeiten) voraussetzen und kultivieren. Wollte aber ein logischer Syntaktiker mit seinen vorgeblichen sinnlosen Zeichen ernstmachen, so wäre ihm zu empfehlen, chinesische Schriftzeichen zu benutzen, denn deren Vorrat von ca. 50000 diskreten Einheiten (und die voraussichtlich noch lange anhaltende Unkenntnis ihrer Bedeutungen im Abendland) würde für alle jetzigen und künftigen syntaktisch-algorithmischen Übungen mehr als zureichen.

Aber ersichtlich kann es auch in der allerformalsten Logik keine sinn- und bedeutungslosen Zeichen und Formalismen geben, und daher auch keine im geschilderten Sinne besondere logische Syntax. Die Bedeutung der logischen und ggf. mathematischen Symbole ist und bleibt zunächst der sprachlich-grammatische und mathematische, und es wachsen ihnen dann bei der logischen Verwendung in Formalismen allenfalls eine weitere oder mehrere Bedeutungen zu, die in jedem Falle durch Definitionen (Äquivalenzen) expliziert werden müssen. Der einfachste Fall ist der, daß gewisse Buchstaben als Abkürzungen für logische Begriffe zu stehen kommen, etwa S für Subjekt eines Urteils, P für Prädikat, p für das englische "proposition" d. h. den behauptenden Urteilsgehalt. Was das ist, glaubt zunächst jeder, der die Bildungssprache beherrscht, zu wissen. Er hat nur gelegentlich Anlaß zum Verwundern, wenn ihm die logische Definition diesen "planen Sinn" (wie die Hermeneutiker sagen) nicht bestätigt, sondern ihn teils einengen ("restrictio") oder erweitern ("ampliatio" bzw. "extensive Auslegung") oder gar etwas ganz anderes und vom üblichen Sprachgebrauch Abweichendes festlegen. Man kann und sollte dies hinnehmen und als neuen oder zusätzlichen Wortsinn in seinem Wortschatz registrieren, vielleicht aber auch darauf achten, daß sich manche Merkwürdigkeit der Übersetzung oder Übernahme von Fremdwörtern verdankt, die in einem anderen Kontext definiert sind als in der gewohnten einheimischen Sprache.

Stößt man freilich auf das in allen Disziplinen vorkommende Phänomen, daß sich die Logiker über eine Definition untereinander nicht einig sind, so hat man Grund anzunehmen, daß man an der Front der logischen Forschung angekommen ist, wo man nur noch Partei ergreifen oder neue Vorschläge entwickeln kann. Dann ist ein vertieftes Studium der Klassiker und Schulbildungen der Logik angezeigt (wofür unsere Bibliographie dienlich sein mag). Man wird dann bald erkennen, daß es auch in der Logik terminologische, phraseologische und rhetorische Verabredungen und Standards bzw. einen wissenschaftlichen Jargon gibt (das ist das, was man überhaupt nur logische Meta-Sprachen nennen sollte). Dazu gehört auch der besonders in den Naturwissenschaften und in der Mathematik verbreitete und in die Logik übernommene Brauch, einzelne Begriffe, Prinzipien, Beweisargumente, Theoreme, ja ganze Theorien oder Systeme und methodische Regeln nur noch durch die Eigennamen derjenigen Personen zu bezeichnen, die sie erfunden oder propagiert haben. Wir machen im folgenden auch Gebrauch von solchen Epitheta, indem wir etwa von der "aristotelischen" oder "stoischen Logik" oder "wittgensteinschen Wahrheitswerttabellen" sprechen, bemühen uns aber auch, manchen Wildwuchs mit dem "ockhamschen Rasiermesser" zu beschneiden. Die Erfahrung lehrt auch hier, daß sich darin oftmals nur das scholastische "stat pro ratione auctoritas" durchhält, was natürlich ebenso gut Gedankenblässe, problematische und umstrittene Topoi oder Dogmen abdeckt wie es als Abbreviation luzider Gedankengänge dienen kann.

Daß alles sogenannte logisch Formale einen genuinen Sinn und Bedeutung hat, läßt sich am besten so ausdrücken: *Das Formale ist für die Logik selbst ihr materialer Gehalt*. Und daher ist es ein grundlegendes Mißverständis von "Formalismus" zu meinen, er "abstrahiere" von jedem Inhalt, und Inhalt wachse ihm erst bei Anwendung des Formalen auf Beispiele und einzelwissenschaftliche Topoi zu. Man kann allenfalls sagen: Durch Beziehung des Formalismus auf Beispiele, also durch Anwendung, wird allem logischen Sinn ein weiterer Beispielssinn beigesellt. Und umgekehrt wird die eigene Bedeutung bzw. der Sinn der logischen Formen und Formalismen den Beispielen und Anwendungsfällen gleichsam aufgeprägt. Wie das geschieht, dürfte schwierig darzustellen sein. Jedenfalls ist es bisher kein logisches (und leider auch kein hermeneutisches) Thema gewesen, da man ja allgemein von der "Leerheit" des Formalismus ausgeht.

Versuchen wir, den Sachverhalt wenigstens an einem Beispiel klarzumachen, das zugleich auch logische Denkweisen beleuchtet. Betrachten wir zunächst den Übergang vom Beispiel zum Formalismus. Jeder versteht ohne weiteres den (durch Tarski berühmt gewordenen) gemeinsprachlichen Satz, der uns auch später beschäftigen wird: *Der Schnee ist weiß.* Wer die deutsche Sprache beherrscht, weiß was die Wörter *Schnee* und *Weiß* bedeuten, und daß man eine für wahr gehaltene "positive" Behauptung mit dem Wörtchen *ist* ausdrückt. Setzt man den Satz in Anführungszeichen, so hat man ein sprachliches Zitat. Der Satz bleibt lesbar und verständlich, aber die (grammatischen) Anführungszeichen fügen ihm einen - für den literarisch gebildeten Leser - verständlichen zusätzlichen Sinn zu, z. B. daß man den Satz von anderen gehört hat und sich deshalb nicht unbedingt für seine Wahrheit verbürgen möchte. Überspitzt man diese Einstellung, so spricht man dem zitierten Satz überhaupt einen eigenen Sinn ab, und das nannten wir vorn die Liquidation des Zitatsinnes.

Nun sind Anführungszeichen bzw. Klammern (in der mathematischen Logik) zugleich auch Zeichen des logischen Formalismus. Sie lenken die Aufmerksamkeit auf das, was am sprachlichen Satze logisch ist, und zwar ohne daß sie den sprachlichen Inhalt liquidieren. Logisch relevant ist an "Der Schnee ist weiß", daß es sich um ein behauptendes Urteil handelt, das deshalb einen Wahrheitswert haben muß, und daß es aus einem Subjektsbegriff und einem Prädikatsbegriff besteht, die mittels der Kopula (einem urteilsbildenden Junktor) verknüpft sind. Sind aber "Schnee" und "weiß" logische Begriffe, so stellt sich die weitere logische Frage nach ihrer Stellung zueinander, denn Begriffe können ganz unabhängig von einander sein bzw. nebeneinanderstehen, aber auch in einem Subsumptions (Einschluß)-Verhältnis zueinander stehen. Um das zu entscheiden, muß man wieder auf den sprachlichen Sinn der Wörter zurückgehen. Man weiß, daß Schnee seiner kristallinen Oberflächennatur gemäß immer weiß erscheint, Das ergibt einen Grund zur Annahme, daß "weiß" in logischer Hinsicht ein Merkmal des Begriffs "Schnee" ist. Und das ist wiederum ein logischer Grund zu der logischen Qualifikation von "Der Schnee ist weiß" als analytisches und deshalb wahres Urteil.

In umgekehrter Richtung vom Formalismus zum Beispiel bzw. zur Anwendung übergehend, sieht die Sache so aus: S und P sind Zeichen für Begriffe. Ihre Verknüpfung durch die Kopula ("ist") liefert die logische Form eines (positiven) Urteils S ist P. Logische Urteile sind analytisch und als solche wahr, wenn die Bedeutung des Prädikatsbegriffs zugleich auch zum Bedeutungsbestand (Merkmale) des Subjektsbegriffs gehört und deshalb im Prädikatsbegriff nur verdeutlicht wird. Geben wir das Beispiel: "Der Schnee ist weiß", das zugleich den sprachlichen Satz *Der Schnee ist weiß* als logisches Beispiel ausweist. Wer Schnee kennt, stellt ihn sich als weißen Stoff vor. Also muß die Intension des Prädikatsbegriffs schon im Subjektsbegriff enthalten sein. Also handelt es sich bei dem Beispiel um einen logisch wahren (analytischen) Satz.

Beide Übergänge lassen sich naturgemäß auch an verzwickteren Beispielen verdeutlichen, bei denen die Wahrheitswertfrage zum Problem werden kann. Berühmt ist etwa Bertrand Russells Beispiel "Der gegenwärtige König von Frankreich ist glatzköpfig", wobei jeder weiß, daß Frankreich gegenwärtig keinen König hat. Viel diskutiert sind auch die neueren Formulierungen des "Lügners" von Eubulides, z. B. "Dieser hier geschriebene Satz ist unwahr". Besonders interessant sind mathematische Beispiele. Sie gehören zwar zum eigenen Formalismus der Mathematik, können aber für die Logik auch nur inhaltliche Beispiele für Anwendungen des logischen Formalismus auf mathematische Gegebenheiten sein. Wir werden vielfach Gelegenheit haben, dem im folgenden nachzugehen.

Was die *logische Pragmatik* betrifft, so wurde sie durch den Pragmatismus Peirces und Wittgensteins Spätphilosophie in der modernen Logik zum Thema. Man hat dabei allerdings längst vergessen, daß ihnen J. G. Fichte mit seinem Buch "Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre" von 1794 (neu hg. von W. G. Jacobs, Hamburg 1970) weit vorausgeeilt war, denn er hat den Pragmatismus hier mit seiner Metaphysik der "Urtathandlung" eigentlich begründet. Und Fichte zeigte dabei auch, wie das logische Denken als "Setzen"(Position) und "Entgegensetzen" (Negation) sowie "Einschränken" (d. h. Einteilen und Unterordnen von Arten unter Gattungen) von Begriffen auf dieses Handeln des Bewußtseins zurückgeführt werden und Wissenschaft überhaupt durch diese Bewußtseinstätigkeit begründet werden kann. Wittgenstein hat vorgeschlagen, Sinn und Bedeutung der Sprachen und der logischen Elemente aus ihrem "Gebrauch" in den "Sprachspielen" (wobei auch Logikbetreiben ein Sprachspiel sein soll) abzuleiten, dazu gleichsam soziologisch und psychologisch das "Regelbefolgen" der Spieler zu beobachten und daraus auf die logischen Regeln und Normen zu schließen. Daran sieht man, daß die logische Pragmatik alle Gestalten sprachlichen Handelns in ihre Betrachtungen einschließt und dadurch mit der eigentlichen Sprachpragmatik mehr oder weniger verschmilzt (wie sich auch in der Literatur zum Thema zeigt).

Das hat aber die Folge, daß damit der Logik weit über ihre traditionellen Aufgaben hinaus auch die Aufgabe der Logifizierung aller sprachlichen Satz- und Argumentationsformen gestellt wird. Und so hat dies zahlreiche Entwürfe von Speziallogiken inspiriert. Dazu gehören die konstruktive und "agonale" Logik der Erlanger Schule oder die Dialog-Logik, in denen auf den konstruktiven Aufbau der logischen Elemente durch elementare Sprech- und Zeigehandlungen und ihre Verwendung in gleichsam kämpferischen Wettstreiten um das Überzeugen und Rechtbehalten abgestellt wird. Darüber hinaus macht sie auch das Fragen, Bewerten, Präferieren, Wählen, Entscheiden, Befehlen, Erlauben, Wünschen, Ahnen und Prophezeien, das ja in grammatisch bekannten Satzformen artikuliert wird, zum Gegenstand von Speziallogiken (die man in der Bibliographie aufgelistet findet).

Die Aufnahme dieser Topoi hat zwar den Logikern eine Reihe neuer Tätigkeitsfelder zur Logifizierung und Formalisierung - man hält es meistens auch für eine fortgeschrittene Verwissenschaftlichung derselben - eröffnet, sie widerpricht aber dem seit Aristoteles bis in neuere Zeiten hochgehaltenen Anspruch, daß es die Logik mit der Wahrheit und ihrer Unterscheidung von der Falschheit zu tun habe, und daß deshalb die nichtbehauptenden sprachlichen Satzformen, die grundsätzlich nicht wahrheitswertfähig sind, aus der logischen Betrachtung auszuschließen seien. Und dies deswegen, weil sie genuiner Gegenstand der Grammatik und Rhetorik seien, denen es nicht in erster Linie um Wahrheit und Falschheit, sondern um sprachliche Richtigkeit und um Effizienz bei der Herstellung und Veränderung von Einstellungen und Überzeugungen geht. Will man diesen Weiterungen der Logik wenigstens einen guten Sinn abgewinnen, so liegt er wohl darin, daß der Verfall grammatischer Sprachpflege und rhetorischer Kunst in unseren Schulen und Hochschulen durch "logische Verwissenschaftlichung" der hier getriebenen Sprachspiele mehr als kompensiert wird.

Diese Weiterungen der Logik nehmen sich in der Regel die klassische Logik mit ihren Wahrheitswerten zum Vorbild. Da es bei ihren Anwendungsfeldern jedoch nicht um die Wahrheitsfrage gehen kann, ersetzten sie die Wahrheitswerte durch irgendwelche im Anwendungsbereich vorgegebenen Grundunterscheidungen, deren eigene wissenschaftliche Dignität kaum diskutiert wird. So kann man sich wundern, daß die sog. *deontische Logik (Normenlogik)* davon ausgeht, "Geboten, Verboten und Erlaubt" seien die hier einsetzbaren Äquivalente von Wahrheit, Falschheit und einem Dritten. Wundern kann man sich deshalb, weil Gebote und Verbote zwar eine gewisse Ähnlichkeit mit den positiven und negativen logischen "Werten" wahr und falsch aufweisen, daß aber der Ansatz des dritten Wertes zwischen beiden als "Erlaubnis" nur auf eine Untertanengesinnung der Deontiker schließen läßt, die offenbar für die Freiheit autonomer Entscheidungen in der Deontik keinen Spielraum annehmen. Sogar die Stoiker waren in dieser Hinsicht toleranter und humaner, als sie das "Adiaphoron" - das moralisch Gleichgültige und Indifferente - als Mittleres in der praktischen Philosophie zuließen.

In der *Quantenlogik* der Mikrophysik betont man die Analogie von Wahrheit und Falschheit mit den positiven und negativen Wahrscheinlichkeitszuständen von Korpuskeln oder Wellen und schiebt als "Drittes" die heisenbergschen Unschärfe-Zustände als Unentscheidbarkeiten dazwischen. Diese von Reichenbach inaugurierte Sichtweise hat zwar der dreiwertigen Logik durch die prätendierte Anwendbarkeit in der Mikrophysik großen Auftrieb verschafft, dafür aber auch die innerlogischen (dialektischen) Probleme des "Dritten" ziemlich unreflektiert in die Physik hineingebracht.

Erwähnen wir schließlich noch die *Zeit-Logik (Temporale Logik bzw. tense logic)*. Sie hat zweifellos sehr alte Probleme der stoischen Logik wieder aufgenommen, die ja - wie zu zeigen sein wird - eine "Situationslogik" für einen "Hier- und Jetzt-Standpunkt" empirischer Aussagen gewesen ist. Aber die mit diesem stoischen Logikkonzept verbundenen Probleme von Aussagen über Vergangenes, Gegenwärtiges und Zukünftiges schlicht auf die drei Werte "vergangen, gegenwärtig, zukünftig" einer dreiwertigen Logik zu projizieren, "logifiziert" nur eine dogmatisch voreingenommene platonische Zeitontologie einer "ewigen Präsenz des Vergangenen und Zukünftigen im Gegenwärtigen" der Physik. Sie nimmt nicht einmal von der aristotelischen Zeitontologie Notiz. Diese besagt nämlich in erster Linie, daß alles Vergangene nicht mehr ist und daher überhaupt nicht (ontologisch) existiert. Und ebenso existiert nach Aristoteles auch alles Zukünftige noch nicht und deshalb auch überhaupt nicht. Daher sind zeitlogische Fragen eine Provokation der Logik dahingehend, daß sie klären muß, ob sie über Vergangenes und Zukünftiges überhaupt unbesehen mit positiven Urteilen urteilen kann anstatt mit negativen oder gar dialektischen zugleich positiven und negativen, die wir als wahr-falsch bzw. "wahrscheinlich" definieren.

Die meisten dieser Speziallogiken gehen, obwohl als Logiken gemeint, über die Logik in andere Wissenschaftsgebiete hinaus. Und diesbezüglich möchten wir es mit Kant halten, der schon zu seiner Zeit vor Tendenzen der Vermischung von Disziplinen warnte: "Es ist nicht Vermehrung, sondern Verun staltung der Wissenschaften, wenn man ihre Grenzen in einander laufen läßt" (Kritik der reinen Vernunft, Vorrede zur 2. Aufl. Riga 1787, B VIII).

Ebenso wie wir dem neueren noch immer etwas modischen "Ineinanderlaufen" von Sprachwissenschaft und Logik sowie Logik und Grundlagenfragen von Einzeldisziplinen kritisch gegenüberstehen, werden wir uns im folgenden auch kritisch gegen das schon viel länger anhaltende "Ineinanderlaufen" von Mathematik und Logik verhalten. Warnungen davor sind seit den fünfziger Jahren deutlich genug erfolgt. So etwa von Bruno von Freytag-Löringhoff mit seinem Buch "Logik, ihr System und ihr Verhältnis zur Logistik" von 1955 und von Günther Jacobi mit seinem temperamentvollen "Diskussionsbeitrag" "Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtsschreibung" von 1962. Sie haben aber so gut wie nichts bewirkt, außer vielleicht, daß man heute nicht mehr von "Logistik" (ein alter Titel für die Logik, den Couturat um die Jahrhundertwende für die neue "mathematische Logik" reklamierte, der aber ohnehin schon damals an das Militär und die Wirtschaft vergeben war), sondern direkt von "mathematischer Logik" spricht, wenn eine Mathematisierung der Logik gemeint ist. Wir haben zwar die entsprechende Literatur in der Bibliographie mitverzeichnet, möchten aber doch entschieden auf dem Unterschied von Mathematik und Logik beharren und werden ihn im folgenden auch genauer herausarbeiten.

Es ist natürlich gewinnbringend, wenn eine Disziplin von einer anderen Anregungen erhält, manches übernehmen kann und überhaupt durch Aufmerksamkeit auf deren Gegenstände manches besser zu sehen lernt. Dies ist schon immer der Sinn der Interdisziplinarität der Disziplinen gewesen. Und in eben dieser Weise hat auch die Logik seit jeher von der Mathematik, der Psychologie, der Sprachwissenschaft und vielen anderen Disziplinen gelernt. Das Verhältnis zur Mathematik war aber schon seit Platons Zeiten ein besonderes.

Logik und Mathematik sind im Hinblick auf und für die Anwendung in den anderen Wissenschaften wesentlich Methodendisziplinen. Hierin standen sie seit der Antike in Konkurrenz zueinander. Durch das mittelalterliche Fakultätensystem ist die Konkurrenz zu einer Arbeitsteilung in den Bereichen des geisteswissenschaftlichen Triviums und des naturwissenschaftlichen Quadriviums geworden. Das heißt: Die Logik wurde zugleich zur Methodologie der Philologien und historischen Disziplinen, die Mathematik entsprechend zur Methodologie der Naturwissenschaften. Das hat sich seit dem 19. Jahrhundert wieder geändert. Die Mathematik erhob mehr oder weniger explizit den Anspruch, die Universalmethodologie für alle Wissenschaften zu sein, wie man bei A. Comte, J. St. Mill und nicht zuletzt bei Gauss sehen kann, welch letzterer bekanntlich die Mathematik für die Königen der Wissenschaften hielt (und die Zahlentheorie für die Königin der Mathematik). Sie bewertete die Wissenschaften ihrerseits als "szientifisch" und "fortgeschritten" nach dem Maßstab, wie weit sie schon mathematisiert oder doch mathematisierbar seien. Diese Tendenz hält, vermittelt durch den logischen Positivismus bzw. die analytische Philosophie, bis heute an und wirkt ersichtlich auch dahin, daß viele Geisteswissenschaften durch ihre Mathematisierung den Nachweis ihrer Modernität und Wissenschaftlichkeit zu erbringen hoffen. Da aber die Logik auch zu den "trivialen" Geisteswissenschaften gehört, hat sie sich dieser Tendenz angepaßt und sich ebenfalls mathematisiert. Das führte zu der schon genannten Hochkonjunktor der mathematischen Logik, durch die auch die Logik ihre Modernität und Wissenschaftlichkeit demonstrieren will.

Ersichtlich haben die "Triviallogker" als Vertreter der klassischen Logik dem wenig entgegenzusetzen gewußt, es sei denn das Bewußtsein, daß es in keiner Wissenschaft ohne Logik geht, also auch nicht in der Mathematik. Dem haben auch viele Mathematiker Lippenbekenntnisse gezollt, wenn sie von "logischer Begründung der Mathematik" sprachen wie Frege, oder sogar einen "mathematischen Logizismus" zu vertreten vorgaben, wie Russell oder Tarski. In der Tat hatten sie aber die Logik selbst schon als "Idealsprache" aufgefaßt und sie damit auf einen Linguistizismus begründet. In dessen Licht sahen sie nun die ganze Mathematik als einen Schichtenbau von Sprachen (Objekt-, Meta-, Metameta- etc. Sprachen, oder auch: Beobachtungssprache, Theorie-Sprache, Zuordnungs- bzw. Brückensprache zwischen Beobachtungs- und Theoriesprache wie bei Carnap). Dies linguistizistische Objekt- und Metasprachenkonzept der mathematischen Logik wird zwar heute in jedem Logikseminar expliziert, vor allem, weil es die von Russell diagnostizierte Paradoxie der Mengenlehre in G. Cantors und Freges Logizismus (und damit in einer der starksten mathematischen Begründungstheorien) zum Verschwinden bringt, und es hat auch viele Mathematiker zu Kavalierlinguistizisten gemacht, keineswegs aber konnte es zu einer genuin logischen Kritik und ggf. Begründung der Mathematik dienen.

So ist die "klassische" Logik in dieser Konkurrenz zur Mathematik ins Hintertreffen geraten. Sie hat wohl auch wenig Chancen sich zu behaupten. wenn man die unterschiedlichen Fakultätsausstat tungen der Logik und Mathematik ansieht. Die Mathematik verfügt in den "mathematisch-naturwissenschaftlichen" Fakultäten und Fachbereichen über ganze Institute mit eigenen Studiengängen und spezialisiertem Lehr- und Forschungpersonal. Die Logik ist noch immer Teildisziplin der Philosophie an philosophischen Instituten der "philosophischen" Fakultäten. Sie hat Glück, wenn sie ihr Lehrangebot im Fach Philosophie mit einer gewissen Obligatorik versehen kann, und noch mehr, wenn sie überhaupt noch einen genuinen Logiker, der Logik zu seinem philosophischen Hobby gemacht haben muß, als Forscher und Lehrer finden kann. Aus dem ehemaligen "Studium Generale" für alle Fakultätsstudenten ist die Logik mit der Philosophie zusammen längst verschwunden. Und so braucht man sich nicht zu wundern, daß in den Studiengängen der philosophischen Fakultäten unter Berufung auf Paul Feyerabends "Wider den Methodenzwang" ein fröhliches methodisches "Anything goes" herrscht, das die "Wahrheit ohne logische Methode" zu gewinnen hofft.

Die Logik muß es aber als ihre Aufgabe begreifen, auch die Mathematik (wie alle Geisteswissenschaften, zu denen auch die Mathematik gehört) methodisch zu unterstützen und, was noch wichtiger ist, die wirkliche logische Grundlage ihrer Methodizität überhaupt erst einmal aufzuarbeiten und zu diagnostizieren. Dazu ist in den letzten Jahrhunderten wegen der trivial-quadrivialen Arbeitsteilung und seit dem 19. Jahrhundert wegen der Abwanderung der Mathematik aus der einstigen philosophischen Fakultät in die neue "mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät" allzu wenig getan worden.

Daß die Mathematik über eine genuin mathematische Begriffsbildung ("undefinierbare Axiome", "metrische Begriffe", "Intuitionen"), eigentümliche Aussageformen ("Gleichungen" und "Funktionen"), besondere Schlußformen ("Kalküle", "Beweise") verfügt, darf wohl als Binsenweisheit gelten. Es genügt aber nicht, mit ihnen umzugehen zu lernen, was schwer genug erscheint (die Drop-out-Rate von Mathematikstudenten liegt etwa bei 80 %), sondern es gilt auch die Mittel bereitzustellen um zu durchschauen, um was für eine Art von Denkgebilden es sich dabei handelt. Vor allem ist zu klären, ob und wieweit sie mit den logischen Elementen übereinstimmen oder davon abweichen und worin ggf. ihre mathematische Besonderheit gegenüber den logischen Denkgebilden besteht. Vollständig durchgeführt, würde man das im Gegensatz zur Mathematisierung der Logik eine Logifizierung der Mathematik nennen. Aber davon sind wir noch weit entfernt, trotz allem sogenannten Logizismus als einer der Grundlagentheorien der Mathematik. Und dies liegt nun ganz wesentlich auch daran, daß die klassische Logik selbst nicht in einem Zustand ist, in welchem sie sich selber ganz durchsichtig werden könnte.

Um diesen Zustand der Logik zu verbessern, werden wir im folgenden eine Reihe von Vorschlägen machen. Dazu gehört in erster Linie, daß wir das Fundament der klassischen Logik gleichsam ein Stockwerk tiefer legen, als es mit der bisherigen Grundlegung bei der Begriffslehre der Fall war. Wir fangen mit den *eigentlichen "Bausteinen" der Begriffe, also Intensionen und Extensionen* an und leiten davon ab, was "Begriff" in der Logik überhaupt nur sein kann. Bei der Behandlung verschiedener "regulärer" Begriffsarten scheint uns vor allem die pyramidale Konstruktion der *negativen Begriffe* wichtig. Sie liefert erst die Basis für die Konstruktion der "irregulären" Begriffe, nämlich der *widersprüchlichen Begriffe und der Möglichkeits- und Dispositionsbegriffe*, deren logische Analyse ein altes Desiderat, und wie uns scheint, ein Dunkelfeld der logischen Forschung ist.

Wie die widersprüchlichen Begriffe "zu denken", induktiv zu gewinnen und logisch zu konstruieren sind, sei schon hier auf die einfachste "sensualistische" Erklärungsformel gebracht. Sie verschmelzen Merkmale (Intensionen) von Erfahrungsinhalten, die nicht zugleich und im gleichen Kontext wahrgenommen werden können, wohl aber in der erinnernden Phantasie zu einheitlichen Vorstellungen kombiniert werden. Und weil das, was hier "phantastisch" und oftmals kreativ verschmolzen wird, nur "im Geiste" existiert, wird solchen Begriffen kein selbständiger und eigener semantischer Bezug auf die sogenannte extramentale Wirklichkeit beigelegt. Zugleich aber, und das ist semantisch-extensionaler Ausdruck ihrer Widersprüchlichkeit, behalten sie die Extensionen der in ihnen verschmolzenen Ausgangsbegriffe bei und sind nur deswegen auch verständlich und denkbar.

Als rein "geistige Gebilde" werden sie freilich in der Logik selbst, aber vorwiegend in der Mathematik, wie reguläre behandelt, weil man ihre Widersprüchlichkeit nicht durchschaut. Das führt dazu, daß man ihnen hier selbst wiederum eigene Arten und Unterarten mit den entsprechenden Extensionen beilegt und diese durch gegriffene spezifische Merkmale definiert. Wir werden das bei der Junktorenlehre und besonders beim Zahlbegriff zeigen. Das ist die Grundlage für das, was man üblicherweise "Deduktion" nennt.

Ein klarer Begriff vom widerspruchsvollen Begriff sollte auch eine Grundlage dafür bilden, seine Funktion in widersprüchlichen Urteilen und bei den Wahrheitswerten von Urteilen zu klären. Hier galt es uns zunächst, mit dem traditionellen dogmatischen Vorurteil aufzuräumen, der Urteilswiderspruch sei eo ipso falsch und könne in der formalen Logik als zuverlässige "analytische" Darstellungsform der "logischen Falschheit" dienen. Wir vertreten die These und suchen sie zu beweisen, daß er genau das "Dritte" neben Wahrheit und Falschheit, nämlich Wahr-Falschheit ist. Daß dies Dritte niemals aus der Logik ausgeschlossen war, zeigt sich in aller logischen Rede von "Möglichkeiten" und "Wahrscheinlichkeiten". Wir werden daraus kritische Gesichtspunkte für die logische Bewertung der Modal- und Wahrscheinlichkeitslogiken ziehen.

Bezüglich der *Junktorenlehre* betonen wir den *Unterschied zwischen ausdrucks- und urteilsbildenden Junktoren*, der wie es scheint bisher in der Logik nicht beachtet worden ist. Er hat erhebliche Folgen für die Urteilslehre und die darin begründete logische Kernfrage nach Wahrheit, Falschheit und dem "Dritten" als Wahr-Falschheit bzw. Wahrscheinlichkeit. Ebenso legen wir großen Wert auf die Unterscheidung von *drei bzw. vier Implikationsjunktoren*, deren Verknüpfungsfunktion erst in der pyramidalen Notation darstellbar wird. Wir hoffen, daß wir damit einen entscheidenden Beitrag zur Klärung des "Rätsels der Implikation" leisten können. Durch die graphische Darstellung der Urteilsjunkturen in pyramidaler Notation lassen sich nunmehr die Wahrheitswerte der Urteile auch formal darstellen. (was bekanntlich ein perennes Desiderat der Logik war).

Daran schließen wir Überlegungen zur *Schlußlehre* an. Wir konstruieren den Gehalt der aristotelischen Syllogistik und zeigen, daß sie sämtlich in drei Begriffskonstellationen in der Pyramide "spielen", daß Aristoteles und die Scholastik dabei aber gelegentlich auch anstatt mit nur drei Begriffen mit "Vieren" (Quaternio terminorum) und "Fünfen" gespielt haben.

Hierbei erscheint uns besonders wichtig die Einsicht, daß die Prämissen und Konklusionen in den klassischen aristotelischen Schlüssen keineswegs durch Junktoren, sondern vielmehr nur durch identische Intensionen in den vorkommenden Begriffen (durch den "Mittelbegriff" der Prämissen vermittelt) verbunden werden. Das läßt sich bei der üblichen Notation ganzer Begriffe durch Buchstaben nicht formal darstellen, wohl aber in der pyramidalen Notation, die diese Intensionenidentität offenlegt. Daß beim Wegfall dieser Voraussetzung, die in den neueren Schlußlehren üblich geworden ist, von "Schlüssen" von irgendwelchen (wahren oder falschen) Prämissen auf irgendeinen (wahren oder falschen) Schlußsatz nicht mehr sinnvoll die Rede sein kann, liegt dann auf der Hand.

Ebenso gehen wir auf die stoischen "Unbeweisbaren" (eigentlich: "Unanschaulichen") ein und zeigen, worauf ihre Gültigkeit und die Wahrheitswerte der Konklusionen beruhen. Im Unterschied zu den aristotelischen Syllogismen sind bei den stoischen Schlüssen gerade die Junktoren das tragende logische Element, nämlich die "Unbeweisbaren" (besser gesagt die "unanschaulichen" Junktorfunktionen). Auch die Stoiker hatten für die Einsetzbarkeit von Beispielbegriffen in die Schlußformen der Funktion des Mittelbegriffs entsprechende Anforderungen gestellt (etwa Chrysipps Forderung, in einem implikativen Schluß dürfe das "Gegenteil" der Konklusion mit der Prämisse nicht vereinbar sein), die garantieren sollten, daß Schlüsse nur innerhalb eines thematischen Sinnzusammenhangs "gesund" und gültig seien. Die moderne Aussagenlogik, die sich emphatisch auf die stoische Schlußlehre beruft, hat auch diese Anforderungen fallen gelassen und läßt daher "Argumente" ohne jeden Sinnzusammenhang untereinander und mit der Konklusion als "formal gültig" zu. Daß auch dabei nicht mehr von "Schlüssen" die Rede sein kann, müßte ebenso auf der Hand liegen.

Abschließend behandeln wir die Frage der *Axiome bzw. Prinzipien*, die in der Logik seit jeher eine zentrale Bedeutung hatte, und deren Gewicht in der mathematischen Logik seit D. Hilberts axiomatisch-formalistischer Begründungstheorie eher noch zugenommen hat. Da wir auch in Bezug auf Kategorien und Grundbegriffe den induktiv-sensualistischen Ansatz vertreten, wenden wir uns kritisch gegen die traditionelle Meinung, axiomatische Grundbegriffe könnten im logischen Sinne Begriffe sein, wenn sie nicht definiert werden können, oder wenn sie - wie in der Axiomatik üblich - als "leere bzw. uninterpretierte" Gebilde behandelt werden. Überdies bringen wir Argumente dafür bei, daß das, was man für genuin logische Axiome hält (Identität, Widerspruch, Drittes) keineswegs "oberste" Gattungen der logischen Begriffsbildung für die deduktive Begründung logischer Theorien sind.

Erst auf dieser Grundlage erscheint es möglich, genauer auf den Unterschied von Logik und Mathematik einzugehen, zugleich aber auch das Logische in der Mathematik und das Mathematische in der Logik, wie es sich nun einmal darstellt, zu identifizieren und zu beurteilen. Ob unsere Ergebnisse überzeugend, haltbar und für Mathematiker goutierbar sind, mag von anderen beurteilt werden. Sie lassen sich so zusammenfassen:

Die Mathematik erscheint uns als die Ausarbeitung eines platonischen Logikkonzeptes, das in der Geschichte der "klassischen Logik" sorgfältig ausgespart und als alternative Methodologie einer gerade deswegen immer esoterischer werdenden Wissenschaft überlassen worden ist. Die aristotelische und stoische Logik haben diese platonische Logik kontinuierlich als "Dialektik" im Sinne einer Logik des Widerspruches und des sonst ausgeschlossenen Dritten perhorresziert. Um zu zeigen, daß diese Diagnose grundsätzlich zutrifft, haben wir dem euklidischen System der Mathematik ein eigenes Kapitel gewidmet und seinen platonischen Dialektikansatz herausgearbeitet. Daß dieser platonische Logiktyp, also eine wohlverstandene Dialektik, aus der "klassischen" und modernen Logik auszuschließen und überhaupt nicht für Logik zu halten sei, halten wir für eine leider epochale Fehleinschätzung der Sache sowohl durch die gesamte klassische Logik wie durch die mathematische Logik.

In der spätmittelalterlichen und Renaissancelogik ist die platonische "Dialektik" als lullische Kunst der Begriffskombinationen präsent geblieben und zu einer zeitweise überaus verbreiteten Kabbalistik entwickelt worden. Auch damals standen ihr die aristotelischen und stoischen Triviallogiker mehr oder weniger verständnislos und ablehnend gegenüber. Man bemerkt diese Einstellung auch heute noch in den entsprechenden Darstellungen der Logikgeschichtsbücher über die lullische Kunst.

Leibniz hat diese platonische Dialektik in der Gestalt der lullischen Kunst aufgegriffen und weiterentwickelt. Er hat aber sorgfältig darauf geachtet, sein Logikkonzept - wie manches andere, was er aus apokryph gewordenen Traditionen übernahm - als grundsätzlich neu erscheinen zu lassen und es von Anfang an auf die Problemstellungen der Mathematik zu beziehen. Das von ihm ausgehende "Leibniz-programm" konnte daher auch nichts anderes sein als die Wiederaufnahme der platonischen Dialektik und ihre Installierung als "mathematische Logik".

Leibniz hat zu seiner Zeit den Neuplatonismus, den man als philosophische Strömung meist nur noch als "theologische" Adaptationen protestantischer Refomationsideen oder als spekulative mystische Systeme wie diejenigen von Jakob Böhme, Ralph Cudworth oder Robert Fludd kennt, mit den modernen Wissenschaften zusammengebracht, und dies in viel umfassenderem Maße, als es die Renaissanceplatoniker wie Ficino, Galilei und manche anderen Astronomen, Physiker und Mathematiker vermocht hatten. Seine neuplatonischen aber auch wiederum direkt platonischen metaphysischen Prinzipien wurden ihm dabei auch Begründungsprinzipien aller von ihm kultivierten Einzelwissenschaften.

Die alte Emanationslehre lieferte ihm das allgemeine Evolutionsprinzip der Natur und des Geistes. Die prästabilierte Harmonie von Natur- und Geistesevolution lieferte die Basis für die seither in Mathematikerkreisen beliebte Überzeugung, daß alle Naturphänomene nur Analoga und modellhafte Veranschaulichung der unanschaulichen geistigen Gebilde, wie sie gerade die Mathematik erforscht, sein könnten. Sein Evolutionsprinzip begründete wiederum sein Kontinuitätsprinzip, das alle Diskretheit und Unterscheidbarkeit von Begriffen, Zahlen, Größen oder geometrischen Gebilden und insbesondere Örtern von bewegten Körpern als grobschlächtige Anschauungsphänomene darstellen ließ, deren tatsächliche Übergänge und Zusammenhänge erst in einer geistigen Mikro- und Makroanalyse des infinitesimal Kleinen oder unendlich Großen "mathematisch" gedacht werden könne. Daß alles dies von seinem metaphysischen Letztprinzip, der Zentralmonade als des Göttlichen, zusammengehalten wurde, war nahe genug bei den Theologen, um von ihnen als willkommene wissenschaftliche Bestätigung ihres Gottesbegriffs akzeptiert zu werden, und es erschien zugleich als fern genug von den davon abgeleiteten Wissenschaftsprinzipien, um auch bei den Einzelwissenschaftlern noch als "Façon de parler" hingenommen zu werden. Auch der leibnizsche Monadenbegriff läßt sich nur aus der platonisch-euklidischen Tradition verstehen. Er ist wie die mathematische Eins (Monas) zugleich die Einheit des Vielfältigen (wie sich in jedem individuellen Bewußtsein zeigt) als auch Element eines Ganzen, wie sich im Verhältnis der einzelnen Geistmonaden zur göttlichen Zentralmonade zeigt).

Daß diese "platonischen" Prinzipien selbst nur in einem dialektischen, und das heißt widersprüchlichen, Zusammenhang zueinander stehen konnten, ist sicher nicht jedem Zeitgenossen und Nachfolger verborgen geblieben. Aber die klassische Logik hielt keine Kriterien bereit, oberste Gattungsbegriffe und Prinzipien auf solche Widersprüchlichkeit zu überprüfen. Man konnte nur aus den Ableitungen und Folgerungen aus den Prinzipien erkennen, ob und daß sie widersprüchlich sind, und zwar, wenn sich eben Behauptung und Gegenbehauptung zugleich aus ihnen ableiten bzw. "beweisen" ließ. Das ist bei Verwendung von widersprüchlichen Prädikaten eo ipso der Fall. Deshalb sind Widerspruchsbeweise ("reductio ad absurdum") in der Regel zugleich Nachweis der Widersprüchlichkeit der Prädikatsbegriffe.

Man kann sagen, das Prüfungsprogramm läuft noch als Leibnizprogramm. Und es eröffnet weite Spielräume, gleichsam nur die eine Seite im Widersprüchlichen als Ausgang für Folgerungen zu nehmen und die andere wegzuerklären. Wer sich seither auf Leibniz beruft, kann noch immer die Konti nuität exhaurieren und das Diskrete als Scheinphänomen erklären oder umgekehrt. Er kann auch die Evolution als kontinuierliches Fließen und Strömen verstehen und dabei diskrete Stufen und Stillstände als undurchschauten Schein hinwegerklären, oder umgekehrt. Er kann auch mit den hilbertianischen "Formalisten" die mathematischen und logischen Gebilde für unanschauliche geistige Gebilde in einem autonomen Bereich halten oder umgekehrt mit den "Intuitionisten" für anschaulich konkrete psychische Vorstellungen. Das eine oder andere zu betreiben, hat selbst inzwischen zu Schulbildungen geführt, und das zwischen diesen Schulen Umstrittene sind gerade die Existenz- und Beweisbarkeitsbehauptungen des einen oder des gegensätzlichen anderen.

Der echte Leibnizianer und platonische Logiker - und damit der mathematische Logiker - aber betreibt beides zugleich, und nicht jeder macht sich das bewußt. Für ihn ist das Kontinuum diskret und das Diskrete kontinuierlich je nach Bedarf; das unendlich Kleine verschwindet ins Nichts, aber es ist zugleich ein Etwas; das unendlich Große ist das All, aber zugleich ein Eines und so wieder zugleich eine kleinere "Mächtigkeit" unter noch mächtigeren Mächtigkeiten (G. Cantor); die Menge ist eine Vielfalt von Elementen (in Euklids Zahldefinition) und bleibt zugleich Menge, wenn sie nur ein Element oder nur sich selbst als Element enthält, oder auch wenn sie gar kein Element enthält (leere Menge); mathematische Begriffe, Strukturen und Gebilde sind grundsätzlich unanschaulich, aber sie sind zugleich auch anschaulich durch "Erfüllungen", Interpretationen, Anwendungen und Modelle. Und kommt es zu diesen Anwendungen in der Physik, so kann es nicht wundern, daß diese widersprüchlichen Bestimmungen auch auf die physikalischen Phänomene übertragen werden. Dann ist die Zeit gleichzeitig-ungleichzeitig und der Ort im Raume zugleich bestimmt und relativ (Relativitätstheorie), das Teilchen zugleich Welle (Dualitätsprinzip), das Bewegungsquantum der Welle-Teilchen (zahlenmäßig Bemessenes) zugleich unbestimmbar (Heisenbergsche Unbestimmtheitsgröße der kanonisch-konjugierten Meßgrößen in der Mikrophysik), usw.

So zeigt auch die moderne Mathematik noch die Spuren der platonischen Dialektik in der kontradiktorischen Natur der meisten ihrer Begriffe, mit denen umzugehen zur Ausbildung des Mathematikers gehört. Und fügen wir hinzu: Dazu gehört auch die Anerziehung eines Bewußtseins, das sich gerade diese Widersprüchlichkeit hinter einem Schleier des "Unanschaulichen" und axiomatisch "Unbegründbaren" verbirgt. Umso auffälliger ist dann die dominierende Aufgabenstellung, der sich die moderne Mathematik verschrieben hat. Sie besteht darin, Existenzbeweise für mathematische Gebilde zu liefern. Und diese Beweise laufen grundsätzlich darauf hinaus, durch "Ableitung" (Deduktion) aus für widerspruchslos gehaltenen Axiomen die Widerspruchslosigkeit dieser Gebilde darzutun.

"Widerspruchslos" heißt hier nach Leibniz-Wolffschem Verständnis immer noch "Denkbarkeit" oder "logische Möglichkeit". Entsprechend nennt man das Widersprüchliche "undenkbar" oder "absurd" bzw. "logisch unmöglich". Nicht von ungefähr besteht daher das "Paradies" der mathematischen Gebilde, von dem Hilbert sprach, aus "möglichen Welten", in die man nur durch Denken eintreten kann.

Es ist allerdings noch nie ein Beweis geführt worden, daß das Widersprüchliche undenkbar und unmöglich sei. Ganz im Gegenteil. Von Nikolaus von Kues Gottesbegriff über Kants transzendentale Vernunftideen, Hegels "dialektische" Begriffe und nicht zuletzt die Marx-Engelssche "dialektische Logik" und "Natur- und Gesellschaftsdialektik" sind immer wieder Gründe beigebracht worden, den Widerspruch im Begriff zu denken und mit solchen Begriffen die Wirklichkeit selber in den Griff zu nehmen. Man mag die genannten Philosophen sämtlich für schlechte Logiker und die gesamte "dialektische" Denktradition, wie es üblich ist, für unlogisch, absurd, dunkel, mystisch, theologisch oder spekulativ halten. Man begibt sich dadurch aber des Mittels, die logische Natur dieser Contradictiones in terminis, die es ja in der klassischen Logik als anerkanntes Denkelement gibt, zu klären.

Wir gehen davon aus, daß man bei dieser Perhorreszierung des Widerspruchs im Begriff gleichsam den Wald vor lauter Bäumen nicht gesehen hat. Unsere Analysen bringen Gründe bei, gerade den aristotelischen Möglichkeitsbegriff und seine spätere logische Verwendung in Modal- und "mögliche Welten"-Logiken, also auch in den mathematischen Denkgebilden, als paradigmatische Gestalt der contradictio in terminis zu erkennen. Daher kann die Tatsache, daß sowohl die Logik als auch die Mathematik seit jeher mit "Möglichkeiten" umgeht, nur selbst ein Beweisargument dafür sein, daß der Widerspruch in Terminis zu den angestammten logischen und mathematischen Denkgebilden gehört. Weder kann er aus der Logik und Mathematik ausgeschlossen werden, noch besteht Anlaß, ihn wie den diabolischen Gottseibeiuns zu perhorreszieren. Es kommt vielmehr darauf an, ihn aufs genaueste von regulären Begriffen zu unterscheiden und seine Verwendung zu kontrollieren. Daß er sehr oft eine heuristische und kreative Funktion in den Wissenschaften übernimmt, dann aber oft im Fortgang von

Theoriebildung wieder eliminiert werden kann, gehört wohl zum eisernen Bestand des "tacid knowledge" (Polanyi) in allem Forschungs- und Entwicklungsbetrieb.

Auf solchen logischen Grundlagen können wir es jedenfalls nicht für erstaunlich und nicht einmal für bedrohlich für die Mathematik halten, daß bezüglich der "klassischen Mathematik" der Cantorschen Mengen- und Mächtigkeiten kein Widerspruchsfreiheitsbeweis gelingen konnte; daß Gödel die Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen grundsätzlich in Frage stellen konnte; daß in mathematischen Theorien immer wieder Paradoxien festgestellt und fast beliebig produziert werden können; daß die Semantiken der Sprachstufen im letzten Meta-Schritt immer wieder in der als vage und unklar ausgegebenen Objekt-Alltagssprache mit ihren "Intuitionen" begründet werden und somit im Zirkel laufen; daß man für mathematische Definitionen die vollständige Induktion in Anspruch nimmt - man schließt hier von "n auf n + 1" - während in der Arithmetik nur unvollständige Induktionen möglich sein können, da doch "n" entweder schon für "alle Zahlen" steht (und das "+ 1" deshalb keine Zahl wäre!) oder für jede beliebige einzelne Zahl (und dann kann eine hinzugeführte Zahleinheit nur beweisen, daß es "einige Zahlen" gibt).

Es wundert uns auch nicht, daß man in der Mathematik mit Gebilden zu tun hat, die "Begriffe" genannt werden, obwohl man ihre Intensionen und Extensionen nicht kennt oder gar voraussetzt, sie hätten keine solchen. Daß man Gleichungen "Aussagen" und manchmal sogar apriorische Urteile nennt, obwohl sie als logische Äquivalenzen allenfalls Definitionen sein können. Daß man ihnen Wahrheitswerte zulegt, obwohl Definitionen damit nichts zu tun haben können. Daß man durch Gleichungsdefinition sogar etwas zu Definierendes mit sich selbst gleichsetzt (was alles im Dunkeln läßt, was zu klären wäre). Daß man entsprechend Funktionsgleichungen als "Abbildungen" versteht, in denen sogar etwas in sich selbst abgebildet werden kann. Daß überhaupt das "Sich selbst Enthalten" - eine schon von den Stoikern aus der Logik ausgeschlossene Denkfigur - in der Mathematik eine der wichtigsten und am wenigsten problematisierte Denkfigur ist.

Diese und viele weitere mathematische Denkgewohnheiten sind auch in die mathematische Logik übernommen worden. Wir stehen nicht an zu behaupten, daß die mathematische Logik daher auch nichts anderes sein kann, als die perennierte platonische Dialektik auf aktuellem technischem Niveau. Um das zu zeigen, kann es nicht hilfreich sein, auf diesem technischen Niveau neue Widerspruchsbeweise zu führen, denn sie sind in der Mathematik ohnehin Legion. Wohl aber mag die alte philosophische Methode hilfreich sein, den Ursprung dieses dialektischen Denkstils ins Licht zu setzen. Dafür haben wir Euklid ein sonst in logischen Schriften nicht vorkommendes Kapitel gewidmet.

Für den Philosophen ist es nicht überraschend, auch in modernen wissenschaftlichen Theorien noch die ältesten Ideen der Vorsokratiker exhauriert zu finden. Wer moderne Physik studiert, tut immer noch gut daran, von Demokrits Auffassung vom Leeren des Raums und vom Vollen der Atome Notiz zu nehmen, daneben aber auch von Aristoteles' These, daß die Materie so "dicht" liege, daß es keinen leeren Raum, sondern nur Örter (Topoi) geben könne. Und eine geringe Befassung mit der stoischen Lehre vom Universaldeterminismus und der Naturgesetzlichkeit und mit der epikureischen Lehre vom Indeterminismus und der "Freiheit" bzw. Chaotik der Natur wird ihn darauf bringen, daß diese Grundanschauungen auch in der neuesten Physik noch kontrovers sind und sich keineswegs modernen Einsichten in die "innersten Eingeweide" des Mikrokosmos oder in die Geometrie des Makrokosmos verdanken. Und das sollte auch für die Mathematik gelten.

Wer Mathematik - und mathematische Logik - studiert, der sollte aus Platons Ideenlehre gelernt haben, daß alles, was er an Zeichen, Symbolen, Ziffern, geometrischen Figuren sieht, nicht das ist, was er denken soll. Und zugleich sollte er sich damit vertraut machen, daß er nur denken kann, was er schon gesehen hat. Das ist der Einstieg in die ihm im Studium zugemutete Dialektik. Bei Euklid kann er es ausführlicher üben, wozu wir eine gewisse Hilfestellung leisten wollten. Daß Euklids Mathematik die arithmetischen Gebilde durch geometrische "veranschaulicht", das hat noch jede Mathematikdidaktik übernommen. Um aber zur modernen Analysis hinaufzusteigen, muß der Adept nach den geometrischen Übungen diese handgreifliche "Leiter wegwerfen" und die Geometrie selber von der Analysis her denken.

II. Die logischen Elemente

Logische Elemente nennen wir die logisch formalisierbaren Bestandteile des logischen Prozedere. Solche sind: Intensionen, Extensionen, Begriffe, Junktoren, Ausdrücke, Urteile, Schlüsse und Axiome. Fast alle diese Elemente bauen auf dem jeweils vorangehenden auf und lassen sich als eine Komplexgestalt aus ihnen erklären.

1. Intensionen

Sie werden üblicherweise in der Logik nur im Zusammenhang mit Begriffen behandelt. Ersichtlich sind sie Teil des Begriffs. Sie werden traditioneller Weise auch Merkmale des Begriffs genannt (lateinisch: nota). Als selbständige Elemente verdienen sie aber auch in der Logik behandelt zu werden. Sie sind das, was in modernem psychologischen Verständnis "Idee" genannt wird. Gemeint ist damit dasjenige, was man sich vorstellt, wenn man ein Wort hört oder liest. Durch Wörter der Sprache werden in der Regel nicht Begriffe, sondern nur Intensionen bezeichnet. Kennzeichnend dafür ist das Fehlen der Extension.

Intensionen bzw. Ideen werden in sprachlichen Wortfeldern gesammelt und geordnet. Aber Wortfelder weisen keine logische Ordnung auf. Wortfelder logisch zu ordnen, würde sie durch Zuordnung von Extensionen in Begriffspyramiden überführen. "Pferd, Gaul, Mähre" usw. bilden ein Wortfeld. Verschiedene Wörter (man kann auch Wörter anderer Sprachen hinzunehmen) bezeichnen grosso modo dieselbe Idee. Warum es für dieselbe Idee so verschiedene Wörter gibt, wird in der Sprachwissenschaft aus der Geschichte des jeweils herrschenden Gebrauchs, aus den ständischen Ausdrucksweisen, aus Soziolekten und Dialekten erklärt. Auch die logische und allgemein wissenschaftliche Terminologie kann solchen sprachwissenschaftlichen Gesichtspunkten unterworfen werden, denn wissenschaftliche Terminologien sind in erster Linie Teil des Bildungswortschatzes.

Manche logischen Systeme werden als *"intensionale Logiken"* bezeichnet. Das unterstellt, daß es dergleichen überhaupt geben könne, und zwar, wenn man die Extensionen der Begriffe in einem solchen Logiksystem nicht berücksichtige. Soweit es sich dabei tatsächlich um Logik handeln soll, ist das unmöglich. Man braucht dafür nur darauf zu achten, in welcher Weise die Extensionen in den sogenannten intensionalen Logiken in dissimulierter Gestalt dennoch mitbeachtet werden. Ist auch dies nicht der Fall, so kann es sich nur um Sprachwissenschaft, keineswegs aber um Logik handeln. Darauf zu achten ist schon deswegen empfehlenswert, weil es ja eine modische Tendenz zur Vermischung von Logik und Sprachwissenschaft gibt, die u. E. für beide Disziplinen schädlich ist.

Die Intensionen bzw. Ideen werden auch in der Logik gewöhnlich durch sprachliche Wörter, Termini bezeichnet. Ein Terminus bezeichnet, was man sich dabei vorzustellen hat. Viel häufiger und entscheidender sind aber die Fälle, in denen Intensionen (Merkmale) als Bestandteile von Begriffen nicht durch Termini bezeichnet werden. Die klassische Logik kennt dafür die Faustregel, daß die Termini als Begriffsbezeichnungen gewöhnlich nach den sogenannten spezifischen Differenzen eines Begriffs, die ja selber Intensionen sind, gewählt werden. Das bedeutet jedoch, daß sie die sogenannten generischen Merkmale, die ebenfalls zu einem Begriff gehören, nicht mitbezeichnen. Man muß sich diese hinzudenken bzw. man muß sie (auf Grund des Fachwissens) kennen, um einen Begriff richtig und vollständig hinsichtlich seiner tatsächlichen Merkmale zu verstehen. Man kann sagen, daß vielerlei, was in der Logik sehr aufwendig betrieben wird, eben darin besteht, implizite Intensionen in Begriffen durch logische Operationen explizit zu machen, d. h. sie aufzudecken und offenzulegen.

An der Verdeckung der Intensionen haben auch die üblichen Formalismen der Logik ihren Anteil. Seit Aristoteles werden ganze Begriffe durch Großbuchstaben (oder Zahlzeichen) formal bezeichnet. Aus den Buchstaben kann man nicht ersehen, welche Intensionen in einem dadurch bezeichneten Begriff vereinigt sind. Daher bedürfen sie in der Regel einer sogenannten *Definition*. Die Definition ist darauf abgestellt, die Intensionen bzw. Merkmale offenzulegen. Insbesondere gilt das von der klassischen aristotelischen Definition. Diese erfordert die explizite Angabe der nächsthöheren Gattung zu einem Begriff und der spezifischen Differenz des Begriffes selber. Durch den nächsthöheren Begriff werden zwar sogenannte generische Merkmale bezeichnet, aber dies geschieht wiederum in der Weise, daß dadurch nur die spezifischen Differenzen (also einige Merkmale) des höheren Begriffs offengelegt werden, die in allen unter die Gattung fallenden Art- und Unterartbegriffen enthalten sein müssen. Keineswegs wird durch die nächsthöhere Gattung auch mitbezeichnet, welche weiteren Merkmale in ihr selbst als generische Merkmale noch höherer Gattungen enthalten sein müssen. Daher kann die klassische Definition eines Begriffs nach "Genus proximum und differentia specifica" keineswegs für die Offenlegung *aller* Intensionen eines Begriffs genügen.

Die von uns entwickelte pyramidale Notation vermeidet diese Mängel, indem sie die Intensionen bzw. Merkmale der Begriffe vollständig, selbständig und einzeln durch Großbuchstaben bezeichnet. Dadurch macht sie auch die gängigen Definitionen überflüssig. Die vollständige (intensionale) Definition der Begriffe ist zusammen mit der extensionalen gewissermaßen in die Notation eingebaut.

Notation von Intensionen bzw. Merkmalen und Merkmalsgruppen:

A, B, C ...   AB, AC, AD ...   ABC, ABD, ABE ...   ABCD, ABCE, ABCF ....(usw.)

Die Abfolge der Merkmale in Merkmalsgruppen von links nach rechts ergibt sich aus der Hierarchie höherer Gattungen zu demjenigen Begriff, in welchem die Merkmalsgruppe auftaucht. A bezeichnet im vorliegenden Beispiel das Merkmal einer Gattung, AB die Merkmale einer zur Gattung gehörenden Art, ABC die Merkmale einer zur Gattung und zur Art gehörenden Unterart und ABCD die Merkmale einer Unter-unter-Art bzw. eines Individuums.

2. Extensionen

Extensionen bilden zusammen mit Intensionen vollständige Begriffe. Die Extension (lat.: Ausdehnung) ist der Tatsachenbereich, an dessen Einzelheiten etwas Gemeinsames als Intension aufgespürt und festgehalten werden kann. Üblicherweise heißt dieser Bereich Umfang des Begriffs oder einfach Begriffsumfang.

Anders als die rein terminologisch durch sprachliche Wörter zu bezeichnenden Intensionen lassen sich Begriffsumfänge nicht selbständig erfassen und bezeichnen. Sie können nur durch vollständige Begriffe bzw. anhand solcher Begriffe bezeichnet werden. Das gilt auch für die sogenannten Eigennamen bzw. Kennzeichnungen individueller Personen oder Gegenstände, die grundsätzlich als unterste Begriffspositionen eingezeichnet werden Das bringt zum Ausdruck, daß sie sich nur auf "einen" Gegenstand beziehen. Die Extension wird durch eine gemeinsame Intension (das Gemeinsam-Identische als Merkmal) der Tatsachen des Bereichs bestimmt. Auf diese gemeinsame Intension wird auch in dem Falle zurückgegriffen, daß eine Extension durch Aufzählung der Tatsachen ("Instanzen"), die in einen Bereich fallen, beschrieben wird. Denn die Zugehörigkeit bestimmt sich auch in diesem Falle der Aufzählung von Arten oder Individuen nach den allen gemeinsamen Merkmalen, die man zuvor festgelegt hat oder kennen muß (vgl. dazu später: Induktion).

Im Verhältnis von Intensionen und Extensionen zueinander gilt die Regel der umgekehrten Proportionalität: Je allgemeiner der Begriff, desto größer bzw. weiter sein Umfang und desto geringer die Zahl seiner Merkmale bzw. Intensionen. Je "konkreter" bzw. weniger allgemein der Begriff, desto geringer sein Umfang und desto größer die Zahl seiner Merkmale. Dies wird in der Pyramide ohne weiteres sichtbar. Für den logischen Umgang mit Individuen ist die scholastische "ontologische" Erkenntnis, daß die Zahl der Merkmale eines Individuums "unendlich groß" sei (daher: Individuum est ineffabile!), unerheblich. Auch Individuen sind durch eine einzige spezifische Differenz zu kennzeichnen, während sie alle anderen Merkmale mit anderen Individuen als "generische Merkmale" ihrer Art gemeinsam besitzen.

Eine gewisse Verselbständigung der Extensionen hat sich bei den Klassifikationen ergeben, sofern bei der Klassenbildung kein Wert auf intensionale Gemeinsamkeiten der klassifizierten Instanzen gelegt wird, die Klassenbildung also gleichsam willkürlich gehandhabt wird. Das ist gewöhnlich bei der Disposition des Inhalts von Büchern der Fall. Buch, Teile, Kapitel, Abschnitte, Paragraphen usw. bilden gewöhnlich eine Klassifikation in der Gestalt eines Stammes und seiner Verzweigungen, ohne daß man daraus auf Gemeinsames in den Teilen der Materie schließen kann. Gelegentlich wird man aber auch bei Klassifikationen oder Klassifikationssystemen (und bei guten wissenschaftlichen Büchern) den Stoff nach intensionalen Gesichtspunkten anordnen.

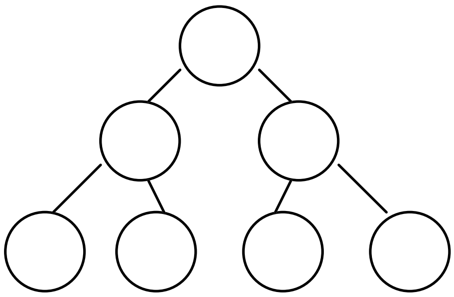
Gleichwohl spricht man von sogenannten *extensionalen Logiksystemen.* Dies unterstellt, daß die Logik sich auch unter Absehen von Intensionen allein auf der Grundlage von Extensionen betreiben ließe. Auch dies ist wie im Falle rein intensionaler Logiksysteme grundsätzlich falsch und irreführend. Was dazu Anlaß gegeben hat, war und ist die Meinung vieler Mathematiker, Zahlen und Mengen ließen sich als reine Extensionen (ohne Intensionen) verstehen. Man braucht aber auch in der gewöhnlich als extensionaler Logiktyp verstandenen "mathematischen Logik" nur darauf zu achten, in welcher Weise faktische Begriffsintensionen zur Bestimmung der Extensionen benutzt aber dissimuliert werden, um auch hier zu erkennen, daß rein "extensionale Logiksysteme" unmöglich sind. Wir wollen an dieser Stelle nur sagen, ohne es weiter zu begründen, daß in der sogenannten extensionalen Logik dieselben Termini (z. B. "Menge", "Einheit") sowohl für Intensionen als auch für Extensionen in Anspruch genommen werden, ohne daß leicht durchschaubar wäre, wann das eine und wann das andere der Fall ist. Nichtunterscheidung und erst recht absichtliche Nichtunterscheidbarkeit führt dabei in aller Regel zu Widersprüchen, die bekanntlich in der "logischen Grundlegung" der Mathematik zahlreich auftreten.

Auch die Extensionen, die jeweils zu Begriffen gehören, lassen sich formal darstellen und durch gewisse logische Termini bezeichnen. Schon Porphyrios hat in seiner Einleitung zum aristotelischen Organon die Umfänge von Begriffen als "Begriffsbäume" sprachlich beschrieben (nicht aber gezeichnet), und Zeichnungen solcher "porphyrianischen Bäume" sind in der Scholastik oft den logischen Traktaten beigefügt worden. Sie stellen eine höchste Gattung als Stamm dar, von dem die zugehörigen Artbegriffe als Äste ausgehen, von denen ihrerseits die Unterarten Zweige bilden. Gelegentlich sind Individuen als Früchte an den Astenden beigefügt. Diese Bäume sind vor allem durch Raymundus Lullus zur Darstellung der Fachbegriffe aller Disziplinen benutzt worden und haben sich dadurch noch mehr zur Veranschaulichung verbreitet.

Das 17. Jahrhundert hat diese porphyrianischen Bäume gewissermaßen auf den Kopf gestellt und dadurch die Umfangsverhältnisse der Begriffe in eine Pyramide eingezeichnet. Die höchste Gattung steht dann oben, und Arten und Unterarten sowie ggf. Individuen sind in Schichten von oben nach unten angeordnet. Man spricht seither auch in der Logik von "Begriffspyramiden". Sie sind durchweg Klassifikationssysteme.

Auch die von uns entwickelte logische Notation benutzt die Graphik der Begriffspyramide zur Darstellung der Umfangsverhältnisse von Begriffen. Da man aber in der Logik an Notationen in der Form von geschriebenen Buchstaben- und Zeichenfolgen - gleichsam als Stenographien - gewöhnt ist, bedarf der Umgang mit dieser graphischen Notation, die zudem mit Buchstaben (für Intensionen) ergänzt wird, einer gewissen Umgewöhnung. Sie wird allerdings demjenigen leichter verständlich und handhabbar, der mit den sogenannten Eulerschen Kreisen (vgl. dazu F. Ueberweg, System der Logik und Geschichte der logischen Lehren, 2. Aufl. Bonn 1865, S. 216 ff.) und Vennschen Diagrammen (vgl. J. Venn, Symbolic Logic, London 1881) vertraut ist, die auch sonst in der Logik hilfsweise zur Veranschaulichung von Begriffsverhältnissen benutzt werden. Erst recht bedarf es aber einer gewissen Um- und Eingewöhnung, wenn zusätzlich noch gewisse Teile der pyramidalen Graphik als Zeichen für logische Junktoren benutzt werden, so daß sie als Junktoren "lesbar" werden. Dies ist bei den Eulerschen Kreisen und Vennschen Diagrammen nicht der Fall.

Pyramidale Notation der Extensionen bzw. Begriffsumfänge in Abhängigkeit von Begriffspositionen:



Genusposition: Umfang wird durch alle unteren Begriffspositionen beschrieben

Artpositionen: Umfänge werden durch die damit verbundenen Unterartpositionen beschrieben

Unterartpositionen (ggf. Individuenpositionen): Umfänge durch weitere Unter-Unterartpositionen beschreibbar

Als Termini für die Bezeichnung der Extensionen dienen die sogenannten Quantoren "ein", "einige", "alle" und "kein". Sie werden gewöhnlich als Junktoren behandelt und unter diesen aufgeführt. Wie schon in der Pyramidenlegende angedeutet, behandeln wir sie als Bezeichnungen von bestimmten Teilen der Pyramidengraphik. "*Alle*" bedeutet im Ausgang von einer Gattungsposition sämtliche in ihren Umfang fallenden unteren Positionen. "*Einige*" bedeutet im Ausgang von einer Gattungsposition (zweideutig unbestimmt) eine der beiden (oder ggf. von mehreren) Artpositionen einer Gattung. Gelegentlich kann es auch beliebig viele (aber nicht alle) Unterartpositionen der Gattung bedeuten. "*Ein*" bedeutet (unbestimmt mehrdeutig) eine der Unterartpositionen (bzw. der Individuenpositionen) der Gattung. "*Kein*" (logisch gleichbedeutend mit "nicht ein") bedeutet die Negation aller (einzelnen) Positionen unter einer Gattung.

Man beachte, daß somit "einige" (sog. Partikularisator) und "ein" (sog. Individualisator) mehrdeutige Junktoren sind. Später wird das auch von der unbestimmten Negation und der allgemeinen Implikation zu zeigen sein. Es ist ein traditionelles Fehlurteil der Logiker zu meinen, in der Logik sei alles klar, deutlich und eindeutig auszudrücken. Die Beispiele zeigen, daß auch in der Logik (wie in der Sprache) mehrdeutig und unklar formuliert werden kann. Dies ist geradezu die Bedingung dafür, daß in vielen logischen Operationen nicht mehr als die Klärung des Unklaren betrieben wird. Wir werden es genauer bei den aristotelischen Syllogismen zeigen, bei denen einige Modi nur dazu dienen, eine extensional nur angedeutete Begriffsposition intensional zu definieren und dadurch festzulegen.

Neben der logischen Quantifikation stellt die *mathematische oder metrische Quantifikation* eine differenziertere Beschreibung der Extensionen bestimmter Begriffe dar. Sie findet traditioneller Weise in der Physik Anwendung und wird mehr und mehr auch auf andere "quantifizierende" Disziplinen ausgeweitet. In der metrischen Quantifikation wird ausschließlich der logische Partikularisator ("einige") durch Zahlangaben im Bereich "größer als 1 bis kleiner als Unendlich" gespreizt. Diese Zahlangaben für quantitative Eigenschaften von Begriffen ("Maßangaben") können als Präzisierungen des logischen Partikularisators angesehen werden. Die logischen Quantoren "ein" und "alle" bleiben auch bei metrischen Quantifikationen erhalten. Sie bilden gewissermaßen die Endmarkierungen von Maßangaben. D. h. die logische Einheit ist zugleich auch die metrische Einheit; das logische "alle" ist zugleich dasjenige, was in der Mathematik als "Unendlich" (d. h. nicht in Zahlangaben zu Präzisierendes) angenommen wird. Ebenso bleibt das logische "kein" als metrische Nullangabe erhalten. Es sei hier nur angedeutet, daß sich auf dieser Grundlage eine effektive logische Grundlegung der Arithmetik ergibt (vgl. dazu meine Logik, Aalen 1987, S. 133 ff. und die späteren Ausführungen über den Zahlbegriff).

3. Begriff

a. Die reguläre logische Begriffsstruktur

Begriffe sind komplexe Einheiten von Intensionen (Merkmalen) und Extensionen (Umfängen). In der Geschichte der Logik hat man fast ausschließlich den Aspekt der Einheit der Begriffe betont. Daher werden sie seit Aristoteles durch einzelne Buchstaben (die auch als Zahlzeichen galten) formal dargestellt. Diese Formalisierung verdeckt ihren Aufbau aus Intensionen und Extensionen, die die Grundelemente der Begriffe darstellen. Definitionen, Urteilsbildung, Schlußbildung, insbesondere Analyse und Synthese von Begriffen, sind daher vor allem als logische Mittel entwickelt worden - und haben sich als unentbehrlich erwiesen - ihre Zusammensetzung aus Intensionen und Extensionen zu prüfen und explizit zu machen.

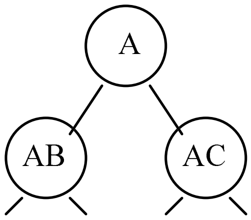
Was Descartes die "Klarheit und Deutlichkeit der Begriffe" nannte, meint eben die Offenlegung der Extension (Klarheit) und der Intension(en) (Deutlichkeit) der Begriffe. Ebenso setzt die von Kant in Gang gesetzte Diskussion um analytische und synthetische Urteile voraus, daß (einzelne) Intensionen von Subjekts-Begriffen entweder im Prädikat offengelegt (was durch analytische Urteile geschehen soll) oder daß sie einem Subjektsbegriff hinzugefügt werden können (was durch synthetische Urteile geschehen soll). Diese bis heute unabgeschlossene Debatte leidet durchweg daran, daß man gemäß der Auffassung von der Einheit der Begriffe nicht in der Lage ist, Intensionen als Grundeinheiten zu behandeln. In der Tat werden sie bisher logisch als selbständige Begriffe (z. B. als Prädikatsbegriffe in Urteilen) behandelt. Und das hat zur logischen Folge, daß man solchen "Prädikaten" auch eine Extension beilegen muß (die man dann gleichsam mit Lupe und Fernrohr in "möglichen Welten" sucht).

Es dürfte auf der Hand liegen, daß sich die Logik anders als die bisherige gestaltet, wenn man die Begriffe nicht als einheitliche Grundelemente behandelt, sondern auf ihre Bausteine Intension und Extension zurückgeht. Es rückt dann der Gesichtspunkt ihrer Komplexität in den Vordergrund, der sich aus der Vereinigung von Intensionen und Extensionen in den Begriffen ergibt. Erst recht stellt sich das Problem der Grundbegriffe bzw. der sogenannten axiomatischen Begriffe oder Kategorien, die gewöhnlich nur ein einziges Merkmal als Intension besitzen, dies aber auch besitzen müssen, in neuem Licht dar.

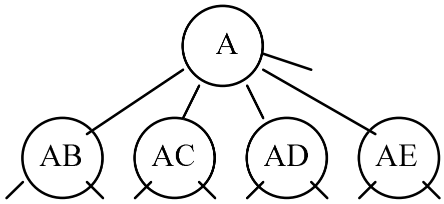
Dazu bedarf es einer Formalisierung, die auf diese eigentlichen Grundelemente abstellt, für sie eigene logische Symbole bereithält und somit die Begriffe hinsichtlich ihres Aufbaus und ihres Zusammenhanges untereinander durch geeignete symbolische Formen darstellt. Genau dies leistet die hier entwickelte pyramidale Notation. Wie die Formalisierung der Intensionen und Extensionen aussieht, wurde in den beiden vorangehenden Kapiteln gezeigt. Für die Begriffslehre sind die Intensionen- und Extensionennotationen zu einem Standardgraphismus für die Begriffsnotation zusammenzuführen. Halten wir nochmals fest: Es wird dadurch nicht mehr ein "einheitlicher Begriff" symbolisiert, sondern eine Begriffsstruktur, in welcher "Begriffspositionen" als Statthalter für inhaltliche Beispielsbegriffe ausgezeichnet werden.

Der Standardgraphismus für die einfachste Begriffsstruktur berücksichtigt das Verhältnis des Allgemeinen zum Besonderen, wie es sich im Verhältnis von Gattung und zugehörigen Arten zeigt. Die Gattungsposition steht mit eingeschriebener Intension "A" an der Pyramidenspitze. Die Extension der Gattung wird durch die zwei Artpositionen dargestellt, in die als "generisches Merkmal" die Intension "A" (der Gattung) und als "spezifische Differenzen" die unterschiedlichen Merkmale "B" bei der einen Art und "C" bei der anderen Art eingeschrieben werden. Die Standardfigur kann mutatis mutandis beliebig oft nach unten an die Artpositionen iterierend angeschlossen werden. Dabei ist jeweils der gesamte Intensionenbestand der oberen Begriffsposition als generische Merkmale in die unteren aufzunehmen und durch zusätzliche spezifische Differenzen zu ergänzen. Bei zwei Artpositionen handelt es sich um die (schon von Platon ausgearbeitete) dihäretische bzw. dichotomische Begriffsstruktur. Vermehrt man die Artpositionen unter der Gattung, so sprechen wir von multipler Begriffsstruktur.

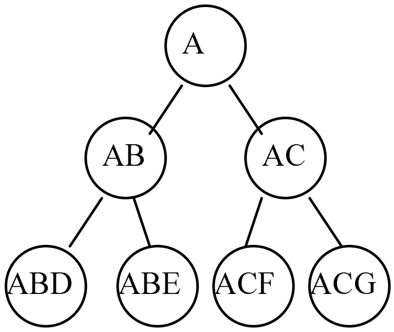
Standardgraphismus für die dihäretische bzw. dichotomische Begriffsstruktur:

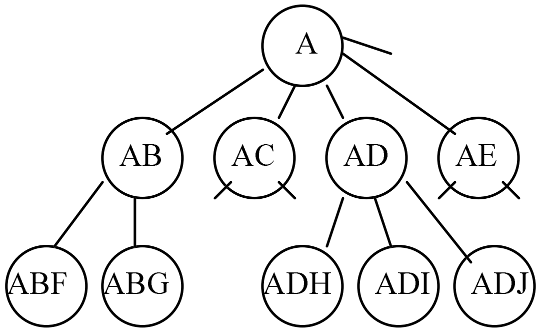


Multiple Begriffsstruktur:



Ausbau der Begriffsstruktur für Unterarten bzw. Individuen:





Hat man sich mit diesem Graphismus des pyramidalen Formalismus genügend vertraut genmacht, so kann man in der extensionalen Figur anstelle der formalen Intensionen auch die Termini für Beispielsbegriffe einschreiben. Dadurch wird die pyramidale Formalisierung "semi-formal". Die semiformale Darstellung erlaubt unmittelbar die Darstellung inhaltlicher Begriffspyramiden, wie sie schon in der scholastischen Logik üblich war. Wir werden im folgen auch davon öfter Gebrauch machen.

b. Negative Begriffe

Negative Begriffe sind in der Umgangssprache sehr verbreitet, wie z. B. "Nicht-Raucher", "Nicht-Schwimmer", "Nicht-Fachmann" aber auch "Nichts" als Gegensatz zum "Sein". Ersichtlich ergeben sie sich aus der Negation positiver Begriffe und sind daher nicht ohne Kenntnis des jeweiligen Positivums zu verstehen. Aber diese Kenntnis genügt offensichtlich nicht. Was aber darüber hinaus gewußt und verstanden sein muß, um einem negativen Begriff Sinn und Bedeutung beizulegen, macht den Gegenstand höchst spekulativer Theorien über das Nichts, den Unsinn und die Grenzen der Vorstellbarkeit aus. Wir schlagen eine simple Lösung der damit verbundenen Probleme vor.

Die Negation ist ein später genauer zu betrachtender Junktor. Seine Verknüpfung mit einem positiven Begriff macht die Verbindung zu einem logischen Ausdruck, der in der pyramidalen Formalisierung darstellbar sein muß. Den "logischen Ausdrücken", die in der Logik bisher nicht als eigene logische Elemente gewürdigt worden sind, wollen wir uns später zuwenden. Da aber negative Begriffe gewöhnlich in der Begriffslehre abgehandelt werden, wollen wir schon hier darauf eingehen.

Negative Begriffe können klar und deutlich oder auch unklar und undeutlich sein, je nachdem, ob zu ihrer Bildung die bestimmte oder die unbestimmte Negation als Junktor benutzt wird. Die bestimmte Negation verknüpft grundsätzlich dihäretische Artbegriffe (sie spielt nur in einer vollständigen Disjunktion von Artbegriffen einer Gattung!). Eine in bestimmter Negation negierte Artposition ist nichts anderes als ein Ausdruck für die jeweils andere Artposition und daher eine äquivalente Bezeichnung für diese. Lassen sich die Tageszeiten in "Tag" und "Nacht" einteilen, so bedeutet "Nicht-Tag" nichts anderes als Nacht, und umgekehrt. Ebenso bei den Geschlechtern: Mit "Nicht-Mann" kann man dann nur eine Frau meinen, und mit "Nicht-Frau" nur einen Mann. In der pyramidalen Notation liest man entsprechend "Nicht-AB" als äquivalenten Ausdruck für "AC", und entsprechend "Nicht AC" als äquivalenten Ausdruck für "AB". Das Beispiel zeigt, daß die bestimmte Negation umkehrbar angewandt werden kann. Deshalb führt die doppelte bestimmte Negation - aber nur diese, nicht die unbestimmte Negation - zum positiven Begriff zurück.

Bei der vollständigen Disjunktion der beteiligten Artbegriffe wird eine gemeinsame Gattung vorausgesetzt. Man bemerke, daß in der bestimmten Negation das aus der gemeinsamen Gattung stammende generische Merkmal (hier "A") nicht mitnegiert wird. Die vollständige Negation bezieht sich also nur auf die spezifischen Differenzen (hier "B" und "C"), was später zu betrachtende Folgen für die Bildung widersprüchlicher Begriffe hat. Spricht man umgangssprachlich vom "Nicht-Raucher", so wird dabei (stillschweigend) vorausgesetzt, daß die "Raucher" und die "Nichtraucher" gemeinsam Menschen sind und also "Mensch" die gemeinsame Gattung darstellt. Es ist an diesem Beispiel weiter zu bemerken, daß dieser Typ des negativen Begriffs nicht unbedingt eine eigene positive Bezeichnung besitzen muß (wie im Falle von Mann und Frau). Die "Nicht-Raucher" sind durch den negativen Begriff genau und vollständig als "Rest der Menschheit" neben den Rauchern bezeichnet, wie auch immer man diesen Rest auch in positiven Artbegriffen weiter charakterisieren könnte. Daraus dürfte erhellen, daß die (bestimmten) negativen Begriffe eine durchaus wichtige und gar unentbehrliche logische Funktion besitzen. Sie bezeichnen oft Begriffe, für die man (noch) keine positiven Termini zur Verfügung hat.

Unklare und undeutliche negative Begriffe werden mit der unbestimmten Negation gebildet. Diese verknüpft beliebige Begriffspositionen im Querverhältnis, insbesondere aber multiple Artbegriffe. Nehmen wir die Farben, die eine multiple Artenreihe bilden, als Beispiel. "Nicht-Rot" bezeichnet undeutlich jede andere Farbe als Rot. Daher kann durch den Ausdruck keine bestimmte andere Farbe bezeichnet werden, sondern nur alle anderen zusammengenommen. Und aus gleichem Grunde ist die unbestimmte Negation auch nicht umkehrbar. Eine doppelte unbestimmte Negation führt zu jeder beliebigen Position der multiplen Arten: "Nicht-Nichtrot" kann zwar auch "Rot" bedeuten, aber ebenso auch "Gelb" oder "Grün" usw. Diese Funktion der unbestimmten Negation wurde bisher in der Logik nicht beachtet. Wird sie mit der bestimmten Negation verwechselt, so macht sie ggf. die Argumentation mittels einer doppelten Negation falsch.

Über die multiplen Nebenarten hinaus verknüpft die unbestimmte Negation auch mit allen quer zur Ausgangsposition stehenden Begriffspositionen. "Nicht-Tier" kann zwar "Pflanze" bedeuten (dann hat man die Negation als bestimmte zwischen "Tier" und "Pflanze" als vollständig disjunktiven Arten angewandt), aber es kann darüber hinaus "unbestimmt" auch Steine oder andere unbelebte Gegenstände bedeuten.

Was bei den negativen Begriffen bzw. Ausdrücken logisch wichtig ist, das ist, daß sie keineswegs über die Strukturen der wohldefinierten Begriffe hinausgehen, sondern nur als deutliche äquivalente oder undeutliche Ausdrücke für positive Begriffspositionen stehen könnten, und dies auch in dem Falle, daß bei der Anwendung auf Beispiele keine positiven Termini zur Verfügung stehen.

c. Der widersprüchliche Begriff (contradictio in adiecto bzw. contradictio in terminis)

Ein Widerspruch ist eigentlich eine Einrede gegen eine Behauptung, also die Bestreitung einer Behauptung. So auch noch im heutigen Gerichtsgebrauch. Offenbar zielt auch Aristoteles auf den Gerichtsgebrauch ab, wenn er bei Behandlung des Widerspruchs sagt, man *könne* oder *solle* nicht zugleich und in gleicher Hinsicht über denselben Gegenstand etwas behaupten und bestreiten. Was bei Gerichte unzulässig war und ist, war aber schon zu seiner Zeit eine Pflichtübung der Rhetoren (wie man noch später bei Karneades sieht). Wenn eine Partei vor Gericht widersprüchlich argumentiert, wird sie unglaubwürdig. Wenn ein Philosoph seine eigene Einsicht in Widersprüchen vorträgt, zweifelt man gewöhnlich an seiner Kompetenz. Trägt er aber seine eigene Meinung und referierend die Gegenmeinung anderer vor, so ist das Ausweis von Kompetenz und Umsicht (wie man an der scholastischen sogenann ten Sic-et-Non-Methode sieht). Daß Widersprüche in diesem Sinne nur in gegensätzlichen Behauptungen auftreten können, liegt auf der Hand. Ebenso, daß sie nur bestehen, wenn sie hinsichtlich ihrer Wahrheit geprüft werden können. Es muß sich dann die eine Behauptung als wahr, die Gegenbehauptung als falsch erweisen lassen.

Die Vereinigung der getrennten Behauptung und Bestreitung, von denen die eine als wahr, die andere als falsch vorausgesetzt wurde, zum sogenannten Urteils- bzw. Satzwiderspruch hat in der Logik zu einem neuen Urteilstyp geführt, eben dem sogenannten widersprüchlichen Urteil. Aber dies hat nichts daran geändert, daß das widersprüchliche Urteil einen wahren und einen falschen Bestandteil in sich vereinigt. Man rechnet damit, daß der Urteilswiderpsruch auch klugen und umsichtigen Leuten unvermerkt unterläuft. Kritik an wissenschaftlichen Äußerungen wurde daher in erster Linie Fahnung nach unbemerkten Widersprüchen.

Man sollte erwarten, daß aufgedeckte Widersprüche in Argumentationen, Abhandlungen und Reden dazu führen, daß festgestellt wird, welche Argumente oder Teile von Abhandlungen und Reden wahr sind und welche falsch sind. Und das wäre auch heute noch empfehlenswert. Es hat sich aber in der Logik der Gebrauch herausgebildet, die vermutete Inkompetenz oder Unglaubwürdigkeit eines in Widersprüchen argumentierenden Wissenschaftlers auf alle seine Äußerungen zu beziehen, d. h. seine "Sprüche" und seine "Widersprüche" gemeinsam für falsch anzusehen (gewissermaßen nach der Devise: Wer einmal lügt, dem glaubt man nicht, auch wenn er dann die Wahrheit spricht!). Das ist so, als ob ein Widerspruch im Detail wie eine Infektion einen ganzen Organismus von Argumentationen "krank" mache. Und daraus folgt dann, daß man die "gesunden", sprich wahren Teile einer Argumentation ebenfalls für falsch hält. Und in der Tat hat sich daraus das logische Dogma ergeben, widersprüchliche Urteile seien schlechthin falsch. Man kann kaum abschätzen, wieviel wahre Einsichten durch diesen logischen Usus als falsch verworfen und aus der Wissenschaft entfernt worden sind.

Daß Widersprüche so oft unbemerkt unterlaufen, liegt wesentlich an bestimmten Begriffen, die in widersprüchlichen Urteilen benutzt werden. Man hat von daher die Eigenschaft der Widersprüchlichkeit auch auf Begriffe übertragen und spricht daher von "widersprüchlichen Begriffen" (contradictio in terminis bzw. in adiecto).

Die Übertragung verführt nun leicht dazu, die Wahrheits- und Falschheitsfrage auch auf Begriffe zu beziehen und von wahren oder falschen Begriffen zu reden. Zugleich weiß man natürlich seit Aristoteles, daß Begriffe als als solche nicht wahr oder falsch sein können, sondern erst in Urteilen diese wahr und falsch machen. Es kann nur darum gehen, ob ein vermeintlicher Begriff überhaupt ein Begriff ist oder nicht. Gleichwohl setzt man mit Recht voraus, daß es widersprüchliche Begriffe gibt. Wenn sie nicht geradezu für falsch gehalten werden, so flüchten sich die "Intensionallogiker" gewöhnlich in die These, sie seien "sinn- und bedeutungslos", die Extensionallogiker aber in die These, sie hätten eine "Null-Extension, d. h. ihnen entspräche nichts in der Wirklichkeit. Dazu aber kann nur festgestellt werden: "Begriffe" ohne Intension (Sinn und Bedeutung) sind keine Begriffe, sondern allenfalls reine Extensionen (falls man davon überhaupt reden kann). Und "Begriffe" ohne Extension (Null-Extension) sind ebenfalls keine Begriffe, sondern allenfalls reine Intensionen (Ideen).

Es besteht also Bedarf, die Struktur der widersprüchlichen Begriffe aufzudecken. Das heißt in erster Linie zu zeigen, wie es mit ihren Intensionen und Extensionen steht, dann aber auch nachzuweisen, daß sie als solche mit der Wahrheitsfrage nichts zu tun haben, und sie schließlich für eine effektive logische Handhabbarkeit verfügbar zu machen. Letzteres nennen wir ihren *dialektischen* Gebrauch.

Daß der Urteilswiderspruch wesentlich vom Einsatz der Negation abhängt, liegt auf der Hand. Seine Gestalt ist die Verknüpfung eines allgemeinen Urteils mit seiner Negation, gewöhnlich als "p und nicht-p" notiert ("p" steht für ein behauptendes allgemeines Urteil). Die Negation spielt auch bei der Bildung widersprüchlicher Begriffe die Hauptrolle. Aber sie wird in den herkömmlichen Formalismen für Begriffe nicht sichtbar. Wohl aber kann sie in pyramidaler Notationsweise sichtbar gemacht werden. Dazu greifen wir auf die im vorigen behandelten negativen Begriffe zurück.

Der widersprüchliche Begriff wird ausschließlich aus dihäretischen Artbegriffen gebildet. Diese definieren sich gegenseitig durch die bestimmte Negation, die nur auf die spezifischen Differenzen bezogen ist, wie oben gezeigt wurde. *Der widersprüchliche Begriff ist eine Verschmelzung dihäretischer Artbegriffe zu einem eigenständigen Begriff neben den bestehen bleibenden Artbegriffen und unter der Gattung (sofern sie bekannt ist), deren generische Merkmale er mitenthält.* Letzteres ist der Grund dafür, daß der widersprüchliche Begriff leicht mit einem Gattungsbegriff verwechselt wird. Man bemerke jedoch, daß auch Kategorien (also höchste Gattungen), die in einem Negationsverhältnis zueinander stehen, zu einer widersprüchlichen Kategorie verschmolzen werden können. In diesem Falle enthält diese kein generisches Merkmal. Ein Hauptbeispiel dafür, das auch für die Logik selbst kategorischen Status hat, dürfte der Begriff "Möglichkeit" sein, der aus "Sein" (bzw. Wirklich) und "Nichts" (Nichtwirklich) dialektisch verschmolzen ist. Darauf wird sogleich zurückzukommen sein.

Als Beispiel für unter gemeinsamer Gattung verschmolzene Artbegriffe dürfte die Einteilung aller Menschen in Raucher und Nichtraucher (s. o.) passen. Die Intensionen der beteiligten Begriffe sind: A = Mensch; AB = Raucher; A-B (gelesen: A Nicht-B) = Nichtraucher. Verschmelzen wir die Artbegriffe, so hat der dadurch gebildete widersprüchliche Begriff die Intensionen AB-B. Das bedeutet "rauchender Nichtraucher (Mensch)".

Was die *Extension* der widersprüchlichen Begriffe betrifft, wo wird man - mit herkömmlicher Meinung über die "Null-Extension" solcher Begriffe - vermuten, sie hätten keine eigene Extension. Da sie aber aus zwei Artbegriffen mit je eigenen Extensionen gebildet sind, muß man zugleich annehmen, daß sie deren Extensionen umfassen. Im Beispiel verdeutlicht: Die übliche logische Meinung geht dahin, daß es "keine Menschen gibt, die zugleich Raucher und Nichtraucher sind". Die pyramidale Analyse zeigt aber, daß der "menschliche rauchende Nichtraucher" durchaus als Mensch vorgestellt wird, und also die Extension der Gattung erhalten bleibt. Nur das kann der Grund sein, daß widersprüchliche Begriffe überhaupt als Begriffe aufgefaßt werden. Man kann sagen: Die Widersprüchlichkeit der contradictio in terminis schlägt auf die Extension durch. *Der widersprüchliche Begriff hat sowohl die Extension der Gattung bzw. der beiden verschmolzenen Artbegriffe gemeinsam als auch keine (eigene).* Darin zeigt sich eben seine extensionale Widersprüchlichkeit. Bei widersprüchlichen Kategorien (für die keine Gattung bekannt ist) ergibt sich die Extension aus den vereinigten Extensionen ihrer Komponenten, die zugleich selbständig erhalten bleiben.

Das hat Folgen für die gelegentliche deduktive Bildung von Unterbegriffen der widersprüchlichen Begriffe. Auch sie behalten dann intensional die sich ausschließenden Intension der verschmolzenen Ausgangsarten, zugleich aber auch die vereinigten Extensionen derselben. Beispiele dafür werden wir beim Zahlbegriff und seinen Arten und Unterarten sowie bei den nicht ausdrucksbildenden Junktoren näher behandeln.

Die Sache wird sogleich durchsichtiger, wenn wir einen in der Logikgeschichte notorischen Begriff als Beispiel heranziehen, der bisher nicht im Verdachte stand, ein begrifflicher Widerspruch zu sein. Man kann alle Menschen, die bisher gelebt haben, in die "Toten" (schon Verstorbenen) und die "Lebenden" einteilen. Von diesen gilt die Definition, daß die "Toten" = "Nicht-lebende Menschen" und daß die "Lebenden" = "Nicht-tote Menschen" sind. Der bisher unverdächtige Begriff, der beide Arten in sich vereint, ist der "sterbliche Mensch". Auch der traditionelle Logiker wird hier zugeben, daß "alle Menschen sterblich sind" (wie das in vielen Logiklehrbüchern immer wieder behauptet wird). Nach der Null-Extensions-Hypothese der widersprüchlichen Begriffe muß er zugleich behaupten, es gäbe überhaupt keine sterblichen Menschen.

Der widersprüchliche Begriff "Sterblichkeit" kann auch verdeutlichen, was in widersprüchlichen Urteilen passiert, in denen von diesem Begriff als Prädikat Gebrauch gemacht wird. Man sagt dann über die "Toten" alles das, was man eigentlich nur über "Lebende" sagen kann (und das oft noch im historischen Präsenz!) und über die "Lebenden" alles das, was man sonst nur von den Verstorbenen sagen kann. Und so sind die "Sterblichen", wie der Dialektiker Heraklit es ausdrückte, "Lebendige Tote" und zugleich "tote Lebendige".

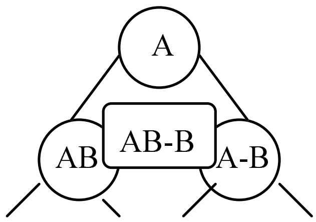
Man stößt an die Grenzen der Anwendbarkeit der logischen Begriffsbildung, wenn man etwa in Fragen der Grundbegriffe bzw. Kategorien wohlunterschiedene dihäretische Artbegriffe vorfindet, von denen man nicht weiß, ob sie eine gemeinsame Gattung über sich haben oder wie sie ggf. beschaffen sein könnte. Das berührt das Problem der (klassischen) Definierbarkeit allgemeinster Begriffe (sog. höchster Gattungen). Wir kommen dabei auch auf die widersprüchlichen Kategorien zurück.

Die meisten Ontologen und Metaphysiker (und vermutlich auch Logiker) waren und sind wohl der Meinung, der Begriff der "Möglichkeit" sei die gemeinsame Gattung von "Sein" und "Nichts". Das setzt voraus, daß sich "alles Mögliche" restlos in "Seiendes (Sein)" und "Nichtseiendes (Nichts)" einteilen lasse, und daß das "Seiende" als "Nicht-Nichts" und das "Nichts" als "Nicht-Seiendes" zu definieren sei (wir sehen hier von Heideggers "ontologischer Differenz" von "Sein" und "Seiendem" ab). Es setzt logisch aber auch voraus, daß der angenommene Gattungsbegriff "Möglichkeit" unter Abstraktion der spezifischen Differenzen von "seiend" und "nichtseiend" gedacht und vorgestellt werden könnte. Das aber hat wohl noch niemand vorgedacht, und es scheint bislang in jeder Hinsicht undenkbar. Also bleibt auch in diesem kategorialen Grenzfall nur der Ausweg, "Möglichkeit" als widersprüchlichen Begriff, mithin als dialektische Verschmelzung von "Sein" und "Nichts" zu denken.

Erst dann wird verständlich, daß der Begriff "Möglichkeit" seiner Extension nach sowohl "alles" umfaßt, nämlich sowohl das Sein wie das Nichts (und deren Extensionen), als auch keine eigene Extension hat, denn eine solche könnte wiederum nur als "Sein" oder "Nichts" beschrieben werden. Die Widersprüchlichkeit zeigt sich intensional darin, daß man auch (mit Heidegger) das "Sein nichten" lassen und das "Nichts anwesen (d. h. "sein") lassen kann. Manche Logiker (wie Leibniz und Kripke) schwärmen bei dieser Problematik in "mögliche Welten" aus, in denen sie das Nichts verseinen, indem sie es denken, und das Sein vernichten, indem sie von ihm abstrahieren.

Wir sind auf die Problematik des begrifflichen Status der "Möglichkeit" eingegangen, weil der Begriff seit den Megarern und insbesondere seit Aristoteles auch in der Logik eine bedeutende Rolle spielt, insbesondere als Grundbegriff der sogenannten Modallogik und damit auch der Wahrscheinlichkeitslehre. Auf die Wahrscheinlichkeitsbegriffe wird unten sogleich näher einzugehen sein. Überdies ist der Möglichkeitsbegriff die logische Matrix aller Begriffe von Kraft, Anlage, Disposition, Vermögen geworden, die in der Physik und Psychologie eine weite Anwendung haben. Unsere Analyse veranlaßt uns zu der These, daß mit dem Möglichkeitsbegriff eine effektive Dialektik in die Logik und Wissenschaft eingeführt worden ist, deren Folgen an Widersprüchen in den relevanten Theorien kaum absehbar sind. Die Darstellung des widerspruchsvollen Begriffs in pyramidaler Notation sieht so aus:

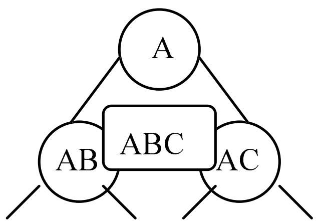
Der widersprüchliche Begriff



Beispiel:
A = Mensch
AB = Raucher (rauchender Mensch)
A-B = Nichtraucher (nichtrauchender Mensch)
AB-B = rauchender Nichtraucher

Wie oben gezeigt wurde, verknüpft die Negation in der Logik grundsätzlich "positive" Begriffspositionen, die nur gelegentlich keine eigene Bezeichnung besitzen wie im obigen Beispiel. Sie werden dann durch die negierte Gegenart bezeichnet. Ist ein eigener Terminus für jede Artposition vorhanden, so wird in der pyramidalen Notation die Negation nicht eingezeichnet, wohl aber muß sie mitgelesen werden. Das ist der übliche Fall bei widersprüchlichen Begriffen, in denen die gegenseitige implizite Negation nicht durch Termini oder den Formalismus sichtbar gemacht wird..

Widersprüchlicher Begriff ohne explizite Negation



Beispiel:
A = organisches Wesen
AB = lebendiges organisches Wesen
AC = totes organisches Wesen
ABC = lebendig-totes ("sterbliches")
organisches Wesen

Als Beispiele können wir Kants "transzendentale Ideen" nennen, die er bekanntlich selbst in der "Dialektik der reinen Vernunft" als widersprüchliche Begriffe konstruiert hat. *"Welt"*, so wird in den "Antinomien" herausgestellt, ist als "Gesamt der äußeren Erfahrung" (generisches Merkmal) zugleich (hinsichtlich seiner weiteren spezifischen Merkmale) das "Begrenzt-Unbegrenzte", zugleich das "Einfache-Zusammengesetzte", zugleich das "Freie-Notwendige" und schließlich das "Notwendig-Kontingente". *"Seele"* ist als "Gesamt der inneren Erfahrung" zugleich "Substanziell-Nichtsubstanziell ("prädikativ)" und "beharrlich-vergänglich". *"Gott"*, das "transzendentale Ideal" par excellence, ist als Inbegriff aller inneren und äußeren Erfahrung "Welt-Seele", d. h. zugleich "weltlich-nichtweltlich" und "psychisch-nichtpsychisch".

d. Der Dispositionsbegriff

Dispositionsbegriffe sind durch Rudolf Carnap in die Logik eingeführt worden. Aber nach übereinstimmendem Urteil seiner Anhänger wie Kritiker ist es ihm nicht gelungen, ihren logischen Status zu klären. Es blieb bisher dabei, Beispiele aus vielen Wissenschaftsbereichen aufzuweisen, in denen seit jeher faktisch von solchen Begriffen Gebrauch gemacht wird. Die Benennung zeigt an, daß ihr Sinn darin besteht, etwas zur Disposition oder zur Wahl zu stellen, zugleich aber die Wahl offenzuhalten. Man kann schon von daher vermuten, daß Dispositionsbegriffe Ableger des Möglichkeitsbegriffes sind. Denn Möglichkeiten umfassen - wie gerade gezeigt wurde - mindestens Zweierlei, das der Fall aber auch nicht der Fall sein kann oder ist. Die Dispositionsbegriffe sind wahrscheinlich gerade wegen ihrer gemeinsprachlichen Verbreitetheit unauffällig geblieben. Die verbreitetsten Beispiele sind Wörter, die auf "-barkeit" enden wie etwa "Schmelzbarkeit", "Hämmerbarkeit" u. ä. Aber auch die erkenntnistheoretischen Begriffe "Erkennbarkeit" und "Wahrscheinlichkeit" lassen sich hier einordnen.

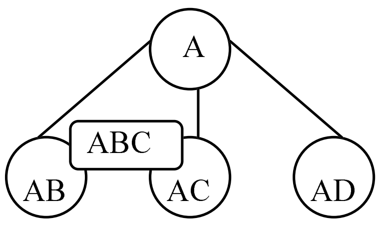
Ihre logische Struktur läßt sich leicht durchschauen, wenn man sie als eine spezielle Art von widersprüchlichen Begriffen erkennt. Mit den im vorigen formalisierten widersprüchlichen Begriffen haben sie gemeinsam, daß in ihnen (mindestens) zwei Artbegriffe zu einem neuen Begriff verschmolzen werden. Im Unterschied zu diesen aber verschmelzen sie in der Regel keine dihäretischen Artbegriffe, sondern beliebige Artbegriffe aus multiplen Artenreihen.

Betrachten wir als Beispiel den physikalisch-chemischen und technischen Begriff "Schmelzbarkeit". Er wird gewöhnlich von Stoffen prädiziert, die normalerweise in fester bzw. harter Gestalt vorliegen, die man aber (ggf. durch Erhitzen) in flüssigen Zustand überführen kann und somit auch in dieser Form kennt, wie beim Erz, das man durch Schmelzen verflüssigen kann. Man bemerke, daß von jedem (allem) Erz gilt, daß es "schmelzbar" ist. Gleichwohl läßt sich die "Schmelzbarkeit" in keiner Weise empirisch beobachten. Erz kommt nur in fester oder flüssiger Gestalt vor (allenfalls kann man es noch verdampfen, was hier keine Rolle spielen soll, aber eine weitere der "multiplen" Arten des Auftretens erweist). Es wird jedenfalls allgemein zugestanden, daß die Schmelzbarkeit kein empirischer Aggregatzustand von Körpern ist, also auch kein Zwischenzustand im Übergang vom festen zum flüssigen, wie etwa die "Viskosität" mancher Stoffe. Dies umschreibend sagt man, der feste Körper hat die Disposition, auch flüssig zu sein oder zu werden, gerade wenn er nicht flüssig oder geschmolzen ist. Eigentlich wäre es unsinnig, einen geschmolzenen Stoff immer noch "schmelzbar" zu nennen. Aber hier schlägt die Denkweise in "Möglichkeiten" durch, gemäß der man auch das Wirkliche (Seiende) immer noch "möglich" nennt, gerade weil es angeblich durch die Verwirklichung seine "Möglichkeit" erwiesen hat.

Gehen wir also davon aus, daß das "Feste" "nicht-geschmolzen" und das "Geschmolzene" "nicht-fest" ist. Die gegenseitige Negation ist eine unbestimmte, denn das "nicht-Feste" könnte auch das "Verdampfte" (Gasförmige) bedeuten. Ersichtlich wird im Begriff "Schmelzbarkeit" "fest" und "geschmolzen = nicht fest" vereinigt und auf den festen Stoff bezogen. Wie wir sagten, bezieht man ihn (nach dem Muster der "Möglichkeit") auch auf den flüssigen Stoff, von dem dadurch gesagt wird, daß er auch "fest" ist (oder doch sein kann).

Diese Charakteristik der Dispositionsbegriffe zeigt die Züge der Widersprüchlichkeit. Es wird im Dispositionsbegriff das sich Widersprechende, was nicht zugleich und in gleicher Hinsicht prädiziert werden sollte, zugleich prädiziert. Das Feste als "Schmelzbares" wird zugleich als flüssig (geschmolzen), und wenn es geschmolzen ist, als "Schmelzbares" zugleich als fest bezeichnet. Die pyramidale Notation eines Dispositionsbegriffs sieht folglich so aus:

Dispositionsbegriff in multipler Artenreihe:



Beispiel:
A = Aggregatzustand
AB = fest
AC = flüssig (geschmolzen)
AD = dampfförmig
ABC = schmelzbar

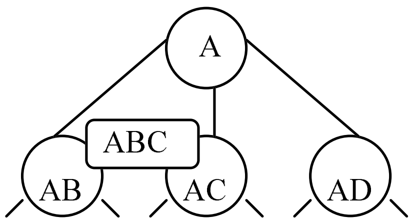
Eine wohlbekannte Begriffsform sind die *Ideale und der Idealtypus,* die wir gemeinsam *Idealbegriffe* nennen können. Sie haben dieselbe Struktur wie die Dispositionsbegriffe

Auch bei diesen Begriffen wird allgemein davon ausgegangen, daß sie "keine Entsprechung in der Wirklichkeit" hätten. Kantische "rein apriorische Begriffe" und Max Webers Idealtypen sollen Begriffe sein, die über die empirische Wirklichkeit hinausliegen, "transzendental" sind, obwohl sie doch gerade für Bestimmungen des Wirklichen in Anspruch genommen werden. Wie das geschieht, ist bisher in der Logik ebenso rätselhaft geblieben wie bei den Dispositionsbegriffen. Gleichwohl sind sie in vielen Wissenschaften verbreitet und sogar unentbehrlich.

Max Weber ist ihrer Struktur am nächsten gekommen, als er seine Idealtypen so definierte, daß sie "etwas an der Wirklichkeit" festhalten und mit anderen Zügen des Wirklichen so verknüpfen, wie es gerade in der Wirklichkeit nicht vorkommt. Er nennt sie auch "utopisch", weil sie auch als Gestaltungsziele des noch nicht Verwirklichten dienen könnten. Überdies betont er ihren diagnostischen Wert, weil sie durch "Übersteigerung" gewisser Züge der Wirklichkeit diese besser durchschauen lassen. Wir möchten betonen, daß ihre Fruchbarkeit gerade in ihrer "Kreativität" liegt, denn sie eignen sich durchweg für "phantastische" Antizipationen von gesuchten Forschungsgegenständen wie auch herzustellenden neuen Entitäten. (Vgl. dazu M. Weber, Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre, Tübingen 1922, 4. Aufl. 1973, S. 532 ff.)

Hinsichtlich der Verständlichkeit solcher Begriffe besteht kein Zweifel. Sie haben in der Regel sehr anschaulichen Gehalt, d. h. ihre Intensionen sind (meist) vollständig bekannt und aufzählbar. Wie es freilich mit ihren Extensionen steht, macht die Rätselhaftigkeit dieser Begriffe aus. Rätselhaft aber nur für denjenigen, der mit dem Widerspruch in der Logik nicht umzugehen versteht. In der Tat können sie nur eine spezielle Art widersprüchlicher Begriffe sein.

Idealbegriffe sind deshalb so "verständlich", weil sie stets von regulären Artbegriffen aus gebildet werden. Nehmen wir als plastisches Beispiel den berühmten "Pegasus", das "Vogelpferd" der Antike. Man muß wissen, was ein Pferd und was ein Vogel ist, um deren spezifische Differenzen (bzw. einige derselben) in einem gemeinsamen Begriff vom "Pegasus" verschmelzen zu können. Das Widersprüchliche des Pegasus wird bei den Intensionen dadurch bewirkt, daß sie wiederum in unbestimmter Negation zueinander stehen. Bei der Extension zeigt sich das Widersprüchliche darin, daß "Pegasus" sowohl die Extensionen von "Pferd" und "Vogel" umfaßt als auch keine eigene außer diesen besitzt. In pyramidaler Notation sieht seine Struktur so aus:



"Pegasus":
A = Tier
AB = Pferd
AC = Vogel
AD = weitere Tierart
ABC = Pegasus

Da die antiken Dichter und Maler den "Pegasus" so oft dargestellt haben, darf man vermuten, daß er in der antiken Naturforschung auch heuristisches "Ideal" für die Suche nach einer solchen Tierart gewesen ist. Man weiß natürlich erst durch die moderne Biologie, warum die Suche vergeblich sein mußte. Gleichwohl wollen ja antike Astronomen ihn am Himmel entdeckt haben. Hätten wir heute keine mechanischen Fahrzeuge, sondern der schnelle Verkehr würde sich noch auf dem Pferderücken abspielen, so wäre der "Pegasus" zweifellos bevorzugtes Ideal für gentechnische Züchtungsversuche geworden. Nicht anders verhält es sich ja mit der neuerdings gezüchteten "Kartoffeltomate". Auch neue Geräte und Gegenstände werden in aller Regel "konzeptionell" aus wohlbekannten und erprobten Geräten und Gegenständen komponiert.

Daraus entnimmt man, daß die Logik der Dispositionsbegriffe nichts anderes als die eigentliche *Kernlogik der Forschung und Erfindung sein kann.*

Wird das heuristische oder kreative Ideal allerdings durch Findung oder Erfindung zu einem wirklichen Gebilde, so rückt der entsprechende Begriff als eine neue reguläre Unterart in die Reihe der Unterarten derjenigen Art ein, mit der er am auffälligsten Gemeinsamkeiten aufweist. Ein gezüchteter "Pegasus" würde als Pegasus Unterart der Pferde (geflügelte Pferde), ebenso wie die Kartoffeltomate inzwischen Unterart der Kartoffeln geworden ist.

e. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

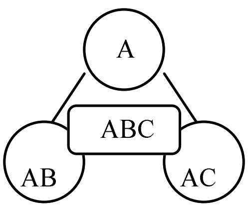
Die Struktur der Dispositionsbetriffe erklärt auch, was es mit den sogenannten Wahrscheinlichkeiten auf sich hat. Das Thema der Wahrscheinlichkeiten wird üblicherweise in der Urteilslehre abgehandelt, wo man von Wahrscheinlichkeitsurteilen bzw. -aussagen spricht, und wir werden dort auch darauf einzugehen haben.

Wahrscheinlichkeitsurteile werden gewöhnlich in der Form formuliert: "Es ist wahrscheinlich, daß S P ist". Dabei kann die Wahrscheinlichkeit auch noch zahlenmäßig quantifiziert werden: "Es ist 1/x (oder ggf. X %) wahrscheinlich, daß S P ist". Die Quantifikation, die der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre und ihren Wahrscheinlichkeitskalkülen zugrunde liegt, gilt hierbei als Modifikation, ggf. als Einschränkung des Behauptungscharakters. Diese Gepflogenheit hat aber die Aufmerksamkeit davon abgelenkt, daß die Wahrscheinlichkeit in den Prädikatsbegriff eines Urteils aufgenommen wird. Die richtige logische Form eines Wahrscheinlichkeitsurteils ist daher: "S ist (eine, evtl. quantifizierte) Wahrscheinlichkeit von P".

Wahrscheinlichkeiten stellen Möglichkeiten bzw. Dispositionen des Eintretens oder Nichteintretens von Ereignissen oder Fällen dar. Es muß dabei davon ausgegangen werden, daß man in keiner Weise wissen kann, ob eine Möglichkeit sich realisiert oder nicht. Weiß man nämlich, was eintreten wird oder was nicht eintreten wird, so kann man dies nicht als Möglichkeit mit Wahrscheinlichkeit, sondern nur positiv oder negativ als Tatsache mit Wahrheitsanspruch behaupten. Aber hier wird in der Logik auch viel Mißbrauch mit der Wahrscheinlichkeitsterminologie getrieben. Das zeigt sich schon daran, daß in der Wahrscheinlichkeitslogik die "Wahrheit" üblicherweise mit einer "100 %igen Wahrscheinlichkeit und die Falschheit mit einer 0 %igen Wahrscheinlichkeit identifiziert wird.

Tritt ein Wahrscheinlichkeits- bzw. Möglichkeitsprädikat in ein Urteil ein, so bezieht sich der dadurch erzwungene Behauptungscharakter dieses Urteils auf die Wahrheit des Vorliegens oder Eintretens des Falles und zugleich auf die Falschheit dieses Vorliegens oder Eintretens des Falles. Die logische Wahrscheinlichkeit wird dabei nicht zahlenmäßig quantifiziert. Wird sie jedoch, z. B. mit 1/2 quantifiziert, so wird sie dadurch zu einer "mathematischen Wahrscheinlichkeit". Der Fall tritt logisch aber auch bei wie immer quantifizierten Fällen entweder ein oder nicht ein, und insofern bleibt die logische Wahrscheinlichkeit auch Grundlage der mathematisch quantifizierten. Das bekannteste Beispiel ist hier das Münzwerfen. Die pyramidale Notation stellt diese "wahrscheinlichen Möglichkeiten" eines gewünschten bzw. "günstigen" und des unerwünschten "ungünstigen" Falles als einfachen widersprüchlichen Begriff dar, in welchem die sich ausschließenden Ergebnisse als spezifische Differenzen des "Münzwurfes" vereinigt sind.

Der wahrscheinliche Münzwurf



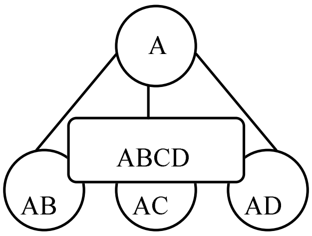
A = Münzwurf

ABC = möglicher Münzwurf mit Gleichwahrscheinlichkeit

AB = Bildwurf   AC = Zahlwurf

Von diesem einfachen Verhältnis kann man dann zu mehrfachen Möglichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten übergehen. Bei drei Möglichkeiten werden drei in multipler Artenreihe stehende Begriffe zu einem Prädikatsbegriff zusammengezogen und verschmolzen. Ein Beispiel sind die Ausgänge eines Fußballspiels mit dem Gewinn der einen oder der anderen Partei oder Gleichstand. Das sieht in pyramidaler Notation so aus:

Mögliche Fußballspielergebnisse



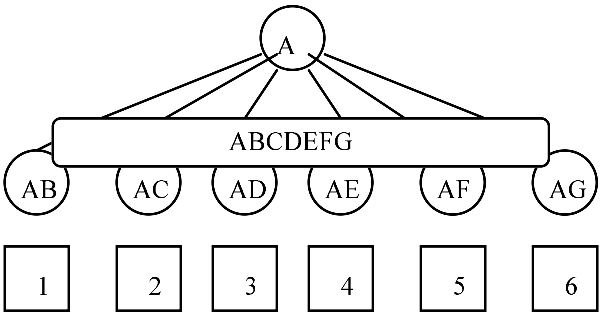
A = Fußballspiel zwischen Rot und Blau

ABCD = mögliches "wahrscheinliches" Ergebnis

AB = Rot gewinnt
AC = unentschiedes Ergebnis
AD = Blau gewinnt

Ein schon komplexerer Fall ist die Verschmelzung von sechs Prädikatsbegriffen beim Würfelfall. Die sechs unterscheidbaren Wurfergebnisse bilden auch hier eine multiple Artenreihe, die zu einem dispositiven Wahrscheinlichkeitsfall für jeden Wurf zusammengezogen und verschmolzen werden. Das pyramidale Bild des Wahrscheinlichkeitsprädikats beim Würfelwurf sieht also so aus:

Begriffsstruktur einer Wurfwahrscheinlichkeit beim Würfel



A = Wurf

ABCDEFG = Wahrscheinlicher Wurf

AB ... AG = Einzelwurf

Wurfergebnisse

In gleicher Weise werden in der Quantenphysik die "Wahrscheinlichkeitszustände" aus den bekannt gewordenen unterschiedenen physikalischen Zuständen von Atomen und Subatomen zu einem dispositiven Möglichkeitsbegriff des Verhaltens von Teilchen zusammengezogen und verschmolzen. Mit der Zahl der bekannten Realisierungen wird, wie man sieht, der jeweilige Möglichkeitsbegriff immer reichhaltiger an Merkmalen. Da diese Merkmale - mit der Ausnahme des generischen Merkmals "A" sämtlich in unbestimmter Negation zueinander stehen, wächst entsprechend der Anteil der falsch prognostizierten "wahrscheinlichen" Fälle im Verhältnis zum "wahren Eintreffen".

Wir möchten betonen, daß wir mit dieser Spreizung der Dispositionen im Wahrscheinlichkeitsbegriff nur das Verfahren der Mathematik und der Physik formalisieren, um das Prinzip zu klären. In der logischen und lebensweltlichen Praxis wird man stets bei der schlichten alternativen Disposition bleiben und von Wahrscheinlichkeit dort sprechen, wo etwas der Fall sein kann oder auch nicht.

Ersichtlich kann man die Spreizung der Wahrscheinlichkeitsdispositionen auch über alle Grenzen treiben. Das ist z. B. der Fall, wenn man alle möglichen Fälle (die möglichen Welten insgesamt) mit dem, was man für die wirkliche Welt hält, in eine dispositionelle Reihe bringt. Dann führt der Formalismus zwangsläufig zur These von der infinitesimal geringen Wahrscheinlichkeit von Wirklichkeit überhaupt. Die berühmte Leibnizsche Frage: "Warum ist überhaupt Sein und nicht vielmehr Nichts?" verdankt sich offensichtlich einer solchen Begriffsbildung.

f. Der Zahlbegriff

Ein einfaches Verständnis des Zahlbegriffs wird ihn als regulären logischen Begriff auffassen. Nur deshalb spricht man ohne weiteres vom Zahl-"Begriff". Die einfachste logische Bestimmung eines solchen regulären Zahlbegriffs ist seine Definition als "Menge von Elementen", die ja von Euklid stammt und seither in der Didaktik der Mathematik die Hauptrolle spielt.

Mit diesem Mengenbegriff kommt man einem als "natürlich" geltenden logischen Verständnis der dementsprechend "natürlich" genannten Zahlen recht nahe. Allerdings auf Kosten einer geringfügig erscheinenden logischen Schummelei: Die Eins wird unter der Hand zu den "natürlichen Zahlen" hinzugenommen, aber sie wird nicht als "Menge" mitdefiniert, da sie gerade das Gegenteil einer Menge ist. Euklid war darin noch genauer und ehrlicher, denn er hat die Eins nicht als Zahl angesehen (ebenso wenig wie Platon und Aristoteles) und somit die natürlichen Zahlen mit der Zwei beginnen lassen.

Eine sich selber "logizistisch" nennende Definition der natürlichen Zahlen (von B. Russell) versucht dem Rechnung zu tragen, indem sie die Eins als "Ausgangselement" und alle weiteren Zahlen (von der Zwei an) als "Nachfolger" mittels der Addition einer Eins definiert. Aber wie man leicht sieht, wird dadurch die Eins immer noch nicht mitdefiniert, sondern gerade als Nichtmenge bestimmt, und die einzelnen "Nachfolger" als "Mengen" werden sämtlich als Summen von Einsen definiert.

Diese Definition gilt in der Mathematik als "vollständige Induktion" des Zahlbegriffs (der natürlichen Zahlen). Man muß aber logisch dazu sagen, daß diese angebliche Induktion weder "vollständig" noch überhaupt eine Induktion ist. Als logische Induktion müßte sie von einzelnen Zahlen (als logischen Zahl-Individuen) ausgehen und den Zahlbegriff so definieren, daß er das gemeinsame Merkmal an den einzelnen Zahlen abstrahiert und fixiert. Als vollständige Induktion müßte sie dabei von "allen Zahlen" ausgehen können. Niemand aber kennt "alle Zahlen", und ebenso wenig gilt die vorgeschlagene "Nachfolgerdefinition" von der Eins, die gleichwohl in allen Zahlen mitenthalten ist. Und so können wir auch von dieser Definition schon sagen, daß sie in der Tat eine Deduktion zweier Arten von Zahlbegriffen, nämlich der Einsen und der Summen aus Einsen, aus einem gänzlich undefiniert bleibenden Gebilde darstellt, das gleichwohl als mathematischer "Begriff der Zahl" ausgegeben wird.

Die zahlreichen Entdeckungen und fast beliebigen Formulierungsmöglichkeiten von "Antinomien der Mengenlehre", von denen die Mitdefinition der Eins als Menge und somit als Zahl schon die erste sein dürfte, zeigen, daß man mit dem regulären Zahlbegriff als Mengenbegriff in der modernen Mathematik nicht weit kommt. Wohl aber kann man das, was in der Rechen- und Meßpraxis von der Mathematik gebraucht wird, einigermaßen mit dem regulären Zahlbegriff als "Menge von Elementen" abdecken. Man geht dann davon aus, daß eine Zahl (= Menge) zwar andere Zahlen (kleinere Mengen) und Einheiten (= Elemente) enthält bzw. umfaßt, aber niemals sich selbst als dieselbe Menge oder gar als ihr eigenes Element.

Kein zählender oder messender Mathematiker wird etwa beim Huhn "drei Beine" abzählen. Diesen Spaß hat sich aber schon der chinesische "Dialektiker" Hui Shi (ca. 370 - 310 v. Chr.) erlaubt, als er behauptete, die Hühner hätten drei Beine. Offensichtlich zählte er - wie die modernen mathematischen Mengentheoretiker, die davon ausgehen, daß eine Menge sich selbst mitenthalten könne - die "Menge der Beine des Huhns" neben den beiden Beinen mit.

Man wird sich auch schwerlich eine "leere Menge", also eine Menge, die "keine kleineren Mengen" oder "kein Element" enthält, verständlich machen können, was den Mathematikern aber als selbstverständlich gilt. Schwertun wird man sich auch mit "Mengen, die nur ein einziges Element enthalten" und doch Mengen sein sollen, ebenso mit "überabzählbaren Mengen", bei denen die Elemente offensichtlich Elemente von (Zahl)Mengen sein sollen, die aber gerade nicht gezählt werden können. Das alles sind aber Bestimmungen des modernen mathematischen Mengenbegriffs, der zur Erklärung und Definition der Zahl dienen soll.

Dieser widersprüchliche Mengenbegriff muß dahin führen, auch den Zahlbegriff logisch als widersprüchlichen Begriff zu konstruieren. Dies zu tun gehört u. a. auch zur konsequenten Ausführung einer logischen Begründung der Arithmetik und ist das Gegenteil des in der mathematischen Logik üblichen Verfahrens, die Logik auf arithmetische Denkformen zu begründen und dabei in die Logik transportierte Widersprüche als Nichtwidersprüche erscheinen zu lassen.

Wie bei den Extensionen und ihren Quantifikationen gezeigt wurde, ist der Zahlbegriff ein Ableger der logischen Partikularisierung, d. h. des "einige". Dieses ist die mittlere Quantifikation zwischen dem

Individualisator ("ein") und dem Allquantor ("alle"). Diese drei Arten der Quantifikation bleiben in der Logik streng voneinander geschieden und unterschieden. Als "einige" wird man in der Logik niemals "ein" Einzelnes bezeichnen, und auch nicht "alle" Elemente eines Gesamts.

Der Zahlbegriff ist im Gegensatz zum logischen "einige" eine Verschmelzung der logischen äußeren Quantifikationen "ein" und "alle" in einen einzigen Begriff, nämlich den der Zahl als "ein-Allheit" bzw. "all-Einheit". Er ist daher logisch betrachtet eine contradictio in terminis. Er spreizt das logische "einige" auf "alle Größen-Einheiten" auf und nimmt somit das logische "eine" wie das "alle" selbst in den Zahlbegriff auf. Nimmt man die Null, wie üblich, unter die Zahlen auf, so wird dadurch auch das logische "kein" zum Definitionselement des Zahlbegriffs.

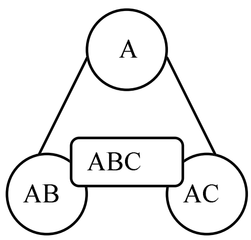
Was wir hier und schon im vorigen bei den widersprüchlichen und den Dispositionsbegriffen "Verschmelzung" nennen, wird durch einen Junktor bewirkt, der zwei Begriffe zu einem neuen Begriff zusammenfügt. In der klassischen Logik ist er von Aristoteles nicht berücksichtigt worden, bei den Stoikern deutet er sich als Existenzjunktor an. Gleichwohl ist er in der Sprache für die Bildung zusammengesetzter Ausdrücke sehr verbreitet. Sprachlich wird er gewöhnlich durch einen Bindestrich zwischen Wörtern signalisiert, der schließlich auch entfallen kann, wie z. B. in "Schnecken-Haus" ("Schneckenhaus"). In der Mathematik ist er die Junktur der Rechenart der *Produktbildung,* durch den zwei Zahlen zu einer neuen (von den Ausgangszahlen verschiedenen) Zahl vereinigt werden.

Den Produktbildungsjunktor werden wir an geeigneter Stelle bei den Junktoren als Existenzjunktor besonders behandeln. Bei der Bildung des Zahlbegriffs vereinigt der Produktjunktor die beiden (logischen und sich gegenseitig ausschließenden) Quantifikationsbegriffe Einheit und Allheit zum Begriff der Zahl.

Die kontradiktorische Intensionenverschmelzung von Einheit und Allheit zur "all-Einheit" (bzw. "ein-Allheit") liefert zunächst den allgemeinen Zahlbegriff, der zugleich die Gattung aller Zahlarten und Unterarten ist. Seine Merkmale (Intensionen) teilen sich als generische Merkmale allen Art- und Unterartbegriffen von Zahlen mit. Dadurch werden alle besonderen Zahlbegriffe als Arten des allgemeinen Zahlbegriffs als Produkte von Einheit und Allheit definierbar.

Im Zahlbegriff wird die Zusammensetzung aus zwei intensionalen Komponenten (wie in der Sprache und in der Mathematik üblich) durch die hier üblichen Zeichen unsichtbar gemacht. Die Notation der komponierten Intensionen in der Pyramide macht sie aber sichtbar. Der Zahlbegriff sieht in pyramidaler Notation so aus:

Zahlbegriff als widersprüchlicher Begriff



Zahlbegriff als kontradiktorische Verschmelzung
des logischen Individualisators und des Allquantors:
A = Quantifikator
AB = Individualisator
AC = Allquantor
ABC = Zahl

Der widersprüchliche Charakter des Zahlbegriffs bedeutet also zunächst intensional, daß jede Zahleinheit zugleich eine Zahlallheit und umgekehrt ist. Das, was beim allgemeinen Zahlbegriff zu denken ist und deshalb nicht in der Anschauung direkt und zugleich gegeben werden kann, ist gerade die Verschmelzung dieser beiden Komponenten. Logisch verhält sich dies nicht anders als beim schon erwähnten Pegasus-Beispiel.

Schaut man irgend einen quantifizierbaren Gegenstand an, so beachtet und sieht man entweder die Einheit (Einheitlichkeit) des Gegenstandes und nennt ihn "einen", oder man beachtet und sieht, daß er sich aus einer "Gesamtheit" von Teilen zusammensetzt, also dasjenige, was logisch als "alle" gefaßt wird. Die oft beschworene "Überanschaulichkeit" der Zahlvorstellung besteht daher keineswegs darin, wie Platon meinte, daß dabei überhaupt keine sinnliche Vorstellung ins Spiel käme; und sie besteht auch nicht darin, daß man sich diesen Denkgegenstand nur mittels eines anschaulichen "Modells" vorstellen könnte (wozu zu allen Zeiten geometrische Gebilde gedient haben, die aber gerade keine Zahlen sind). Sie besteht vielmehr nur darin, daß eine gleichzeitige sinnliche Wahrnehmung von Einheit und Allheit in der Empirie niemals vorkommt. Wohl aber ist eine Verschmelzung von getrennt erlebter Einheits- und

Allheitswahrnehmungen in der Erinnerung möglich. Und sie ist in der Regel von dem Bewußtsein begleitet, daß diese Verschmelzung von sich ausschließenden Erinnerungsmomenten eine kreative Phantasieleistung ist, was sie ihrerseits von direkten Erinnerungen unterscheidet, in denen nur gleichzeitig wahrgenommene Momente vorkommen können. Darauf hat insbesondere schon George Berkeley bei seiner Analyse der von ihm sogenannten abstrakten Begriffe (notions), die er als Widersprüche erkannte, hingewiesen.

Bei Aristoteles und Euklid (mit dem wir uns später ausführlicher befassen werden) wird die Zahl ersichtlich als logisch gespreizte Quantifikation der Partikularisierung "einige" behandelt. Und erst das macht verständlich, warum bei Aristoteles wie bei Euklid die Einheit wie auch die Allheit keine Zahl sein kann (was mathematikhistorische Darstellungen zwar immer wieder feststellen, aber nicht erklären können). Und darüber hinaus erklärt es auch, warum so etwas wie die Null in der griechischen Mathematik nicht vorkam: Dafür gebrauchte man eben die logische Quantifikation "kein". Das "kein" konnte daher im 9. Jahrhundert nach dem damals bekanntgewordenen Vorbild der indisch-arabischen Mathematik ohne weiteres durch die Null in der Mathematik - aber nicht in der Logik - ersetzt werden.

Wird die Zahl als spezielle (gespreizte) logische Quantifikation verstanden, so kann sie nur extensional zum Abzählen und Messen gebraucht werden. Sie bleibt dabei eine genaue Quantifikation eines nicht selber mathematischen Bezugsbegriffs. Deshalb stellt Aristoteles konsequent fest, daß die Eins dabei nur Ausgangsmaß - Maßeinheit - sein kann. Jedes gezählte Ding innerhalb einer begrifflichen Gattung oder Art bleibt dann logisch ein "eines", und das Abgezählte ergibt "alle". Bleibt man aber beim Abzählen irgendwo beliebig stehen, so erreicht man - zwischen der ersten Einheit und allen Einheiten eben "einige": die Anzahl der gezählten Einheiten. Und wo von abzählbaren Exemplaren einer Gattung oder Art, die man (als woanders existierend) kennen muß, keines vorliegt, da spricht man von "keinen" Exemplaren dieser Gattung oder dieser Art.

Erst wenn die Einheit als Ausgangsmaß (Maßeinheit) für das Zählen gleichartiger Dinge festgesetzt worden ist (und sie wird dann für jede verschiedene Dingart eine andere Einheit sein), das übrige Gleichartige dann gezählt wird, kann gleichsam rückwirkend das logische "eine" auch als Zahl verwendet werden. Erst dann wird man sagen, "*ein* Ding und *ein* anderes gleichartiges Ding machen zusammen *zwei* gleichartige Dinge aus". Man kann aber ersichtlich nicht sagen, "ein Ochse und ein Pferd machen zwei Ochsen (oder zwei Pferde) aus", eben, weil die Einheiten verschieden sind. Im Chinesischen gibt es für einzelne Arten zählbarer Gegenstände besondere "Klassenwörter", die den Zahlbestimmungen nachgestellt werden und die damit die Verschiedenheit der Einheiten deutlich machen. Gong-sun Long trieb die Unterscheidung im China des 3. vorchristlichen Jahrhunderts gar so weit, daß er nicht einmal "ein weißes Pferd" (Bai Ma) und "ein Pferd" (Ma) als gleichartig behandeln wollte, denn er meinte in einem berühmt gewordenen Argument: "ein weißes Pferd ist überhaupt kein Pferd" (Bai Ma Fei Ma).

Wäre man dabei stehen geblieben, jede Dingart nach eigenen Maßeinheiten zu quantifizieren und die sich so ergebenden Zahlen anders zu benennen, so hätte sich offensichtlich keine Arithmetik entwickeln können. Gleichwohl hat man solche verschiedenen Zählsysteme sehr wohl entwickelt und benutzt und benutzt sie noch, auch in der Mathematik selber. Die Wochentage und Monatsnamen sind noch immer sehr dienliche Abfolgebenennungen, bei denen man jederzeit die Einheit, den Vorgänger und den Nachfolger sowie das Gesamt kennt, ohne daß man sich dies in Zahlfolgen klarmachen muß. Man bemerkt es daran, daß man sich ja mit allerlei Gründen darüber streiten kann, ob z. B. der Sonntag der erste oder der siebente Wochentag sei. Und noch mehr sind es die Buchstaben des Alphabets, die man in Kapitelreihungen der Bücher und in der Mathematik selber als Folgeordnungen verwendet. Machen wir nebenbei darauf aufmerksam, daß bei der Verwendung von Buchstaben in der Arithmetik in sehr dialektischer Weise so getan wird, als ob auch Buchstaben nur Auswahlen aus unendlichen Zeichenfolgen seien, was ja ersichtlich nicht der Fall ist. Jedenfalls wird hier keiner einen Gedanken darauf verschwenden, die wievielte Stelle ein Buchstabe im Alphabet hat, obwohl natürlich jeder auch weiß, daß A der erste, B der zweite und Z der letzte Buchstabe (des lateinischen Alphabets) ist.

Nun geht man davon aus, daß man die abzählbaren Dinge (also auch die Wochentage und Buchkapitel) immer mittels Zahlen zählen kann, wenn man ihre Einheiten vereinheitlicht. Man kann daher auch Äpfel und Birnen zusammenzählen, wenn man sie als "Obsteinheiten" nimmt. Aber bei manchen Zählungen ist es schwierig zu entscheiden, ob die Gegenstände gleichartig sind oder nicht. Man hält mancherlei für gleichartig, ohne daß dies der Fall ist.

Das ist offenbar den Pythagoräern zuerst aufgefallen als sie bemerkten, daß gerade und gekrümmte Strecken (und ggf. auch Geraden in verschiedener Flächenorientierung) keine gleichartigen Maßein heiten besitzen, obwohl es doch so scheint. Seither ist das Phänomen als *Inkommensurabilität* der Maßeinheiten bekannt. Hippasos aus Metapont, der um 450 v. Chr. darauf stieß, soll dafür von den Göttern mit dem Tod bei einem Schiffsuntergang bestraft worden sein. Die griechischen Geometer scheinen aber gerade zur Umgehung der Inkommensurabilitätsproblematik die Geometrie nur mit Lineal und Zirkel betrieben zu haben, denn dabei wird nicht gemessen und gezählt, obwohl sie doch ebenso gut mit verschiedenen Maßeinheiten hätten messen können und es in praktischen Anwendungsfragen (etwa der Architektur) auch taten. Die Mathematik aber hat sich in jahrhundertelangen inneren Kämpfen dazu durchgerungen, das Inkommensurabilitätsproblem innerhalb eines einzigen Zahlsystems, bei dem auch die Eins als Zahl galt, zu lösen. Ob es gelungen ist oder ob nicht vielmehr viele ihrer Probleme noch immer undurchschaute Nachfolgeprobleme davon sind, kann immer noch diskutiert werden.

Man kann jedenfalls nicht genug betonen, daß der extensionale Gebrauch der Zahlen die Grundlage der Anwendung der Mathematik in allen empirischen Verhältnissen ist. Nur darum "funktioniert" Anwendung der Mathematik auf Wirklichkeit, ebenso wie die Logikanwendung auf Wirklichkeit dadurch funktioniert, daß die Gegenstände sich in externsionaler Hinsicht in Individuen, Arten und Gattungen ordnen und einteilen lassen.

Vielleicht ist dies auch der Hauptgrund dafür geworden, daß die Arithmetik in ihrer ganzen Geschichte eine ausgesprochene Affinität zur extensionalen Logik gezeigt hat. Auch moderne mathematische Logik versteht sich noch vorwiegend als extensionale Klassenlogik und Mengenlehre. Da aber Begriffe ihrer Natur nach Extension und Intension besitzen, konnte auch die Arithmetik als Lehre von "Zahl- und Größenbegriffen" nur dadurch entwickelt werden, daß man den Zahlen auch Intensionen beilegte. Ersichtlich konnte erst dadurch eine Autonomie der Mathematik und insbesondere der Arithmetik entstehen, die sie von allen Anwendungen auf Zähl- und Maßgegenstände ablöste.

Auch hierfür scheinen die Pythagoräer die Weichen gestellt zu haben. Aristoteles berichtet (Metaphysik A5 986a 1), daß sie die Zahlen für "erste Elemente aller Naturdinge" gehalten hätten. Das kann nur heißen, daß sie die Zahlen als solche bzw. "an sich" betrachteten und sie damit "auf den Begriff brachten". Platon übernahm diesen Ansatz, indem er die Zahlen zu einer (den Begriffen untergeordneten) Art von Ideen erklärte, wobei er freilich ebenso wenig wie Aristoteles (oder Euklid) die Einheit für eine Zahl hielt. Für Platon wie für Euklid war die erste Zahl die Zwei, und nur deshalb konnte Euklid dann definieren, daß die Zahl "eine Menge von Einheiten" sei, die also mindestens zwei Einheiten enthalten muß.

Man kann bei Platon insbesondere im Dialog "Parmenides" und in Euklids "Elementen" noch erkennen, daß sie "Einheit" und "Menge" als Intensionen des Zahlbegriffs nahmen. "Menge" steht hier aber ersichtlich für ein begrenztes und abgeschlossenes Ganzes, also was wir gerade das logische "alle" genannt haben. Platon ist sich über die intensionalen Ingredienzien des Zahlbegriffs sicher nicht gänzlich klar geworden, wie seine Aporien im "Parmenides" zeigen. Euklid aber hat in seiner Definition der Zahl als "Menge" gerade die "Einheit" und die "Gesamtheit" bzw. Allheit verschmolzen und diese beiden im Gegensatz zueinander stehenden Intensionen hinter der "einheitlichen" Bezeichnung "Menge" unsichtbar gemacht. Damit ist die Dialektik des Mengen-"Begriffs" erst eigentlich begründet worden.

Das hat die logische Folge, daß die euklidische "Menge" (genauer aber "Einheits-Allheit") generisches Merkmal in allen unter den allgemeinen Zahlbegriff fallenden Gebilden sein muß. Arten und Unterarten, die die Extensionen des allgemeinen Zahlbegriffs darstellen, mußten daher ihrerseits immer auch "Mengen", genauer aber wiederum "Einheits-Allheiten" sein. Wie man dabei freilich zu einer "logischen" Einteilung von Zahlarten und Zahlunterarten gelangen könnte, das haben weder Platon noch Euklid zeigen können. Und die spätere Arithmetik hat es sich - als autonome Wissenschaft - auch nicht mehr als "logische" Aufgabe gestellt.

Daß nun Mengen Untermengen und diese wiederum Unter-unter-Mengen usw. unter sich begreifen, reproduziert auch in der Mengenlehre nur das logische Extensionsschema der Begriffseinteilung in Gattung, Arten und Unterarten usw. Insofern ist auch die mengentheoretische Begründung der Arithmetik "klassische Logik". Sie trennt sich aber von dieser Logik, indem sie zu wenig die intensionalen Verhältnisse reflektiert, die notwendigerweise zu logischen Begriffen gehören.

Gebraucht man Zahlen zum Abzählen von Dingen, verwendet sie also rein extensional zur Quantifikation von (Nicht-Zahl-) Begriffen, so nennt man sie *Ordinalzahl* und bezeichnet damit extensionale Begriffspositionen in einer "wohlgeordneten" Reihe von multiplen Nebenarten (oder Unterarten): "das erste, das zweite, das dritte, usw. Ding". Macht man die Zahl aber selbst zum Begriff, so hat man es mit *ordinal quantifizierten Kardinalzahlen* zu tun. Logisch kann das nur bedeuten, daß man das "Kardinale" am Zahlbegriff als Zahlintension(en) und das "Ordinale" als Zahlextension(en) konstruiert. Es scheint, daß das auch G. Cantor vorgeschwebt hat, als er bezüglich des Kardinalen von (intensionalen) "Mächtigkeiten" sprach und den ordinalen Aspekt als Rangordnung von Extensionen auffassen wollte. Er hat aber das Ineinanderspielen von Intensionen und Extensionen im Zahlbegriff nicht durchschaut.

Auch hinter der cantorschen Bezeichnung "Mächtigkeit" (ebenso wie hinter "Menge") sind nur die beiden Intensionen "Einheit" und "Allheit" des Zahlbegriffs dissimuliert. Und so müssen diese Bestimmungen auch generische Merkmale aller zugehörigen Extensionen von Zahlmächtigkeiten bzw. Kardinalitäten sein. Das heißt einerseits, daß im Zahlbegriff von vornherein die logischen Extreme, nämlich das "alle" und das "eine" schon intensional enthalten sind. Das "alle" kann daher logisch nicht selbst eine Kardinalität (oder Zahl) bedeuten. Sie bringt sich in der Arithmetik gleichwohl auch selbständig als das "Infinite" bzw. "Transfinite" zur Geltung, das als Zahl (bzw. Mächtigkeit) definiert wird, zugleich aber keine Zahl sein kann. Daher ist das Problem des Infiniten oder Infinitesimalen eine der Hauptquellen für dialektische Denkfiguren in der Arithmetik geworden. Was dabei von Cantor als oberste Mächtigkeit mit dem "unendlich mächtigen" Göttlichen identifiziert wurde, hat sich konsequenterweise als "Cantorsche Paradoxie" herausgestellt. (Die Cantorsche Theorie reproduziert damit nur die kusanische Dialektik!).

Ebenso muß es sich mit dem "Einen" verhalten. Es wird ebenfalls als Kardinalität definiert, kann aber zugleich keine Mächtigkeit sein, sondern bleibt logisch eine Maßeinheit für alle extensionalen Zahlarten und Unterarten. Als nichtzahlmäßige Einheiten treten in der Infinitesimallehre die "unendlich kleinen Einheiten" auf, die ebenso zugleich als echte Zahlen wie auch als Nicht-Zahlen behandelt werden. Es scheint uns, daß die neuere sogenannten Non-Standard-Analysis, über deren Interpretation man in der Mathematik ja noch keineswegs einig geworden ist, genau diese beiden logischen Quantoren wieder als "Nicht-Zahlen" (d. h. eben "Non-Standard-Zahlen") isoliert hat und nun vor dem Problem steht, sie in die Standard-Zahlentheorie zu integrieren.

1. Definieren wir nun genauer den allgemeinen Zahlbegriff. Er ist eine logische contradictio, die aus den logischen Quantifikationsbegriffen Individualisator und Allquantor verschmolzen ist. Statt Individualisator können wir "Einheit" sagen, statt Allquantor "Allheit". Der logische Zahlbegriff ist dann eine "All-Einheit" oder umkehrbar auch eine "Ein-Allheit".

Zum logischen Allheitsbegriff gehört, daß er "alle einzelnen Elemente", die logisch als jeweils "ein" individualisiert werden können, umfaßt. Dies wurde vorn bei der extensionalen Begriffspyramide erläutert. Zum logischen Einheitsbegriff gehört, daß er jedes einzelne Element einer Allheit bedeuten kann und insofern gänzlich unbestimmt bleibt. Auch das wurde vorn erläutert. Logisch mit dem "alle" zu einem kontradiktorischen Begriff verschmolzen, heißt das, daß beim Zahlbegriff jede Einheit zugleich eine Allheit von Elementen und jede Allheit zugleich eine individuelle Einheit sein muß. Das zeigt sich an der Zahl Eins daran, daß sie selbst "alle echten Bruchzahlen", also wiederum Allheiten von Zahlen enthält. Man kann daher die Einheit in "Allstel" zerlegen. Bei jeder größeren Zahl (als Summe von Einheiten) zeigt es sich daran, daß sie als Einheit gilt, wie "ein Paar", "ein Triplett" usw. Hierfür fehlt nur der logische Term "Allett".

Die Einheit bezeichnen wir mit E, die Allheit mit n (wie in der Arithmetik üblich von "numerus"). Der Junktor für ihre Verknüpfung ist der logische Produkt- bzw. Existenzjunktor (vgl. darüber Kapitel Junktoren), der beliebige im Querverhältnis stehene Begriffe zu einem neuen Begriff verschmilzt. Sprachlich wird das oft mit einem Bindestrich ausgedrückt, der aber auch entfallen kann (vgl. Schnecken-Haus, Schneckenhaus). Wir deuten diese Junktur (ohne Bindestrich) durch Nebeneinanderstellung der Ausgangsintensionen an, also "En". "En", gelesen als "Einheits-Allheit", ist also die logische Definition des arithmetischen Zahlbegriffs.

Man beachte nun besonders, daß E hier zunächst die logische Einheit bedeutet. Sie kann daher die arithmetische Eins, die als eine der Einheiten von n gesetzt wird, ebenso bedeuten wie auch alle anderen arithmetischen Einheiten, die durch n bezeichnet werden, d. h. jede beliebige Zahleinheit.

Man beachte ferner, daß n logisch nur die Allheit von Einheiten bedeutet. Daher kann im logischen Zahlbegriff nicht irgend eine besondere Anordnung (Reihenfolge, "Wohlordnung") dieser Einheiten bestimmt sein.

Wir suchen nun nach einer spezifisch arithmetischen Differenz, die in einer Zahlart auftreten muß, während sie in der dazugehörigen Nebenart negiert auftritt. Halten wir nochmals fest, daß der widersprüchliche Zahlbegriff logisch die Einheit und die Allheit verschmilzt und diese als generische Merkmale auch in die Artbegriffe eingehen. Die spezifischen aritmetischen Differenzen müssen also hinzutreten.

2. Wir finden die spezifischen arithmetischen Differenzen der ersten beiden Zahlarten in der logischen *Kommensurabilität und Nichtkommensurabilität* der Einheit zu den Einheiten der Allheit. Ist die im Zahlbegriff mit der Allheit verschmolzene Einheit kommensurabel mit den Einheiten der Allheit ($E = n$), so gewinnen wir die Zahlart der kommensurablen Zahlen. Es handelt sich dabei aber um nichts anderes als die sogenannten "natürlichen Zahlen", bei denen man diese Kommensurabilität immer als so selbstverständlich vorausgesetzt hat, daß man das Erfordernis der Kommensurabilität zu wenig beachtet hat. Aber dadurch wird die Eins überhaupt erst zu einer zu den übrigen gleichartigen Zahl, die sich durch Addition bzw. Summenbildung oder mathematische Produktbildung mit diesen zu "homogenen" Zahlausdrücken verknüpfen läßt.

Mathematisch ist die explizite Produktbildung zwischen kommensurablen Einheiten und Allheiten selbst die spezifische Differenz für die Bildung der natürlichen Zahlen. Wir bezeichnen sie mit $E \times n$ (E mal n). D. h. alle natürlichen Zahlen lassen sich als Produkte aller natürlichen Zahlen untereinander konstruieren. Da wir zur Definition $E = n$ vorausgesetzt haben, wird dadurch auch die Eins als Zahleinheit mitdefiniert.

Eine Reihenordnung ergibt sich erst auf dieser multiplikativen Definitionsgrundlage, die die Eins als Ausgangseinheit festlegt. Jede von der Eins verschiedene Zahl kann erst dann auch als Summe einer Allheit n und der Einheit definiert werden. "Alle" (natürlichen) Zahlen können ersichtlich nur durch die Multiplikation definiert und durch die sukzessive Addition jeweils einer Einheit zu Eins in eine Wohlordnung (Ordinalität) gebracht werden. Die Null kann dabei nicht als natürliche Zahl mitdefiniert werden.

In negativer Abgrenzung zu den kommensurablen bzw. natürlichen Zahlen ergibt sich die Nebenart der inkommensurablen Zahlen, bei denen die Einheit mit keinem Element der Allheit gleichartig ist. Daher können bei ihnen die Einheiten nicht mit den Einheiten der Allheit durch die Addition oder Multiplikation verknüpft werden.

3. Betrachten wir zunächst die weitere Einteilung der natürlichen bzw. kommensurablen Zahlen. Die Einteilung der natürlichen in positive und negative Zahlen gehört in der neuzeitlichen Mathematik zu den Selbstverständlichkeiten. Die Antike kannte diese Unterscheidung nicht. Sie identifizierte das, was wir heute die natürlichen Zahlen nennen, mit dem, was wir heute die positiven (von der Zwei an) nennen.

Wie gezeigt wurde, wird die Reihe der kommensurablen Zahlen von der Zwei an durch die Addition ("+") erzeugt, indem man Einheiten zu Summen zusammenfaßt und diese mit (ggf. rekursiv gebildeten) Eigennamen bezeichnet. Es liegt naturgemäß keinerlei Notwendigkeit vor, diese Definitionsweise durch Summationen als besonderes Merkmal einer Zahlart festzuhalten, da dies ja auch nicht bei der Erzeugung durch Multiplikationen geschieht.

Erinnern wir uns, daß die antike Mathematik nicht von negativen Zahlen sprach, und entsprechend auch nicht von positiven. Erst die Einführung der unbeschränkten Subtraktion (über die Null hinweg) erzwang die Definition einer besonderen Zahlart, die sich von den bisherigen natürlichen Zahlen wesentlich unterschied. In diesem Falle hat man aber die Erzeugungsart durch Subtraktion einfach als spezifische Differenz gewählt und durch das Negationszeichen als Index dieser Zahlen beibehalten. (Vgl. zur Subtraktion als Junktor das Kapitel Junktoren). Und dies wiederum erzwang die spezifische Kennzeichnung der durch Summationen gewonnen positiven Zahlen, die durch den Index + markiert werden. Wir stellen diese beiden Arten der natürlichen (kommensurablen) Zahlen ebenfalls durch Indexierung der Einheit als "$+E \times n$" und " $-E \times n$" dar.

4. Mit den beiden Arten des Begriffs der kommensurablen bzw. natürlichen Zahlen, nämlich der positiven und negativen Zahlen, gewinnen wir den Begriff der Null als Verschmelzung dieser beiden in einer neuerlichen contradictio in terminis. *Die Null ist der Begriff der positiv-negativen Zahl.* Wir stellen die Null als $\pm E \times n$ dar. Logisch kann man daraus ableiten, daß es unter dem Null-Begriff ebenso viele individuelle Nullen als mathematische Zahlen geben muß, als es überhaupt zugleich positive und negative diskrete Zahlen gibt. Dies zeigt sich u. a. bei Grenzübergängen vom infinitesimal Kleinen verschiedener Dimensionen zur Null

5. Die positiven Zahlen lassen sich wiederum in die rationalen ganzen positiven Zahlen und die rationalen positiven Bruchzahlen einteilen. Entsprechendes gilt von den negativen Zahlen. Man erinnere sich: "rational" heißt im Griechischen "in einem Verhältnis stehend" und bezieht sich auf Proportionen zwischen Zahlen, die durch Quotienten dargestellt werden. Die übliche arithmetische Notation ist diejenige der Anordnung von ganzen Zahlen im sog. Zähler und Nenner eines Bruches.

Das Verständnis der Bruchzahlen geht üblicherweise davon aus, daß es sich dabei um einen Teil einer anderen Zahl handele, der durch das arithmetische Divisionsverfahren ermittelt wird. Daher wird auch jede Bruchzahldarstellung als Aufforderung zu einer Divisionsrechnung verstanden, und dies wiederum suggeriert, daß es dabei ein Zahlergebnis geben müsse. Daß das nicht so ist, bemerkten schon die antiken Mathematiker. Sie erfuhren, daß die unbeschränkte Division auf das Inkommensurabilitätsproblem führt.

Zweifellos ist der Quotient bzw. die Division eine der am wenigsten durchschauten logischen und mathematischen Junkturen. Noch kein mathematischer Logiker hat eine Entsprechung zu einem logischen Junktor entdecken können. Unseres Erachtens liegt das an seiner Zweideutigkeit. Einerseits stellt der Quotient eine Proportion zwischen beliebigen Zahlen dar, und man kann daher mathematisch jede natürliche Zahl mit jeder anderen in ein Quotientenverhältnis bringen und als Bruch darstellen. Gemeinsprachlich wird eine solche Proportion als "Zahl zu Zahl" (oder "eine Zahl im Verhältnis zu einer Zahl") gelesen. Diese Proportionierung ist umkehrbar und bedeutet logisch eine korrelative Implikation ("wenn die eine Zahl, dann auch die andere Zahl, und umgekehrt"). Von einer Rechenaufgabe bzw. einer Ausrechenbarkeit des Quotienten kann hierbei nicht die Rede sein.

Die Anwendung des Quotienten auf inhaltliche Begriffe macht das deutlich. Man stellt etwa die Ergebnisse eines Fußballspiels als "Verhältnis" dar, etwa : 3 / 2 oder umgekehrt. Niemandem würde es einfallen, daraus die Zahl der Tore als "drei halbe Tore" (oder "zwei Dritteltore") anzugeben. Es liegt auf der Hand, daß dieser Gebrauch des Quotienten nicht geeignet ist, eine besondere Zahlart durch Division zu definieren, und dies ebenso wenig wie die logische korrelierende Implikation einen inhaltlichen Begriff definiert. Wohl aber ist er die Grundlage für die Korrelation von (leibnizschen) sogenannten Differentialen ("dy / dx").

Daher muß der Quotient als Definitionsoperator der Zahlart der sogenannten Bruchzahlen logisch anders funktionieren und eine andere logische Bedeutung besitzen. Das läßt sich an den durch Quotienten definierten physikalischen Begriffen genauer zeigen. Die physikalische Definition der "Geschwindigkeit" stellt sie quotientenmäßig als "Wegeinheit zu Zeiteinheit" (s/t, z. B. Kilometer/Stunde) dar. Dabei wird ein selbständiger Begriff "Weg" durch die "Zeit" spezifiziert, so daß sich als extensionale "Wegarten" bzw. als Teile von Wegen gleichartige "Zeit-Wege" ergeben. Die "Zeit-Wege" werden alltagssprachlich und logisch korrekt als "Stundenkilometer" (Km $\times$ Stunde) bezeichnet und damit als spezifizierte Unterarten der Wegart aufgefaßt. Eine solche Definitionsweise entspricht genau der aristotelischen Angabe des Genus proximum und der spezifischen Differenz: "Tier" wird genauso als "tierisches Lebewesen" und zugleich als Teil des Lebendigen definiert wie "Geschwindigkeit" als "zeitliche spezifizierte Weg-Einheit".

Da nun die Zahlbegriffe ebenfalls in einem Gattungs-Art-Unterartverhältnis stehen, muß das auch für die Definition der rationalen Quotienten als einer bestimmten Zahlart gelten. Allerdings mit dem Unterschied zu inhaltlichen Begriffen, daß bei Zahldefinitionen wiederum nur Zahlen sowohl als Gattungen wie auch als spezifische Differenzen auftreten können. Als spezifische Differenzen kommen dabei freilich nicht wiederum alle (natürlichen) Zahlen in Frage, obwohl das bei der üblichen Definition der Quotienten in der Arithmetik vorausgesetzt wird. Damit ist man aber gezwungen, auch "irrationale" wie die periodischen Brüche als Quotienten-Zahlen zu behandeln.

Wir vermuten, daß es zunächst die einfach aussehende Divisionsdarstellung der Bruchzahlen gewesen ist, die in der Arithmetik dazu geführt hat, die periodischen Brüche mit den (aufgehenden) nichtperiodischen Brüchen unter die gemeinsame Bezeichnung "reelle Zahlen" zu stellen und damit die "reellen Zahlen" überhaupt als Zahlart einzuführen. Überdies ist es auch bislang nicht gelungen, einen algorithmischen Ausdruck zu finden, der die im engen Sinne rationalen Brüche definiert. Wäre dies möglich (und wir vermuten, daß dies möglich sei!), so müßten die "reellen Zahlen" aus der Zahlentheorie verschwinden. Die mit unter die "reellen Zahlen" gefaßten periodischen Brüche gehören nämlich, wie sogleich zu zeigen ist, unter die inkommensurablen Zahlarten. Wir werden daher im hier vorgeschlagenen Zahlbegriff darauf Rücksicht nehmen und nicht mehr von "reellen Zahlen" reden.

Als sogenannte Stammbrüche (zwischen 1 und Null) werden in der Mathematik die Quotienten mit Eins im Zähler und den natürlichen Zahlen im Nenner definiert, was wir als "E / n" darstellen können. Darunter fallen aber, wie oben schon gesagt, auch die sogenannten periodischen und gemischt-periodischen Brüche. Wenn jedoch die "Irrationalität" (= Nichtkommensurables Verhältnis zwischen Zahlen) logisch Sinn machen soll, muß sie auch für die periodischen und gemischt-periodischen Brüche gelten. Diese haben mit den arithmetisch sogenannten irrationalen Wurzelzahlen gemeinsam, daß sie kein in endlichen Zahlenfolgen notierbares Teilungsergebnis liefern, also "unendlich" fortgeschrieben werden müssen. Diese müssen aber aus der logischen Definition der rationalen Bruchzahlen ausgeschieden werden. Die sogenannten periodischen und gemischt periodischen sowie die irrationalen Brüche müssen an ganz anderer Stelle in der Zahlenpyramide definiert werden. Sie sind daher auch keine Gegenart zu den rationalen Brüchen.

6. Neben der Gewinnung und Darstellung der echten Bruchzahlen dient die Quotientendarstellung auch der Definition der ganzen Zahlen, nämlich durch den Ausdruck "n / E". Diese lassen sich wiederum in die geraden und die ungeraden ganzen Zahlen einteilen (2n / E = gerade Zahlen; 2n-1 / E = ungerade Zahlen).

Bei den ungeraden Zahlen interessiert die weitere Unterteilung in *Primzahlen* und *Nichtprimzahlen*. Hier hindert aber die übliche Annahme, die Eins sei keine Primzahl, die Zwei sei aber eine und zwar die kleinste Primzahl, eine klare logische Unterscheidung. Die Primzahlen werden mathematisch als "nur durch die Eins und durch sich selbst teilbar" definiert. Logisch muß das aber auch für die Eins gelten, die deshalb auch die kleinste Primzahl sein muß. Es gilt zwar auch für die Zwei, aber ersichtlich nur deshalb, weil die "Teilbarkeit" in der Arithmetik undifferenziert auf die Halbierungen und die Teilungen durch ungerade Zahlen bezogen wird. Euklid hatte zwischen beiden genau unterschieden. Die Teilbarkeit bedeutet nur bei der Zwei eine Halbierung, bei allen anderen (ungeraden) Primzahlen aber kann sie keine Halbierung sein. Und das kann logisch nur bedeuten, daß die Zwei aus der arithmetischen Definition von "durch sich selbst teilbar" auszuschließen ist. Logisch kann sie daher keine Primzahl sein. Und dafür spricht, daß sich alle bekannten und berechneten Primzahlen (eben außer der 2) als ungerade erwiesen haben. Die ungeraden Nichtprimzahlen können wir als "$(2n_1 +1) \times (2n_2 + 1)$" berechnen, wenn für das erste und das zweite n alle ganzen Zahlen durchlaufen. Dann ergeben sich die ungeraden Primzahlen als Lücken zwischen den Nichtprimzahlen. Diese erhält man demnach durch Subtraktion gerader Zahlen ($2n_3$) von einer ungeraden Nichtprimzahl vor Erreichen der nächstniedrigen ungeraden Nichtprimzahl.

Bei den negativen rationalen Zahlen ergeben sich dieselben Verhältnisse in genauer Parallele, solange nur eine der intensionalen Komponenten des Zahlbegriffs als negativ behandelt wird, nicht aber beide zugleich. Letzteres ist eine Konvention, die auf der (stoischen) doppelten Negation beruht, die auch in der Mathematik dazu geführt hat, sie beim beim Multiplizieren oder Dividieren mit zwei negativen Faktoren zum Verschwinden zu bringen.

7. Die Anwendung der mathematischen Operation des Wurzelziehens auf negative Zahlen erzeugt bekanntlich die sogenannten imaginären Zahlen. Abgesehen davon, daß man ihren Zahlcharakter überhaupt bestreiten kann, ist ihr wesentliches Merkmal aber nicht die Negativität der Zahl, aus der sie erzeugt werden, sondern die dadurch erzwungene spezifische Zahlart. Sie enthält eine mit den bisher definierten Zahlen inkommensurable Einheit und ist daher bei den inkommensurablen Zahlen zu definieren.

8. Was die inkommensurable Zahlart betrifft, so haben wir sie dadurch definiert, daß bei ihr die Einheit E von der Einheit der Reihe n (1,2,3 ...) verschieden ist. Das Merkmal "Einheit" wird dadurch doppeldeutig: Es bezeichnet einerseits die "logische Einheit" (hier E), andererseits aber auch die für die Einzelelemente der Allheit zugrundegelegte, von E verschiedene mathematische Einheit. Damit umzugehen, hat jederzeit die größten Schwierigkeiten bereitet, schon beim Umgang der antiken Mathematiker mit der Inkommensurabilität und den Irrationalzahlen. Daher sind die Fortschritte der modernen Zahlentheorie auch hauptsächlich erst in neueren Zeiten als Ausbau dieser Zahlart zustande gekommen. Sie bestehen darin, diese Doppeldeutigkeit als Eindeutigkeit zu behandeln und daraus Folgerungen zu ziehen.

Da die Inkommensurablen als ungleichartige Zahleinheiten nebeneinandergestellt, also nicht durch Junktoren der Rechenarten zu Ausdrücken verknüpft werden, nennt man sie auch komplexe Zahlen ("zusammengesetzte", eigentlich und besser müßten sie isolierte Zahlarten heißen). Daneben heißen sie auch "Tupelzahlen", wobei man statt "Tupel" oft eine genaue Quantifikation der Einheiten einsetzt. Man spricht von binären Tupeln, Tripeln, Quadrupeln, Quintupeln usw. Dabei tragen einige "hyperkomplexe" Tupel den Namen ihrer Erfinder. So Hamiltons "Quaternionen" (aus 4 Einheiten gebildet), die Bi-Quaternionen Cayleys (aus 8 Einheiten gebildet) und die aus 16 Einheiten bestehenden Clifford-Zahlen. Die komplexen Zahlen werden in der Mathematik durch von Kommas abgetrennte Ziffern in geschweifen Klammern dargestellt. Das dissimuliert ihren Charakter als unverbundene Einheiten und läßt sie als "Auswahlen" geordneter Mengen erscheinen. Wir stellen sie formal als "$E \neq n$" (E verschieden von der Einheit von n) dar.

9. Kommensurable und inkommensurable Zahlen stehen als dihäretische Nebenarten im logischen Negationsverhältnis zueinander. Insofern sind sie auch genau unterscheidbar. Diese Unterscheidbarkeit wird durch die Verwendung der Buchstaben als Zahlvariablen dissimuliert. Die Buchstaben-Zahlen können sowohl für kommensurable als auch für inkommensurable Zahlen stehen und sind insofern ein gemeinsamer Begriff für beide. Dieser muß daher wiederum eine contradictio in terminis sein, sofern damit "Zahlen" und zugleich auch "Nicht-Zahlen" gemeint sind.

10. Die inkommensurablen Zahlen lassen sich in die beiden Arten der imaginären und der irrationalen (bzw. infinitesimalen) Zahlen einteilen.

Die imaginären Zahlen werden, wie oben gesagt, mathematisch durch die Wurzelziehung aus negativen Zahlen gebildet. Sie sind negative Zahlen, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergeben. Dies widerspricht der doppelten Negation, die in der Mathematik nur zu positiven Gebilden führt. Also kann es eigentlich keine solchen Zahlen geben. Man definiert sie daher durch eine neue Einheit "i" (imaginär), die sie von den anderen Zahlarten unterscheidet. Diese Einheit bleibt als selbständige (ggf. auch zahlenmäßig quantifizierte) Buchstabenzahleinheit neben dem numerischen Anteil stehen. Mathematisch werden sie als komplexe Zahleinheiten nebeneinander notiert, z. B. "n i". Wir können das übernehmen und " $E = i$ " setzen, so daß der Begriff der imaginären Zahlen lautet: "$E \neq n$" für $E = i$, $n = 1,2,3...$

11. Sind die Einheiten der imaginären Zahlen insofern ungleichartig, als die Einheit E nicht die Einheit von n sein soll, kehrt sich das Verhältnis bei den Irrationalzahlen als deren Nebenart um. Die Einheiten von n werden als verschieden von der Zahleinheit E und ihren rationalen Produkten und Quotienten gesetzt. Irrationalzahlen werden bei unbeschränkter Divisionsausführung als periodische und unendliche Brüche erzeugt, ebenso als Grenzwerte von Summen abnehmender oder zunehmender Größe (Cauchy-Folgen). Dedekind hat sie als "Dedekindsche Schnitte" auf der geometrischen Zahlengerade veranschaulicht (besser gesagt: postuliert). Eine rein arithmetische Begründung für diese Zahlart lieferte Cantor.

Bei ihnen bringt sich das im allgemeinen Zahlbegriff verschmolzene logische Merkmal des "alle" als selbständiges mathematisches Infinites (oder Infinitesimales) zur Geltung (also obwohl es ja schon im Zahlbegriff mitenthalten ist). Dieses Infinite ist hier das doppeldeutige Element im irrationalen Zahlbegriff. Logisch kann man es nur dialektisch beschreiben: Es bedeutet als Merkmal von n "und so weiter ohne Ende" und als Einheit E "bis dahin als Ende". Daher läßt es sich auch nicht als eigener Zahlausdruck darstellen. Man behilft sich daher gewöhnlich mit Punkten "n..." oder umschreibt es als "Grenzwert einer Reihe". Beide Darstellungsmittel sind selber zweideutig: Die Punkte stehen für Zahlen, die man in beliebiger Fortsetzung (je nach Fortschritt einer Rechenoperation), aber niemals "alle" angeben kann. "Grenzwert" steht für eine Zahl, der man sich nur kontinuierlich annähern kann, die aber niemals erreicht wird. Insofern ist die übliche Schreibung einer Irrationalzahl eine (komplexe) Nebeneinanderstellung eines rationalen Zahlteils und (durch Punkte bezeichnet) einer unendlichen (infinitesimalen) Allheit. Wir können es logisch darstellen als $E = \infty$, $n = 1,2,3...$

12. Die kontradiktorische Verschmelzung der Begriffe der imaginären und der Irrationalzahlen muß die spezifischen Differenzen beider Arten zugleich enthalten, dazu aber auch das gemeinsame generische Merkmal der komplexen Zahlen. Wir finden diese Merkmale im Begriff der Robertsonschen Non-Standardzahlen. Diese sollen Zahlen sein, aber nicht die bisherigen vorgeführten "Standardzahlen". In der Tat bestehen sie nur in der (komplexen) Nebeneinanderstellung inkommensurabler "Infinitesimalien" und Zahlen. Sie ordnen, wie man sagt, jeder Standard-Zahl eine Infinitesimal- (kleine oder große) Einheit zu, die keine Menge von Standard-Zahl-Einheiten enthält.

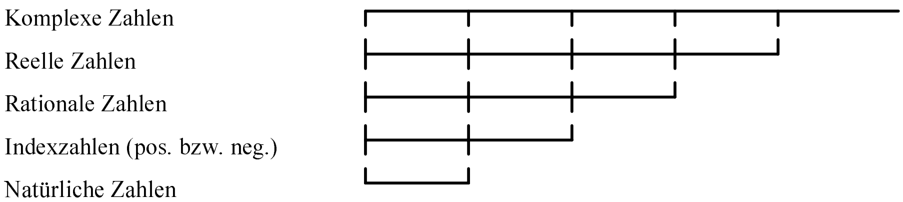
Wenn das so ist (oder sein soll), so erweist sich die Bezeichnung "Non-Standard-Zahlen" als irreführend. Wegen der (komplexen) Verbindung von Standard-Zahlen und infiniten Komponenten sollten sie genauer "Standard-Non-Standard-Zahlen" heißen. Legt man aber zugrunde, daß dabei arithmetische (numerische) und logische (Einheit, Allheit) Quantifikationen zu komplexen Zahlausdrücken koordiniert werden, so könnte man sie prägnanter sogar "arithmeto-logische Zahlen" nennen. Wir können sie logisch so ausdrücken: $E = n$, $n = \{ E, \infty\}$.

Natürlich hat man immer versucht, die Zahlarten und Unterarten in einem Klassifikationsschema zu ordnen. Aber das ist ebenso regelmäßig mißglückt. Was dabei erreicht wurde, entnehmen wir der Darstellung von W. und M. Kneale (The Development of Logic, 3. Aufl. Oxford 1964, S.394) und übersetzen:

"Wenn wir von einer sukzessiven Anreicherung des Zahlbegriffs sprechen, so neigen wir dazu zu denken, daß die Geschichte in einem Schema der folgenden Art zusammengefaßt werden kann, in dem die oblique gedruckten Namen für die (jeweils) neuen Zahlarten stehen, die unserem ursprünglichen Bestand hinzugefügt wurden:

natürliche
} Ganze
negative } rationale
Brüche } reelle
irrationale } Zahlen
imaginäre

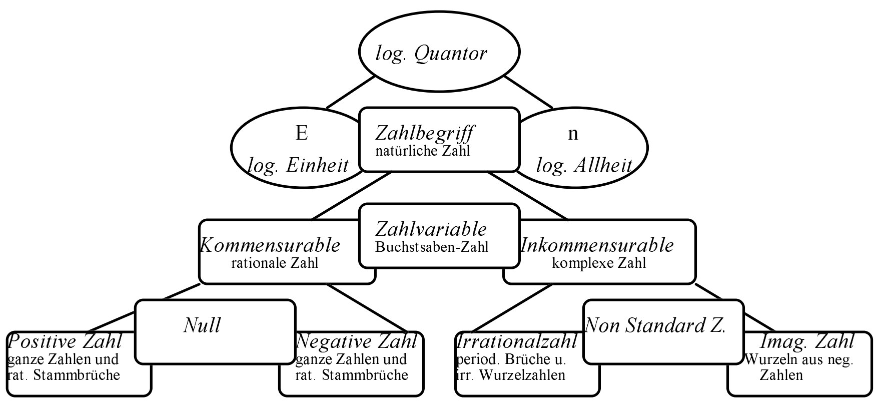
Ersichtlich wurden die ganzen Zahlen im Gegensatz zu den Brüchen so genannt, die rationalen Zahlen im Gegensatz zu den irrationalen, und die reellen Zahlen im Gegensatz zu den imaginären; und so suggeriert das Benennungssystem natürlich eine Klassifikation von Arten innerhalb einer Gattung. Aber diese Beschreibungsart der Entwicklung ist mißverständlich. Wir sollten eher von einer Hierarchie von fünf verschiedenen Zahltypen sprechen, in der jeder höhere Typ eine Untermenge enthält, die jedem niedereren Typ entspricht. Im folgenden Schema ist jeder Typ durch eine horizontale Linie dargestellt, und Entsprechungen werden durch vertikale unterbrochene Linien angezeigt:



(Zitatende)

Daß dies weder befriedigend noch besonders erhellend ist, dürfte auf der Hand liegen. Wir schlagen für die Hauptarten und Unterarten der Zahlen unter Berücksichtigung ihres dialektischen Charakters eine andere Anordnung vor. Dabei zeigen wir zunächst die Einbettung des Zahlbegriffs in den Begriff des logischen Quantors, wo er sich als kontradiktorische Verschmelzung der logischen Einheit (E) und der Allheit (n) ergibt (Intension des Zahlbegriffs daher "En").

Die logische Begriffspyramide des Zahlbegriffs und seiner Hauptarten und Unterarten sieht folgendermaßen aus:



g. Sogenannte Relationsbegriffe, Ähnlichkeitsbegriffe und "Familienähnlichkeit"

Sie sind durch die neuere mathematische Logik (A. de Morgan, C. S. Peirce, E. Schröder) zu einem vielverhandelten Thema gemacht worden und gelten seither als wesentliche Erweiterung des Begriffstypenarsenals der Logik. Man unterstellt dabei, daß die traditionelle Logik seit Aristoteles, der bekanntlich die "Relation" zu einer Kategorie erhoben hatte, ihre logische Bedeutung nur unzulänglich durchschaut habe, und daß sie jedenfalls in der klassischen Logik nicht adäquat darstellbar seien.

Die Voraussetzung dieses Vorwurfs und Anspruchs ist die übliche Notationsweise der "ganzen" Begriffe durch Buchstaben, mithin die Unsichtbarmachung der Relationen, die im Netz der Begriffspyramiden immer schon zwischen den Begriffen bestehen, und die durch die pyramidale Notation offengelegt werden.

"Relation" bzw. "Verhältnis" oder "Beziehung" kann logisch gesehen nur ein inhaltliches Beispiel für einen Begriff überhaupt sein. Es ist daher sehr merkwürdig, daß durch die neueren "Relationsbegriffe" inhaltliche Beispiele zu logisch formalen Gebilden erklärt werden. Die Sache erklärt sich auch nur dadurch, daß die Relationen in der Geometrie und Arithmetik seit jeher zum Gegenstandsgebiet der Mathematik gehören und somit im Wege der "Mathematisierung der Logik" in diese übernommen wurden. Man erkennt das an den in der mathematischen Logik bevorzugten Beispielen für Relationsbegriffe. Noch immer stehen das geometrische "Zwischenliegen" (etwa eines Punktes auf einer Geraden zwischen zwei anderen Punkten) oder das arithmetische "größer" und "kleiner" von Zahlengrößen in der Reihe der natürlichen Zahlen als Hauptparadigmen im Mittelpunkt der logischen Betrachtung. Die formale Notation erweist denn auch sehr anschaulich, daß hier versucht wurde, ein "Zwischenliegen" direkt abzubilden: "a R b", soll heißen "die Relation zwischen den Begriffen a und b". Dergleichen wird in der Mathematik durch Funktionsgleichungen dargestellt, die sich ihrer Natur nach auf solche "Abhängigkeiten" und "Beziehungen" beziehen. X = (f)Y soll heißen: X steht in einer wie immer bestimmten Abhängigkeit bzw. Relation zu Y. Man kann daher sagen, die neueren Relationsbegriffe sind selbst der Versuch, das Wesen der mathematischen Funktion in der Logik auf den Begriff zu bringen.

Die logische Frage kann hier nur sein, ob "R" (Relation) selbst ein Begriff ist. Und wenn das so wäre, so wäre nicht einzusehen, warum er in Verknüpfung mit zwei anderen notiert und expliziert werden sollte. Handelt es sich dagegen beim Relationsbegriff "a R b" um einen komplexen begrifflichen Ausdruck, so müßte es sich bei "R" um einen speziellen Junktor für die Ausdrucksbildung handeln, der ganz neu in die Logik eingeführt worden wäre. Wenn dies so wäre, müßte er sich in einer Theorie der Junktoren - die wir später entwickeln werden - auch in seiner Funktion explizieren und formal darstellen lassen. Dies ist bisher nicht geschehen. Auch wir werden ihn nicht als neuen Junktor behandeln. Wohl aber läßt sich hier schon vorausnehmend sagen, daß er - seiner Herkunft aus der mathematischen Funktionsgleichung gemäß - allenfalls als ein zusammengesetzter Junktor konstruierbar wäre. Er bedeutet dann "zugleich gleich und ungleich", und das ist eine Zusammenfassung der Gleichung und der Ungleichung in einem Junktor (mathematisch "< = >", "kleiner gleich größer", oder einfacher: ≊, "gleich und ungleich"). Ersichtlich bezieht sich dasjenige, was hier "gleich" genannt werden kann, auf Identitäten, das Ungleiche auf Verschiedenheiten bzw. Unterschiedenheiten im "Ähnlichen".

Nun spricht schon der Reichtum aller Sprachen an Wörtern und Partikeln, die Verhältnisse und Beziehungen ausdrücken, dagegen, daß sie alle auf eine bestimmte Begriffsform zurückgeführt und durch einen formalen Relationsbegriff logisch dargestellt werden könnten. Was könnte das Wort "Bruder" (nämlich "Bruder im Verhältnis zu anderen Geschwistern") mit der räumlichen Partikel "vor etwas befindlich" oder der zeitlichen Partikel "jünger als..." an logischem Sinn gemeinsam haben, was "auf den Begriff zu bringen" wäre. Alles dies kann und muß für eine logische Betrachtungsweise in inhaltlichen Urteilen vorkommen und ausgesprochen werden, und diese werden je nach dem Sachverhalt recht verschieden aussehen.

Aristoteles hat die Relationskategorie unter die Akzidenzkategorien eingeordnet - neben der Substanzkategorie -, und er ging davon aus, daß alle Kategorien in jeweils verschiedener Weise eine Seinsbestimmung seien. Sein logischer Fehler bestand darin nicht zu erkennen, daß er in seinen Anwendungen die "Relation" (pros ti) zu einem gemeinsamen Oberbegriff aller Akzidenzkategorien machte, insofern jede akzidentelle Bestimmung einer Substanz schon eine Beziehung "wesentlicher" oder "zufälliger" (im engeren Sinne akzidenteller) Merkmale eines Substanzbegriffs zum Ausdruck brachte. Die "Qualitätskategorie" (poion) stellte eine Relation einer Eigenschaft zu einer Trägersubstanz her, die "Quantitätskategorie" (poson) eine Relation zwischen den Individuen oder "einigen" Exemplaren und ihrer Gattung (die "alle" Exemplare umfaßt), die Raumbestimmung (pou) einen "Ort" im Verhältnis zu dem, was "vor, hinter und neben" einer Substanz stehen konnte, und die Zeitbestimmung (pote) ein Verhältnis zum "Früheren und Späteren". Auf jeden Fall beging Aristoteles dabei nicht den Fehler Kants, die Relationskategorie zum Oberbegriff auch der Substanz zu erheben, die dadurch von Kant als ein "internes Relationsverhältnis zu sich selber" definiert werden mußte.

Wie man daran sieht, hat Aristoteles sowohl rein logische Beziehungsverhältnisse von Merkmalen oder Extensionen der Begriffe als auch ontische Bestimmungen von räumlichen und zeitlichen Beziehungen, die nur "inhaltlich" (an Beispielen angewandter Logik) zu explizieren waren, gleicherweise unter seine Relationskategorie gestellt. Diese Verquickung logisch-formaler und inhaltlicher Sachverhalte hat sich auch in der neueren Relationenlogik durchgehalten. Sie liegt u. E. auch noch der Problematik "interner" und "externer" Relationen zugrunde, die vielfach in der Wissenschaftstheorie verhandelt werden.

Die stoische Kategorienlehre (s. u.) stellte die nebengeordneten Hauptkategorien des Aristoteles in ein "vertikales" Verhältnis zunehmender Spezifikation der Substanzkategorie (hypokeimenen). Die "Relation" als unterste wurde dadurch selbst zu einer Spezifikation des Substanzbegriffs - was offensichtlich auch Kant zu seinem Kategorienfehler bezüglich der Substanz inspiriert hat.

Von Aristoteles ausgehend ist nun mit allem Nachdruck darauf zu beharren, daß alle logischen Bestimmungen von Begriffen selbst schon Relationen zwischen ihren intensionalen und extensionalen Komponenten zum Ausdruck bringen. Und das kann nur heißen, daß es keinen besonderen logischen Begriffstyp "Relationsbegriff" geben kann, der in Anwendungen auf inhaltliche Beispiele diesen eine bestimmte logische Struktur aufzwingen würde. Es ist vielmehr eine jeweils einzeln zu entscheidende Frage der Anwendung der bisher vorgeführten Begriffstypen und ihrer junktoriellen Verbindung zu Ausdrücken auf Sachverhalte, ob und welche "ontischen" Beziehungen und Relationen damit dargestellt werden können. Das schließt auch geometrische und arithmetische Sachverhalte ein.

Wir haben in der "Logik" (Aalen 1987, S. 106) ein Beispiel für die pyramidale Explikation des Begriffs "Vater" (der auch sonst gerne als Beispiel für einen Relationsbegriff dient) gegeben. Achtet man beim Begriff "Vater" auf seine generischen Merkmale (die ja nicht durch das Wort "Vater" direkt evoziert werden, sondern die man bei richtigem Verständnis "hinzudenken" muß), so gehört zu diesen die Intension "Kindsein" (denn jeder Vater ist selbst ein Kind eines Vaters). Und das heißt, daß der Begriff "Vater" ein Artbegriff der Gattung "Kind" sein muß, unter welche auch die Nebenart der "Nicht-Väter", nämlich Kinder, die nicht selbst Kinder haben, fällt. Ist aber die zugehörige Gattung aller Väter "Kindsein", so hält sich das generische Merkmal der Gattung auch bei allen Unter- und Unter-unter-Arten der Väter, nämlich bei den "Großvätern", "Urgroßvätern" usw., die in dieser Reihenfolge als Unterbegriffe unter die "Väter" zu stellen sind. Man bemerkt leicht, daß dabei auch die "Großväter" und "Urgroßväter" usw. selbst auch (generisch) als "Väter" und "Kinder" definiert bleiben.

An diesem Beispiel sieht man, daß das Allgemeinheitsgefälle von Begriffen selbst schon sehr viel genauere logische Relationen zum Ausdruck bringt, als man sie in der sog. Relationenlogik darstellen kann.

Das muß nun auch vom Querverhältnis von Begriffen gelten. So bilden die "Brüder" eine der Arten der Gattung "Geschwister" und hat zur Nebenart die "Schwestern". Aus diesen logischen Bedingungen muß sich alles Relevante in Urteilen über das Verhältnis einzelner Brüder untereinander (sie sind als Individuen unter die Brüder-Art zu stellen) und zu den Schwestern ausdrücken lassen. Das Entsprechende muß auch von denjenigen Relationen gelten, die etwa in der Tense-Logik (Zeit-Logik) zwischen Zeitpunkten bzw. Perioden konstruiert werden. Hier wird das "Früher" und "Später" zunächst mit den mathematischen Relationen "größer" und "kleiner" zwischen Zahlgrößen dargestellt und diese auf einer Zeitachse abgebildet. Die Darstellung in mathematischer Begrifflichkeit ist aber schon eine inhaltliche Anwendung der Logik und daher nicht mehr formal. Die formale Behandlung der Zeitverhältnisse bedient sich dann aber auch in der Tense-Logik des (korrelierenden) Implikationsjunktors.

Auch die *"Ähnlichkeit"* wird in der Logik als Relationsbegriff gehandelt. Insbesondere seit Wittgensteins "Logischen Untersuchungen" von 1953 wird er zugespitzt als "Familienähnlichkeit" geradezu als neue Entdeckung in der Logik ausgegeben.

Das Denken in Ähnlichkeiten hat in der Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte eine lange und ehrwürdige Tradition. Das sieht man am deutlichsten an der bedeutenden Rolle, die hier jederzeit die Gleichnisse, Metaphern, Analogien und Modelle gespielt haben. Ihrer Verwendung verdanken sich viele

Entdeckungen, denn sie schärfen in aller Heuristik den Blick für neuartige und bislang undurchsichtige Verhältnisse, die im Vergleich mit anderen wohlbekannten Verhältnissen deutlichere Konturen gewinnen. Aber alles dies bleibt noch im Vorfeld der Logik und dient der Heuristik.

Das Analogiedenken ist durch die Theorie von der "Analogia entis" des Thomas von Aquin in den engeren Gesichtskreis der Logik geraten. Thomas interpretierte die Feststellung des Aristoteles, "daß die (von ihm aufgestellten) Kategorien den Seinsbegriff in jeweils verschiedener Weise aussagen" (pollachos legethai), so, daß jede einzelne Kategorie als Unterbegriff des obersten und allgemeinsten Begriff des Seins (to on) dieses nur "analog" enthalte. Das stand in erklärtem Gegensatz gegen die traditionelle "alexandrinische" (des Alexander von Aphrodisias) und damals zeitgenössische Interpretation dieser Stelle von Johannes Duns Scotus, daß das "pollachos legethai" nur die regelmäßige Eigenschaft aller Gattungsbegriffe bedeute, nämlich daß ihre generischen Merkmale (die "Bedeutung von Sein ") voll und in identischer Weise in allen Arten der Kategorien enthalten sei.

Von dieser Seite aus gesehen, konnte der Analogiebegriff des Seins nur eine contradictio in adiecto sein, indem darin sowohl eine Identität (der generischen Seins-Merkmale in den Kategorien) als auch zugleich deren Nichtidentität behauptet wurde. Es liegt auf der Hand, daß die scotistische die allein "logische" Interpretation des Begriffsverhältnisses von Sein und Kategorien sein konnte (gleichgültig, was das für Folgen für die ontologische Anwendung der Kategorien hatte)

Gleichwohl haben sich die Frontstellungen von Anhängern und Gegnern der Analogielehre bis heute erhalten. Man kann aber zugleich auch feststellen: Die Front verläuft noch immer zwischen Logikern und "Dialektikern", die unter der Devise des Analogiedenkens das Denken in Widersprüchen pflegen.

Nach allem Gesagten dürfte ja klar sein, daß auch die "Ähnlichkeit" keine Relation zwischen Begriffen herstellt. Die Ähnlichkeit ist zwar ein Verhältnis zwischen (ontischen) Gegebenheiten, aber sie ist nur die Ausgangslage dafür, daß es dabei einerseits etwas Gemeinsames bzw. Identisches, daneben aber auch einen klaren Unterschied in den ähnlichen Sachverhalten geben muß. Zwei Dinge oder Sachverhalte als "ähnlich" zu bezeichnen, kann als heuristische Vorstufe nur dazu dienen, nach den Identitäten und spezifischen Verschiedenheiten bei diesen Gegebenheiten zu fahnden. Die Identitäten aber werden dann durch einen gemeinsamen Begriff ausgedrückt, und die Verschiedenheiten müssen sich in Artbegriffen artikulieren lassen.

Wittgenstein glaubte an die Anschaulichkeit der individuellen Sachverhalte und an die Unanschaulichkeit der Begriffe. Das Allgemeine hielt er durch die 'Anhörlichkeit' (so könnte man das nennen) der Wörter der Sprache für repräsentiert, und dies auch in den Fällen, wo solche Wörter mit "gleicher" Lautung reine Homonyme sind. Streng genommen muß das auch bedeuten, daß jeder Begriff sogar seinen eigenen Terminus (in scholastischer "materialer" Supposition) unter sich begreift: Die Ähnlichkeit, die durch das Wort "Wort" ausgedrückt werden soll, muß dann zwischen allen Wörtern, aber auch zwischen diesen und dem Wort "Wort" als purer Buchstabenfolge bestehen. In seinem Lieblingsbeispiel des Ähnlichkeitsbegriffs "Spiel" zeigte Wittgenstein deutlich, daß er Ähnlichkeiten auch dort "hörte" (denn "sehen" kann man das nicht nennen), wo die ähnlichen Sachverhalte kein einziges gemeinsames Merkmal aufweisen. Und er ging dabei so weit, das Wesen des Allgemeinbegriffs schlechthin darin zu legen, nur Ähnlichkeiten in den Sachverhalten zu "verlauten". Dadurch wurde ihm die Bezeichnung (genauer müßte man sagen: die Verlautbarung) von Ähnlichkeit überhaupt zum Wesen des Begriffs. Das wird genau so von den Analogisten thomistischer Provenienz behauptet, und Wittgenstein erweist sich als ihr logischer Anwalt.

Über Wittgensteins Theorie der "familienähnlichen Begriffe" haben wir an anderer Stelle gehandelt (vgl. Website L. Geldsetzer beim Philosophischen Institut der HHU Düsseldorf). Es läßt sich zeigen, daß Wittgenstein die Verhältnisse in einer Familie mit dem Aufbau einer Begriffsstruktur verwechselte, indem er meinte, "Vater" und "Mutter" mit ihren eigenen physiognomischen Merkmalen seien zugleich Allgemeinbegriffe für ein Kontinuum ungeregelter Merkmalsverteilungen bei ihren Kindern. Es lassen sich dafür aber ohne weiteres in pyramidaler Anordnung innerhalb eines obersten Gattungsbegriffs "Familie" zwei Artbegriffe mit den "vom Vater" bzw. "von der Mutter herstammenden Familieneigenschaften" definieren. Diese "Familieneigenschaften" verteilen sich dann auf die "Eigenschaftskomplexionen" als Unterarten. Es ist klar, daß man bei dieser innerfamiliären Verteilung von Merkmalen logisch nicht über die individuellen Personen als Träger, sondern über Merkmalsverteilungen in Arten und Unterarten spricht. Wittgenstein als nominalistischer Realist aber setzte fälschlicherweise voraus, man könne in der Logik nur über reale Dinge oder personale Individuen sprechen.

Auch die Wittgensteinsche "Familienähnlichkeit" als Relationsbegriff ist sicher ein starkes Argument dafür, daß sich die Ähnlichkeiten ebenso wie die Relationen nicht durch eigene logische Begriffstypen, sondern durch die logischen Verhältnisse zwischen regulären logischen Begriffen und ggf, ihren intensionalen und extensionalen Komponenten beschreiben lassen.

h. Der Begriff des Begriffs in der stoischen Logik.

Die stoische Begriffslehre ist weit weniger detailliert ausgebildet worden, als es die klassisch-aristotelische war, auf deren Grundlage wir auch die im vorangehenden dargestellten Begriffsarten formalisiert haben. Gleichwohl verdient sie hier eine Berücksichtigung, da sie auch in modernen Formen noch präsent ist, die ohne Verständnis ihrer Herkunft aus der stoischen Logik kaum verständlich wären.

Wie Aristoteles und sicher nicht ohne Anregung von seiner Begriffslehre her hielten die Stoiker die gewöhnlichen Begriffe für Abbilder der materiellen Dinge in der (selbst feinmateriellen "pneumatischen") Seele. Die psychischen Vorstellungen nannten sie allgemein *Phántasma* (Denkgebilde, Vorstellung), die speziell logischen Denkbilder nannten sie *Lektón*. Aus der sinnlichen Erfahrung gewonnen, verweisen diese "empirischen" Lektá auch auf die ihnen zugrundeliegenden Gegenstände, die Dinge und Sachverhalte zurück und bringen sie ggf. in Erinnerung. Die durch solche Lekta gedachten und durch sie "abgebildeten" Sachverhalte selbst nannten sie *Týgchanon*, "dasjenige, worauf der empirische Begriff zutrifft" bzw. nach heutigem Ausdruck "referiert".

Das einfache Abbildverhältnis von Sachverhalt und anschaulichem Denkgebilde wird kompliziert dadurch, daß die Stoiker die lautlichen und schriftlichen Zeichen (*Semeíon*) in ihre Betrachtungen einbezogen. Die Zeichen sind selbst materielle Gegenstände, die die begrifflichen Denkgebilde repräsentieren, jedoch nicht abbilden. Dies galt ihnen besonders von den Eigennamen von Personen, die bei ihnen paradigmatisch für höchst komplexe Erfahrungstatbestände aus der Vita der bezeichneten Personen standen. Wir können hier bemerken, daß diese Repräsentation von Begriffen durch (nicht abbildende) Zeichen und insbesondere Lautzeichen die Grundlage dafür abgegeben hat, überhaupt angeblich unanschauliche (aber dafür "verlautbarte") Begriffe für Begriffe zu halten.

Nochmals kompliziert wird die stoische Begriffslehre durch ihre "rationalistische" Voraussetzung eines die Weltvernunft bildenden "*Pneumas*", das alle Wirklichkeit durchdringt, ordnet und steuert, und das sich in den Lebewesen einschließlich der Menschen als natürliche Mitgift der "*Lógoi spermatikoí*" (Vernunft-Samenkräfte) zur Geltung bringt. Auf dieser Mitgift beruhen beim Menschen die allgemeinsten und allen Menschen gemeinsamen Grundbegriffe, die sie *Koinaí énnoiai* (gemeinsame innere Denk- bzw. Vernunftanlagen, lateinisch: *notiones communes)* nannten. Da sie nicht aus der sinnlichen Erfahrung stammen sollten, konnten sie weder anschaulich sein noch auf Anschauungen zurückgeführt werden. Gleichwohl sollten gerade sie durch sprachliche Zeichen repräsentiert und dadurch der logischen Handhabung zugänglich gemacht werden können.

Mit dieser Begriffslehre legten die Stoiker den Grund für die auch heute noch oder wieder übliche sprach-logische Semantik, die wesentlich vom sprachlichen und/oder logischen Zeichen ausgeht und diesem dann zwei Bezeichnungsdimensionen zuspricht, nämlich eine auf das psychische Phantasma (lektón) gerichtete und eine zweite auf den tatsächlichen Sachverhalt gerichtete. Die scholastische Logik hat diese beiden semantischen Dimensionen der Zeichen als "erste" und "zweite Intention" bezeichnet. Die neuere Semantik hat sie mit "Intension" (Begriffsinhalt, Sinn bzw. Bedeutung) und "Extension" (Begriffsumfang, Gegenstand) in Verbindung gebracht.

Ebenso ist die stoische Meinung über die "angeborenen" allgemeinsten Vernunftbegriffe zur Grundlage der kantischen Lehre von der Apriorität der von ihm sogenannten Anschauungsformen (Raum und Zeit), der Verstandeskategorien und der Vernunftideen geworden. Kant hat sich bekanntlich heftig dagegen gewehrt, seine Apriori-Lehre mit der platonischen Lehre von den "eingeborenen Ideen" in Verbindung zu bringen. Auf ihre Herkunft von den Stoikern, von denen er auch sonst vielerlei Anregungen aufnahm, hat er selbst niemals hingewiesen. Über Kants Apriori-Lehre aber sind die "unan schaulichen" allgemeinsten Begriffe (Kategorien, axiomatische Grundbegriffe) direkt in die Grundlagen der modernen Logik eingegangen.

Die Problematik, die sich aus der Annahme der unanschaulichen Koinaí énnoiai und ihrer Repräsentanz durch Zeichen ergibt, die keinen "Referenten in der Wirklichkeit" (týgchanon) haben sollen, ist weder von den Stoikern noch von der scholastischen und modernen Semantik, und auch nicht von Kant gelöst worden. Man kann vielmehr feststellen, daß sie späterhin kaum noch als Problem empfunden wurde. Wie sonst ließe sich erklären, daß die moderne Logik mit größter Selbstverständlichkeit davon ausgeht, es könne überhaupt "unanschauliche Begriffe" geben, die dann in logischer Terminologie "undefinierbar" oder "undefiniert", "mit beliebigem Inhalt erfüllbar" oder gar "intensionslos" genannt werden? An Stelle von Begriffen werden hier "leere Zeichen" eingeführt, die freilich ebenso wenig überhaupt Zeichen sein können, wie "leere Begriffe" überhaupt Begriffe. Und so muß man sich nicht wundern, wenn die modernen Lektá höchst abstrakter Wissenschaften statt in psychischen "Anschauungen" in psychischen "Anhörungen" (den Laut-Bildern) aller möglichen Alphabete bestehen.

Daß dergleichen überhaupt möglich ist, beruht aber auf der von den Stoikern und ihren modernen Nachfolgern geflissentlich übersehenen Tatsache, daß auch die (künstlichen) Zeichen nichts anderes als Tygchanoi, also Bestandteile der sinnlich wahrnehmbaren Wirklichkeit sind. Als sprachliche Zeichen evozieren sie selbst in derselben Weise akustische Erinnerungsbilder, wie sonstige Gegenstände visuelle Erinnerungsbilder hervorrufen. Wo dann der visuell-anschauliche Begriff fehlt, stellt sich - nach Goethes treffender Bemerkung - schnell ein Laut-Wort oder Wort-Laut ein, und dieser vertritt dann den Begriff. Von diesen "Termen" als Tygchanon sollte aber nicht die Logik, sondern die Grammatik handeln.

Ein anderer Weg, das Bedeutungsproblem zu umgehen, ist die Vertretung des (unanschaulichen) Tygchanon durch "veranschaulichende Modelle aus der Wirklichkeit" (nach demokriteischem Vorbild) gewesen. Er belastet seither ersichtlich die Theorien über die "unanschaulichen Begriffe" mit einer zweideutigen Metaphorik des Bedeutungsbegriffs. Wie Demokrit die Buchstaben als anschauliche Modelle für die unanschaulichen (weil zu winzigen und somit unsichtbaren) Atome vorschlug, so hat man sich etwa die Grundbegriffe der (unanschaulichen) Arithmetik als geometrische Punkte, Linien, Flächen und Körper vorzustellen, die aber zugleich genau das nicht sind, was die Geometrie darüber lehrt. Kurzum, das Problem der "unanschaulichen Begriffe" scheint so nicht lösbar, vielmehr bietet sich hierzu nur der Weg an, auch diese angeblich unanschaulichen rationalen Begriffe auf Anschauungen zurückzuführen. Das haben wir in Anknüpfung an die Begriffslehre George Berkeleys schon in der im vorigen explizierten Begriffslehre getan, indem wir mittels der pyramidalen Begriffsstruktur zeigten, daß auch in den allgemeinsten Begriffen immer einzelne intensionale Merkmale der unteren Begriffe identisch festgehalten und für die Aufmerksamkeit fixiert werden. Sind sie als Merkmale der unteren Begriffe anschaulich, so müssen sie es auch als "herausabstrahierte" Merkmale oberer Begriffe bleiben.

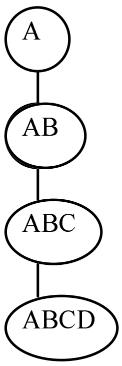
Auf diesen, wie man sieht bis heute fragwürdigen Voraussetzungen anerkannten die Stoiker auch ein Allgemeinheitsgefälle der Begriffe, wie schon ihre Unterscheidung und Überordnung der rationalen "unanschaulichen" (allgemeinen) gegenüber den empirischen "anschaulichen" (konkreten) Begriffen zeigt. Bezüglich der anschaulichen empirischen Begriffe kann man nur aus ihren Diskussionsbeispielen entnehmen, wie sie sich hier das Allgemeinheitsgefälle vorstellten. Es ergibt sich vom Allgemeinen zum Besonderen grundsätzlich (wie auch in der aristotelischen Begriffslehre) durch Anreicherung von Merkmalen in den psychischen Vorstellungskomplexen (z. B. "Sokrates", "das Umhergehen des Sokrates", "das gemächliche Umhergehen des Sokrates", "das abendliche gemächliche Umhergehen des Sokraters", usw.). Nur bei der logischen Verdeutlichung ihrer Kategorienlehre, also der allgemeinsten und somit nach ihnen unanschaulichen Begriffe, haben sie dieses Allgemeinheitsgefälle auch logisch klar dargestellt.

Oberste Kategorie und somit allgemeinster rationaler Begriff war ihnen der *Substanzbegriff (Hypokeímenon)*. Aus ihm wurde ein darunterstehender, weniger allgemeiner Begriff der *Qualität* durch Hinzufügung eines Spezifikums gebildet, das wie bei Aristoteles durch das Fragewort "Wie" (Poión) ausgedrückt wurde. Qualität wurde so als *"Wie (beschaffene) Substanz" (Poión hypokeímenon)* definiert. Der nächste Unterbegriff war ihnen das "*Verhalten*", das durch die weitere Spezifikation "Wie sich verhaltend" (Pôs échon) ausgedrückt wurde, insgesamt also als "*Pôs échon poión hypokeímenon*". Die unterste und vierte Kategorie war dann die *Relation*, die mit Hilfe der Spezifikation "in Bezug auf was" als *"In Bezug auf was sich wie verhaltende wie beschaffene Substanz" (Pros ti pôs échon poión hypokeímenon)* definiert wurde.

An der Tatsache, daß hier die Spezifikationen durch Fragewörter benannt werden, die ja auch Aristoteles zur Auffindung und Benennung seiner (ansonsten nicht nach einem "genus proximum" definierbaren) Kategorien verwendet hatte, erkennt man, daß die Stoiker Aristoteles darin gefolgt sind. Ebenso zeigt die Anreicherung der Spezifika bei den unteren Kategorien, daß sie die Einsicht des Aristoteles übernahmen, daß die "generischen Merkmale" oberer Begriffe in ihren Unterbegriffen jeweils vollständig mitenthalten sind, und daß die dann hinzukommenden spezifischen Differenzen den Unterbegriff auch vom Oberbegriff unterscheiden.

Formal läßt sich das Allgemeinheitsgefälle der stoischen Begriffslehre folgendermaßen darstellen:

Stoischer logischer Begriffsstamm der Kategorien



Substanz	hypokeimenon
Qualität	poion hypokeimenon
Verhalten	pos echon poion hypokeimenon
Relation	pros ti pos echon poion hypokeimenon

Ersichtlich sind die Stoiker dabei nicht der platonischen (im Angelfischerbeispiel aus dem Dialog "Sophistes" vorgeführten) und aristotelischen Einsicht in die "Verzweigung" von Unterbegriffen in (mindestens) zwei Artbegriffe und der Arten in (mindestens) zwei Unterartbegriffe gefolgt, die sich jeweils - schon nach Platon - durch gegenseitige Negation definieren lassen. Der Grund dafür dürfte in ihrer Ablehnung der aristotelischen, in dessen Syllogistik häufig benutzten "unbestimmten" Partikularisierung der Begriffe sein. Fehlt aber die Partikularisierung und Individualisierung als logische Auszeichnungsmöglichkeit von Begriffen, so wird es auch sinnlos, von Universalisierung bzw. von "alle" hinsichtlich eines Begriffes zu sprechen (ein Faktum, das etwa Benson Mates, Stoic Logic, 1973, S. 32, unerklärbar erscheint).

Diese Vernachlässigung des extensionalen Aspektes der Begriffe, der nachmals dazu geführt hat, die stoische Logik insgesamt als eine rein intensionale Logik zu betrachten, wurde allerdings in der neueren mathematischen Logik zum Ausgangspunkt für die exakte Metrisierung der Begriffe und somit für den modernen "metrischen Begriff". Denn an die Stelle der "unbestimmten" Partikularisierung von Arten und Unterarten durch "einige" und "ein", wie sie Aritoteles logisch verwendete, konnten dann exakte Zahlangaben treten, die bei der empirischen Abzählung und Messung von Begriffsinstanzen gewonnen wurden. Damit wurde die stoische, und nicht die aristotelische Begriffslehre, auch zur Grundlage der Begriffslogik der exakten "messenden" Wissenschaften. Wir haben darauf schon bei der Konstruktion des Zahlbegriffs Bezug genommen.

Zuletzt ist noch festzustellen, daß die Stoiker die Begriffe für "wahre" Abbilder entweder der faktischen Realität oder, bei den unanschaulichen Begriffen, für "wahre" angeborene Denkformen hielten. Dies steht in entschiedenem Gegensatz zur aristotelischen Begriffslehre, nach der Begriffe als solche weder wahr noch falsch sein konnten. Sextus Empirikos kritisierte diese stoische Überzeugung mit dem (aristotelischen) Argument, daß allgemeine Begriffe ("generiká") wie etwa "Mensch" schon deshalb weder wahr noch falsch sein könnten, weil sie Arten wie etwa "Griechen" und "Barbaren" zugleich umfassen, deren wahre (oder falsche) Zuschreibung auf einzelne Menschen vom allgemeinen Begriff nicht gilt. Benson Mates hält dies für eine "kryptische" Bemerkung und notiert in einer Fußnote: "Man bemerke, daß diese Art von Aussage, welche die Menschen zweitausend Jahre lang für wahr und bemerkenswert gehalten haben, nach der Typentheorie unsinnig (nonsensical) ist, und ebenso ist es die Begründung, die in diesem Beispiel gegeben wird" (B. Mates, Stoic Logik, 1973, S. 34, Fußn. 41).

Es ist wohl auch als Kritik an der Wahrheitspräsumption der Begriffe zu werten, wenn Sextus Empirikos am Beispiel eines Traumerlebnisses nachweisen will, daß es dann auch zugleich wahre und falsche Begriffe geben müsse. Wenn die im Traum als anwesend erlebten Personen tatsächlich noch leben, müßten die Stoiker ihre "Vorstellung" deswegen "wahr", aber da sie nicht wirklich anwesend sind, zugleich "falsch" nennen.

Daß die stoische Meinung über die Wahrheit der Begriffe noch lebendig ist, kann man dem verbreiteten Sprachgebrauch über "wahre Begriffe" entnehmen. Hier kann aber schon im voraus erwähnt werden, daß die Stoiker wegen dieser Wahrheitspräsumption der Begriffe alles daran setzen mußten, die logische Falschheit auf die Verknüpfung von Begriffen mittels der Junktoren zurückzuführen. Und das zeigt ihre Urteilteilslehre bzw. das, was man als "Aussagenlogik" dafür hält, auf die später einzugehen ist.

i. Die Methoden der Begriffsbildung: Induktion, Deduktion, Analyse und Synthese

Begriffe werden in aller Regel im Ausgang von Wörtern der Sprache gebildet. Wörter evozieren gewöhnlich einfache oder komplexe Vorstellungen, die logisch als einfache oder komplexe Intensionen zu behandeln sind.

Sind diese Vorstellungen bzw. Intensionen einfach, so lassen sie sich zu komplexen Vorstellungen oder Intensionen zusammenstellen, "synthetisieren". Man bildet dadurch konkrete Begriffe. Sind sie komplex, so lassen sie sich in ihre einfachen Komponenten zerlegen, "analysieren". Dadurch kommt man zu (abstrakten) Allgemeinbegriffen.

Man bemerke aber sogleich, daß man die methodischen Begriffe "Analyse" und Synthese" auch auf die Extensionen von Begriffen anwendet. In diesem Falle haben sie gerade die gegenteilige Bedeutung. Man "synthetisiert" dann das Allgemeine, indem man es aus den extensionalen Besonderheiten zusammensetzt, und man "analysiert" das Allgemeine, indem man seine Extensionen aufzeigt. Diese Doppeldeutigkeit ist ein Grund ziemlicher Verwirrungen in der Logik geworden.

Die Analyse der Bedeutungen von Wörtern im erstgenannten Sinne führt zur Isolierung ihrer Bedeutungskomponenten, also einfachen Intensionen, für die gewöhnlich in einer Bildungssprache schon eigene Wörter zur Verfügung stehen. Diese liefern die Vorlage für allgemeine Begriffe. Die Synthese einfacher Bedeutungen zu komplexen Bedeutungen führt in der Regel zu konkreten Begriffen, für deren Bezeichnung ebenfalls gewöhnlich reichliches Wortmaterial in den Sprachen zur Verfügung steht.

Um aus diesen Bedeutungsevokationen logische Begriffe zu machen, müssen sie in ein übersichtliches Verhältnis zueinander gestellt werden. Dies geschieht durch die Festlegung der Extensionen. Extensionen beruhen auf den Erinnerungsspuren der Analysen von komplexen Intensionen derart, daß die Herkunft einfacher Intensionen aus den Intensionenkomplexen, aus denen sie herausanalysiert wurden, bewußt bleibt. Die Extension einer einfachen Intension und damit eines allgemeinen Begriffs bezeichnet somit alle komplexen Vorstellungen, aus denen sie "abstrahiert" wurden. Diese fallen dann in den extensionalen Umfang des allgemeinen Begriffs. Die logische Analyse der Bedeutungen sprachlicher Wörter liefert bei konsequenter Anwendung rudimentäre Begriffspyramiden.

Geben wir ein Beispiel. Weiß man, was Stühle, Bänke, Tische, Truhen und Schränke sind, so weiß man von ihnen auch, daß sie in den Räumen eines Hauses bewegliche Einrichtungsgegenstände sind. Die Intensionen bzw. die Merkmale, "beweglicher Einrichtungsgegenstand" (Mobilie, Möbel) ist eine gemeinsame Bedeutungskomponente jedes einzelnen genannten Gegenstandes und wird durch seine wörtliche Bezeichnung mitevoziert. Wer sich bei dem Wort "Möbel" überhaupt etwas vorstellt, denkt bzw. erinnert sich dabei eben an Stühle, Bänke, Tische usw. Analysiert man die Merkmale der einzelnen Möbelstücke weiter, so wird man darauf achten, daß einige das gemeinsame Merkmal "zum Sitzen geeignet" evozieren, andere das gemeinsame Merkmal "zum Aufbewahren geeignet". Auch hierfür stehen gewöhnlich Wörter zur Verfügung, z. B. "Sitzmöbel" und "Behälter". Man erinnert sich, daß sowohl die "Sitzmöbel" wie auch die "Behälter" jeweils Gruppen von einzelnen Möbeln unterscheiden lassen, ebenso auch, daß sie gemeinsam unter den Begriff "Möbel" fallen, der für alle gleichermaßen gilt, weil er nur das gemeinsame Merkmal ihrer Beweglichkeit im Hause bedeutet.

Nach allem, was schon über die pyramidale Begriffsstruktur gesagt wurde, ordnet man alle diese Befunde in eine solche intensional-extensionale Pyramide ein.

Das geschilderte Verfahren ist schon von Sokrates (bzw. Platon), dann besonders von Aristoteles zur Methode der "Hinführung zum Allgemeinen" (griechisch: Epagogé, lateinisch: inductio) ausgebaut worden. Die Induktion ("des Allgemeinen aus dem Besonderen") galt in der Logik von Aristoteles bis auf Francis Bacon als das einzige und sichere Verfahren der Gewinnung und Bildung der Allgemeinbegriffe. In der Mathematik ist es in der Gestalt der "vollständigen Induktion" bis heute in dieser Leistungsfähigkeit anerkannt geblieben. In der Logik selbst wurde es in der Neuzeit heftig umstritten. Unter der Bezeichnung "unvollständige Induktion" blieb es zwar erhalten, doch wurde seine Leistungsfähigkeit für die Begriffsbildung vor allem seit Hume und J. St. Mill grundsätzlich in Frage gestellt.

Der Grund für die Infragestellung der Leistungsfähigkeit der Induktion zur Bildung allgemeiner Begriffe dürfte in den stoischen und platonisch-euklidischen Hintergrundsannahmen über die allgemeinen Begriffe (stoisch: koinai ennoiai, euklidisch: axiomata) liegen. Diese galten und gelten heute wieder als grundsätzlich "unanschauliche" Gebilde, die ihrer Natur nach nicht auf den Anschauungsgehalt "konkreter" Wörter und "empirischer" Begriffe zurückgeführt oder von diesen aus gewonnen werden könnten. Daß dies aber grundsätzlich falsch ist, wurde schon gezeigt und wird sich im Folgenden weiter bestätigen lassen.

Daß die Bestreitung der Leistungsfähigkeit der Induktion zur Begriffsbildung selbst eine paradoxale Strategie ist, zeigt sich schon daran, daß man in der Mathematik, die es ja nach herrschender Meinung durchaus nur mit "unanschaulichen" Begriffen zu tun hat, gerade die "vollständige Induktion" als sichere Begriffsbildungsmethode vertritt, obwohl man dort die Induktion überhaupt als Begriffsbildungsverfahren ablehnen müßte. Und es sind eben gerade die Vertreter einer "mathematischen Logik", die diese Methode für den Bereich der Logik als "unvollständige Induktion" diskriminieren und sie durch eine etwas nebulöse "axiomatische Deduktion", die auf eine freie Setzung von Grundbegriffen hinausläuft, zu ersetzen bemüht sind.

Wir gehen demgegenüber von einer strikt sensualistischen Hintergrundannahme über die Natur der Begriffe aus. Danach behalten die allgemeinen Begriffe grundsätzlich ihren anschaulichen Gehalt, der mit einzelnen Bedeutungskomponenten empirisch-anschaulicher Begriffe (und Wörter) identisch bleibt, und der durch die Induktion geradezu aus dem komplexen Intensionengehalt konkreter Begriffe herausgefiltert und fixiert wird. Auf dieser Voraussetzung können allgemeine Begriffe - und das schließt auch die sogenannten höchsten, abstraktesten Begriffe, Kategorien und begrifflichen Axiome ein - überhaupt nur Begriffe sein, wenn sich in ihnen dieser intensionale Anschauungsgehalt auch nachweisen und verdeutlichen läßt. "Unanschauliche" Begriffe können demnach überhaupt keine Begriffe sein. Wir halten das, was dafür ausgegeben wird, für rein lautevozierende Wörter bedeutungsleerer Jargons, die in den damit arbeitenden Disziplinen mühsam gelernt und eingeübt werden, und die allenfalls "performativ" den Zusammenhalt und gemeinsame Sprechmuster von Forschergemeinschaften garantieren können.

Auf der sensualistischen Basis bleibt die Induktion auch in der Logik das einzige und sichere Begriffsbildungsverfahren. Diese These muß gegen den Hume-Millschen Einwand der Unvollständigkeit verteidigt werden.

Der Unvollständigkeitseinwand läßt sich etwa so formulieren: Ein induktiver Allgemeinbegriff kann nur aus zur Verfügung stehenden beobachteten Instanzen bzw. Gegenständen gewonnen werden. Diese sind grundsätzlich nur "einige Instanzen" von "allen möglichen Instanzen", die entweder nicht beobachtet wurden oder evtl. erst durch künftige Forschungen (auch Experimente) beobachtet werden könnten. Der Allgemeinbegriff soll aber von "allen Instanzen" gelten, denn das ist gerade das Charakteristikum des "Allgemeinen" am Begriff. Also sind induktive Begriffe nur vorläufige "Verallgemeinerungen" beschränkter Erfahrungsinhalte, in denen von "einigen Instanzen" auf "alle Instanzen" übergegangen werde. Sie müssen daher im Verlaufe weiterer Forschungen ständig an neuem Erfahrungsmaterial überprüft und ggf. neu definiert werden.

Das vermeintlich kritische Argument liegt hier bei den "ungeprüften möglichen Instanzen", die gegen die "geprüften", der Induktion zugrundeliegenden Instanzen ausgespielt werden.

Es ist aber schon durch Wilhelm von Ockham und später durch Francis Bacon widerlegt worden. Wilhelm von Ockham zeigte, daß und wie ein Allgemeinbegriff schon aus einer einzigen Instanz induziert werden kann. Und Francis Bacon mokierte sich mit Recht gegen das "kindische Abzählen" von Instanzen, das in der Logik keine Rolle spielen kann. Beide gingen ebenso wie wir davon aus, daß ein aus einem oder einigen Instanzen gewonnener Begriff grundsätzlich schon für alle Fälle und auf jeden möglichen Fall angewandt festlegt, ob sich das in ihm fixierte Merkmal findet oder nicht findet. Verfügt man überhaupt über einen anschaulichen Allgemeinbegriff, so bestimmt dieser mittels seiner Merkmale gleichsam apriori (wir meinen: mit der von Kant für alles Apriorische beanspruchten Gewißheit und Notwendigkeit), welche Fälle möglicher Instanzen unter ihn fallen (weil sie das Merkmal identisch besitzen) oder nicht unter ihn fallen (weil sie das Merkmal nicht besitzen).

Dies läßt sich auch am immer wieder vorgebrachten Paradebeispiel Mills vom "falsch induzierten Begriff des weißen Schwans", der durch die Entdeckung der schwarzen Schwäne Australiens "widerlegt" worden sei, demonstrieren. Mill übersah, daß der zoologisch induzierte Begriff "Schwan", der allgemeiner ist als die spezifizierte Art der "weißen Schwäne", niemals in seiner Allgemeingültigkeit in Frage gestellt wurde. Von ihm her konnten auch die australischen schwarzen Schwäne überhaupt erst als "Schwäne" erkannt und subsumiert werden. Die weitere Unterscheidung von Arten von Schwänen nach spezifischen Merkmalen setzt geradezu die allgemeine Extension (von uns "Induktionsrahmen" genannt) des empirisch induzierten Allgemeinbegriffs des "Schwans" voraus, der auch von Mill nicht bestritten werden konnte. In gleicher Weise ist im vorigen Beispiel auch der Begriff "Möbel" keineswegs durch die Anfüllung der Haushalte mit Haushaltsgeräten obsolet geworden. Man kann allenfalls darüber streiten, ob man die Haushältsgeräte (die ja im Hause mobil sind) als Art unter die Möbel subsumieren möchte oder ob man sie von den Möbeln gänzlich abtrennt.

Was wir hier für die Logik reklamieren, ist also nichts anderes als das von der Mathematik usurpierte Verfahren der vollständigen Induktion und der darauf gegründeten sicheren und zuverlässigen Bildung von Allgemeinbegriffen. Ob es dagegen in der Mathematik mit Recht angewandt wird, kann mit Gründen bezweifelt werden. Überall wo das Infinitesimalprobem in die mathematische Begriffsbildung hineinspielt, dürfte es wohl untauglich sein, weil gerade dabei niemals etwas "vollständig abgezählt" werden kann. Erst recht ist auch die übliche "vollständig-induktive" Definition der Zahl als "n + 1" (= Ausgangselement + Nachfolger) logisch keineswegs vollständig noch überhaupt induktiv, denn sie definiert das Ausgangselement (die Eins oder ggf. auch die Null) gerade nicht mit.

Gleichwohl ist das Induktionsverfahren mit einer Problematik belastet, die bei allen Streitigkeiten über das "Induktionsproblem" unserer Einschätzung nach sowohl in der Logik wie in der Wissenschaftstheorie noch nicht beachtet worden ist. Wir haben es in der "Logik" (Aalen 1978, S. 324 - 333) als Problem der Bestimmung der "Induktionsrichtung" vorgestellt.

Folgt man bei der Analyse von Wortbedeutungen allgemeinem Sprachgebrauch und dadurch festgelegten Meinungen, so scheint sich für die Induktion gleichsam natürlich und von selbst eine einzige und bestimmte Induktionsrichtung vom Einzelnen und Besonderen zu einem bestimmten Allgemeinen zu ergeben. Wir haben uns das in unseren Beispielen hier und auch sonst (vgl. die Belegung von formalen Pyramiden mit den inhaltlichen Begriffen "Leben", "Tier", "Pflanze" usw.) zunutze gemacht.

In wissenschaftlichen Theorien folgt man zwar sehr häufig dem allgemeinen Sprachgebrauch und bestätigt und "logifiziert" im Umlauf befindliche Begriffe des Alltags. Oft aber geht man auch davon ab, indem man eine andere Induktionsrichtung einschlägt. Diese führt zwar nicht von der Anschauung weg, wohl aber bringt sie oftmals neue und überraschende "Ansichten" der ansonsten wohlbekannten Erfahrungsgegenstände mit sich.

Die sich mit den verschiedenen Induktionsrichtungen für originelles "theoretisches Denken" eröffnenden Möglichkeiten beruhen darauf, daß man jedes beliebige Merkmal im Merkmalsbestand eines Wortes bzw. eines "konkreten Begriffs" willkürlich herausgreifen und als Induktionsrahmen zum Allgemeinbegriff erheben kann. Ein Beispiel aus der "Logik" (S. 324 f.) mag das verdeutlichen.

1. Im Anschluß an den Sprachgebrauch und verbreitete Anschauungen wird man "Sokrates" für ein Individuum halten, dessen Merkmale (Intensionen) man aus den geschichtlichen Überlieferungen kennt. Unter den Merkmalen findet sich auch, daß er Philosoph und Grieche war. Geht man weiter davon aus, daß sich die Griechen in Philosophen und Nichtphilosophen einteilen lassen, so hat man schon eine pyramidale Ordnung unter diesen Begriffen hergestellt: "Sokrates" steht als Unterart (Individuum) unter dem Artbegriff "Philosoph", und dieser wieder unter der Gattung "Grieche".

2. In philosophischem Interesse wird man den Begriff "Philosoph" vielleicht für wichtiger und für allgemeiner halten, als den Begriff "Grieche", denn es gab ja auch viele nichtgriechische Philosophen. Entsprechend wird "Philosoph" zum Gattungsbegriff und als Induktionsrahmen verwendet, und "Grieche" wird Artbegriff, "Sokrates" bleibt Basisbegriff und damit Individuum.

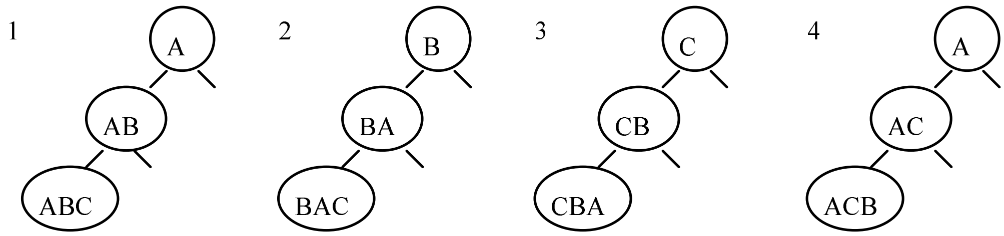
3. Der gewitzte Sprachforscher kann nun darauf abstellen, daß viele Griechen den Namen "Sokrates" getragen haben (und noch tragen), von denen einige durchaus Philosophen gewesen sind. Seine Begriffspyramide stellt sonach den "Griechen" an die Basis, subsumiert ihn unter die Art "Philosoph" und setzt "Sokrates" als Gattung und Induktionsrahmen an die Spitze. Damit hat er schon einen sehr

allgemeinen - und in der Geistesgeschichte keineswegs unbekannten - Begriff der "Sokratizität" induziert, dessen generische Merkmale er dann in allen "Sokrates" getauften Philosophen und Nichtphilosophen sowie erst recht in allen "Sokrates" genannten Griechen wiederfindet.

4. Fällt ihm die Beweislast für diese theoretische Betrachtung zu schwer, so mag er auch "Philosoph" an die Basis stellen, die "Sokratizität" als Artmerkmal herausstellen und darauf insistieren, daß sich solcherart sokratische Philosophen nur unter der Gattung und im Induktionsrahmen echten "Griechentums" finden lassen. Das mag ihm ebenfalls zu beweisen schwerfallen. Auf jeden Fall zeigt das Beispiel, wie mittels der Induktion auf einer und derselben Anschauungsgrundlage recht aparte Theorien entworfen werden können (und wir haben nicht alle Möglichkeiten ausgereizt), die die Forschung erst richtig in Gang setzen.

Wichtig für die Logik ist dabei nur, daß sie sich sämtlich auch formalisieren lassen, und das sieht in unserer pyramidalen Notation so aus:

Induktionsrichtungen der Begriffsbildung



Merkmale (Intensionen): A = griechisch, B = philosophisch, C = sokratisch

Die Formalisierung zeigt und erklärt zugleich, daß es durchaus eine relative Angelegenheit ist, worauf man bei der Induktion "hinauswill" und wie man den Sachverhalt oder die Instanz nennt, von der man dabei ausgeht. Was an der Basis notiert wird, ist im vorliegenden Falle gewiß ein Individuum, nämlich in 1 "Sokrates als philosophischer Grieche", in 2. "ein sokratisch-griechischer Philosoph", in 3. "ein griechischer-philosophischer Fall von Sokratizität" und in 4. "ein philosophisch-sokratischer Fall von Griechentum". Alles dies sind aber nur verschiedene sprachliche Kennzeichnungen desselben Sachverhaltes: Ein Individuum wird unter Hervorhebung jeweils anderer ihm eigentümlicher Merkmale, die für wesentlich gehalten werden, beschrieben. Worauf die Induktion hinausläuft, das sind jeweils Merkmale, die gewiß immer auch für viele andere Instanzen zutreffen.

Diese immer mehrfachen Möglichkeiten der Induktion des Allgemeinen aus dem Besonderen sind ersichtlich die Grundlage für die Pluralität von Theorien über einer und derselben Sachverhaltsbasis. Und sie liefern zugleich einen Wink für das in der neueren Wissenschaftstheorie vielverhandelte Problem, worin eine sog. Inkommensurabilität von Begriffen in verschiedenen Theorien bestehen könnte. Die in inkommensurablen Theorien mit demselben Terminus bezeichneten Begriffe unterscheiden sich durch die jeweils verschiedenen Kompositionsweisen ihrer Merkmale. Und diese ist, das sei nebenbei bemerkt, in der üblichen Notation der Begriffe durch einzelne Buchstaben nicht darstellbar. Sie wird aber in pyramidaler Notation sofort sichtbar.

Es macht ja einen erheblichen Unterschied ob z. B in physikalischen Theorien Materie ("Masse") als spezifizierte Kraft oder Energie, oder umgekehrt Energie als spezifizierte Materie definiert wird. Entsprechend unterscheiden sich auf der philosophischen Ebene eine realistische metaphysische Theorie von einer idealistischen darin, daß in der ersteren das "Sein" den Induktionsrahmen auch für "ideelles Sein" (neben "nichtideellem Sein") abgibt, während in der letzteren "Idee" als Induktionsrahmen festlegt, daß man etwa "seiende Ideen" (über die sog. Wirklichkeit) als Arten neben pure "Erinnerungsideen" oder gar "falsche Ideen", die keinen wirklichen Sachverhalt abdecken, stellen kann.

Naturgemäß kündigt sich damit auch das Problem an, ob und wie man Kriterien für die Auswahl und Kennzeichnung "besserer" oder "schlechterer" Theorien gewinnen kann. Zugespitzt geht es um die Frage nach der Wahrheit und der Falschheit der Theorien selber. Davon wird aber später näher zu handeln sein, da noch viele weitere logische Gesichtspunkte bei dieser Frage Berücksichtigung finden müssen.

Soweit die Frage mit der Induktion zu tun hat, halten wir das von George Berkeley aufgestellte Kriterium für die Auswahl und Auszeichnung der "wahren" sensualistisch begründeten Induktion für richtig und maßgebend. Berkeley stellte heraus, daß die wahre Induktion nur dasjenige als Allgemeines aus den sinnlichen Erfahrungskomplexen herausheben kann, was auch als solches unter den Wahrnehmungsbeständen sinnlich wahrgenommen werden kann. Seine Beispiele liegen im Bereich der Physik und der mathematischen Begriffe. Danach kann etwa "Bewegung" nur als Distanzveränderungen zwischen zwei Körpern wahrgenommen und auf einen Begriff gebracht werden. Die zu seiner Zeit und heute übliche induktive Isolierung der reinen "Bewegung" und ihre begriffliche Fassung kann daher nur zu falschen Theorien, in denen dieser Begriff eine axiomatische Stellung einnimmt, führen.

Entsprechendes gilt vom Begriff der "Farbe" (und der einzelnen Farben), die nur über den Induktionsrahmen der Fläche, auf der sie sichtbar wird, induziert werden kann. Und eben dasselbe gilt für die Induktion der geometrischen Begriffe von Punkt und Linie. Der geometrische Punkt kann nur als ein "Minimum sensibile" (einer gerade noch sichtbaren Fläche) auf den Begriff gebracht werden, die Linie entsprechend als Flächenteil.

Das heißt umgekehrt, daß die üblichen von Berkeley "abstrakt" genannten Begriffe etwa der "reinen Bewegung" (ohne Kontextmerkmale der bewegten Körper), des "Punktes" (ohne minimale Flächenausdehnung) oder der "Farbe" (ebenfalls ohne Flächigkeit) überhaupt keinen anschaulichen Gehalt besitzen können. Und so werden sie traditioneller Weise auch als typische "unanschauliche Begriffe" gehandelt. Wie solche unanschaulichen Begriffe aber anders als gänzlich willkürlich und konventionell auf anschauliche Wahrnehmungsbestände angewandt werden können, wird wohl ewig das Geheimnis eines "apriorischen kantischen Schematismus" und derjenigen Logiker und Mathematiker bleiben, die über die dazu benötigte reflektierende und bestimmende Urteilskraft verfügen.

4. Die Junktoren

Die Junktoren verknüpfen, wie die Bezeichnung besagt, logische Elemente zu größeren Einheiten. Die logischen größeren Einheiten sind Ausdrücke und Urteile bzw. Aussagen..

Sie entstammen durchweg dem Sprachgebrauch indoeuropäischer Sprachen, in welchem sie ebenfalls Wörter zu Ausdrücken verknüpfen, wie "und", "oder", "Nicht-", "einige", "das heißt". Darüber hinaus verknüpfen sie Wörter oder Ausdrücke zu ganzen Sätzen wie "Tiere sind Lebewesen", "Es gibt Hunde und Katzen", "Wenn es regnet wird es naß".

Von Aristoteles wurden diese logischen Verknüpfungspartikel "Synkategoreme" (griech.: synkategorema, Plural: synkategoremata; lateinisch: connotatio) genannt, was man mit "Mitbedeuter" übersetzen könnte. Er gab damit seiner Meinung Ausdruck, daß sie in der Logik ihre sprachlichen Bedeutungen verlören und somit keine eigene logische Bedeutung hätten, sondern eine solche erst in Verbindung mit Begriffen (Kategorien) erhielten. Diese Meinung ist in der Logik mehr oder weniger festgehalten worden. Sie wurde zum Ausgangspunkt für recht willkürliche logische und mathematische Bedeutungsfestlegungen der Junktoren bzw. der in der mathematischen Logik sogenannten logischen Konstanten.

Darüber kann man sich indessen nur wundern angesichts der Tatsache, daß die klassischen logischen Junktoren schon immer und noch immer in ihrer sprachlichen Bedeutung verstanden und gehandhabt werden. Allenfalls die in der Aussagenlogik in "künstlicher Idealsprache" definierten neuen Junktoren haben ersichtlich keine gemeinsprachliche Bedeutungen - weshalb sie auch gänzlich unverständlich sind.

Im gemeinsprachlichen Gebrauch dürfte der Unterschied zwischen ausdrucksbildenden und urteilsbildenden Junktoren ohne weiteres einleuchten. Erstere tragen keinen Behauptungssinn ("Katze und Hund"), letztere bringen den Behauptungssinn in die logischen Urteile hinein ("Hunde sind Tiere"). Und damit werden sie zur Grundlage eines sogenannten Wahrheitswertes (wahr, falsch, aber darüber hinaus auch wahr-falsch bzw. "ein Drittes" neben wahr und falsch) der Urteile.

Diese auch in der Logik zu machende Unterscheidung zwischen den beiden Junktorengruppen, auf die wir größten Wert legen, wird in der Logik seit Aristoteles geradezu verschleiert. Der Grund dafür dürfte die klassische Einteilung der Urteile sein, in der Ausdrücke nur als Bestandteil von Urteilen berücksichtigt wurden, vornehmlich bei den adjunktiven und disjunktiven Urteilen ("Hunde sind Tiere und/oder Lebewesen").

Die Nichtunterscheidung der ausdrucks- und der urteilsbildenden Junktoren belastet auch die Gesamtkonzeption der *Aussagenlogik*, in welcher Wahrheitswerte der durch Junktoren verknüpften komplexen Sätzen auf die Wahrheitswerte ihrer jungierten "Elementarsätze" zurückgeführt bzw. von diesen her angeblich abgeleitet bzw. definiert werden. Da die aussagenlogischen "Definitionen" der Junktoren in der modernen Logik geradezu kanonisiert worden sind und das übliche logische Verständnis der Junktoren von ihnen ausgeht, lohnt sich schon an dieser Stelle ein kritischer Blick auf deren Voraussetzungen.

Ludwig Wittgenstein hat den logischen "Elementarsatz" zunächst nach klassischem Muster als "behauptendes" Urteil definiert: "Der einfachste Satz, der Elementarsatz, behauptet das Bestehen eines Sachverhaltes" (Tractatus logico-philosophicus, 4.21, Ausgabe Frankfurt a. M. 1963). Sodann aber erläutert er: "Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen" (ibid. 4.22).

Eine "Verkettung von Namen" wie etwa "Hans und Peter" hat ersichtlich keinerlei Behauptungssinn (über einen bestehenden Sachverhalt) und ist daher kein Urteil. Gleichwohl muß sie nach Wittgenstein als "Elementarsatz" gelten, und das ist sicher falsch. Erst eine "Verkettung" etwa durch die Kopula oder ihre Negation wie in "Hans ist (ist nicht) Peter" ist ein Urteil. Eine reine "Verkettung" mittels der Negation wie "Nicht-Peter" ist wiederum nur ein Ausdruck, der unter gewissen Umständen auch als eine andere Bezeichnung für "Hans" gebraucht werden kann.

Auch die weitere Erläuterung: "Den Elementarsatz schreibe ich als Funktion der Namen in der Form: >> fx <<, >> φ (x,y,) <<, etc. Oder ich deute ihn durch die Buchstaben p, q, r an" (ibid. 4.24) läßt sich sowohl auf Ausdrücke wie auf behauptende Urteile beziehen. In den "Principia Mathematica" (1910-1913) von B. Russell und A. N. Whitehead, denen Wittgenstein hier folgt, stehen p, q und r für mathematische Gleichungen, die offensichtlich auch Wittgenstein für die mathematische Gestalt logischer Urteile hielt. Auch dies ist logisch falsch, denn mathematische Gleichungen sind logische Äquivalenzen bzw. Definitionen, denen streng genommen kein Wahrheitswert zugesprochen werden kann. Im übrigen ist wohlbekannt, daß Wittgenstein in keiner seiner Schriften ein inhaltliches Beispiel für einen Elementarsatz genannt hat. Wir vermuten den Grund darin, daß er dabei sofort hätte eingestehen müssen, daß die nur ausdrucksbildenden "Verkettungen" von Namen keine Urteile sein und dementsprechend keinen Wahrheitswert besitzen können.

Wir betonen diese Unklarheit in der Grundlegung der Aussagenlogik, weil sie der Ausgangspunkt für die generelle Überzeugung in der modernen Logik geworden ist, daß alle Junktoren (und nicht nur die urteilsbildenden) Träger von Wahrheitswerten (und nur zweiwertiger) seien. Sie hat die Folge, daß die nur ausdrucksbildenden Junktoren auch auf der sogenannten aussagenlogischen Metaebene Wahrheitswerte zugewiesen bekommen, obwohl sie auch dort ebenso wenig einen solchen Wahrheitswert besitzen können wie auf der Elementarebene. Die Einführung der Meta-Stufen von Wahrheitswerten durch B. Russell halten wir dabei für eine die Logik insgesamt nur komplizierende Ausflucht vor den Paradoxien, die sich aus der ungeklärten Grundlegung der Aussagenlogik selbst ergeben. So mag sich der Aussagenlogiker bei dem Ausdruck "p oder -p (Nicht-p)" denken, daß diese Alternative wahr sei, wenn der eine Elementarsatz wahr und der andere falsch ist. Wir halten dagegen, daß der alternative Ausdruck nur besagen kann: "(Ein) Satz oder seine Negation". Und dieser kann nach unserem Dafürhalten keinen Wahrheitswert besitzen.

So sehr anzuerkennen ist, daß durch Wittgenstein und Emil Leon Post (vgl. seine Introduction to a general theory of elementary propositions, Columbia University Dissertation 1921, in: American Journal of Mathematics 43, 1921, S. 163-185, wieder abgedruckt in: J. van Heijenoort, Hg., From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Cambridge, Mass. 1967, S. 264-283) versucht worden ist, den Junktoren eine eigene und durch die berühmten Matrizen bestimmte Bedeutung beizulegen und sie zugleich auch systematisch zu ordnen, muß doch zugleich auf den schwankenden Boden hingewiesen werden, auf dem die ganze Aussagenlogik errichtet wurde.

Wittgensteins (und Posts) Tabellen definieren 1. nicht alle faktischen Junktoren, 2. manche auf widersprüchliche Weise, 3. die Negation durch ein reduziertes Sonderverfahren, 4. erzeugen sie rein variationstechnisch eine Reihe neuer Junktoren, die in der Logik kaum verwendbar und deren Bedeutung höchst fragwürdig und umstritten geblieben ist, falls sie überhaupt eine Bedeutung haben können. Schließlich 5. sprechen sie, wie gezeigt wurde, den nur ausdrucksbildenden Junktoren willkürlich Wahrheitswerte zu. Und dies wiederum ruft bei den sie benutzenden Logikern das falsche Bewußtsein hervor, in logisch oder gar mathematisch gesicherter Weise über höhere ("Meta-") Wahrheiten und Falschheiten argumentieren zu können, die ihrer logischen Natur nach nur Ausdrücke und somit nicht wahrheitswertfähig sind.

Wir schlagen für die Wahrheitswertbestimmung der dazu geeigneten Junktoren, d. h. der urteilsbildenden, einen anderen Weg ein, wie im folgenden gezeigt wird.

Zunächst möchten wir behaupten und dabei bleiben, daß die Junktoren den gemeinsprachlichen Sinn bestimmter grammatischer Elemente - und nimmt man bestimmte mathematische Junktoren hinzu, auch rechentechnischer Verknüpfungsweisen - in die Logik importieren und diese sprachliche bzw. mathematische Bedeutung auch in der Logik beibehalten. Deshalb sind die üblichen logischen Zeichen in der Regel auch nur (stenographische) Abkürzungen der gemeinsprachlichen Wörter dafür (z. B. griech. Eta: für die griechische Kopula "esti", "v" für das lateinische "vel"). Die Frage kann deshalb nur sein, ob und wie die Bedeutung der Junktoren ausgewiesen werden kann.

Wir beziehen ihre Bedeutung grundsätzlich auf die Relationen, die sich zwischen Begriffspositionen in der Begriffspyramide ergeben können. Diese Beziehungen stellen daher formale Bilder ihrer Bedeutungen dar. Die hier möglichen Verhältnisse sind gemäß dem Allgemeinheitsgefälle die Beziehungen zwischen Gattungen und Arten bzw. Unterarten, also in vertikaler Richtung, und die Beziehungen zwischen Arten bzw. allgemeiner die Querverhältnisse (auch zwischen Arten verschiedener Gattungen oder zwischen Unterarten und Arten).

Wir gehen in Übereinstimmung mit dem sprachlichen Sinn der Junktoren davon aus, daß einige von ihnen Urteile mit einem expliziten Behauptungssinn bilden, der einen Wahrheitswert hat, während die restlichen nur Ausdrücke ohne Behauptungssinn und also auch ohne Wahrheitswert bilden. Führen wir zunächst die urteilsbildenden und wahrheitswertfähigen logischen Junktoren ein.

a. Die urteilsbildenden logischen Junktoren.

1. Man wird von vornherein vermuten können, daß es einen (universalen) Junktor geben muß, der in jeder Richtung verknüpft. Dies ist die *unbeschränkte Implikation* bzw. das allgemeine *"wenn dann"*. Wir haben sie an anderer Stelle (vgl. Logik, Aalen 1987, S. 161) zu Ehren des Philon von Megara "allgemeine philonische Implikation" genannt, weil dieser sie zuerst verwendet zu haben scheint (aber nicht in seiner seither kanonisch übernommenen Definition, sondern in ihm zugeschriebenen Beispielen). Aber auf diese (vielleicht eher irreführende) Bezeichnung kommt es nicht an. Wichtig ist, daß die unbeschränkte Implikation von jeder Position aus eine Verknüpfung zu jeder beliebigen anderen herstellt. Was sie rein formal ausdrückt, ist eine logische Grundgesetzlichkeit, die immer den Wahrheitswert "wahr" mit sich führt. Mit dieser unbeschränkten Implikation kann man "wahr" behaupten: Wenn (es eine) Gattung (gibt), dann auch Arten. Wenn es eine Art gibt, dann auch eine zugehörige Gattung. Wenn es eine Art gibt, dann auch (mindestens eine) Nebenart.

Der einzige Falschheitswert (wenn man ihn überhaupt logisch zulassen will) bestünde darin, daß der universale Junktor überhaupt nicht verknüpft, sondern "reflexiv" bzw. "ipsoflexiv" auf sich selbst angewendet würde, z. B. "Wenn es einen Begriff gibt, dann gibt es einen Begriff". Sprachlich wäre dergleichen ein Wortwitz, aber in der Logik gilt traditioneller Weise auch diese "Junktur" als "wahr", und sie findet in vielen höchst spekulativen Argumentationen der "Reflexionsphilosophie" Anwendung. Wir meinen: zu Unrecht, soweit es die Logik betrifft. Ob zu Recht in der Mathematik, sei dahingestellt. Die Selbstimplikation von Mengen ("die sich selbst enthalten") ist jedenfalls für den ganzen logischen Unterbau der Arithmetik konstitutiv geworden - und das schlägt sich logischerweise in den bekannten Widersprüchen und Paradoxien der mathematischen Mengenlehre nieder.

Diese allgemeine Implikation ist aus systematischen Grunden zu fordern, da sie selber den Gattungsbegriff für alle Arten und Unterarten der übrigen urteilsbildenden Junktoren darstellt. Bekanntlich haben schon die Megarer und die Stoiker nur von einer einzigen Implikation (gleichsam als "Kurz-Schluß") gesprochen und sich redlich bemüht, auch ihr einen Falschheitswert (neben der Selbstimplikation, die sie mehrheitlich für "sinnlos" hielten) beizulegen. Ihre Falschheitsbestimmung, die sie der (speziellen) Implikationsdefinition von Philon von Megara entnahmen, wird auch heute noch allgemein angenommen. Sie lautet bekanntlich: Eine (allgemeine) Implikation ist nur falsch, wenn etwas Wahres etwas Falsches impliziert (sonst ist sie immer wahr).

Was damit aber als Standard einer sogenannten allgemeinen Implikation (immerhin wohl des meistverwendeten Junktors in der formalen Logik!) definiert wird, ist mit der hier eingeführten allgemeinen Implikation keineswegs identisch. Vielmehr handelt es sich dabei, wie später zu zeigen ist, um eine Zusammenfassung von drei speziellen Implikationsformen, von denen jede eigene Wahrheitswerte besitzt. Die megarisch-stoische Falschheitsbestimmung der Implikation ist gewissermaßen eine Summe der Falschheitswerte der drei wohlunterschiedenen speziellen Implikationen. Aber auch als solche bleibt sie recht dunkel und muß als logisches Dogma angesehen werden, hinsichtlich dessen man in der Logik gerne auch vom "Rätsel der Implikation" spricht.

In der Tat berühren wir bei diesem Thema einen der schwierigsten Punkte der gesamten Logik. Es dürfte schwerlich einzusehen sein, warum das Wahre nicht ebenso das Falsche implizieren sollte, wie umgekehrt das Falsche das Wahre. Jede entlarvte Lüge und jeder aufgedeckte Irrtum hat schließlich die Kenntnis der Wahrheit zur Voraussetzung, und dies in derselben Weise, wie man aus Lügen und Irrtümern auf die Wahrheit schließen kann. Und weil das so ist, wird es überhaupt erst verständlich, daß Falsches aus Falschem folgt wie aus Lügen weitere Lügen, und aus Wahrheiten weitere Wahrheiten, wie man es von der Wissenschaft fordert. Erst recht wird bei widersprüchlichen Behauptungen mit dieser unbeschränkten Implikation gearbeitet. Wenn behauptet wird: "Es regnet und es regnet nicht" (was sicher eine widersprüchliche Behauptung ist), und ich weiß (als wahr), daß es gerade regnet, so impliziert das gewiß auch das Wissen um die Falschheit des zweiten Teils der Behauptung, daß es nämlich nicht regne. Und dies ganz spiegelbildlich zum umgekehrten Fall, bei dem die Falschheit die Wahrheit impliziert.

An solchen Beispielen mag man erkennen, daß die Logik bzw. die Junktorenlehre unvollständig wäre, wenn sie auf die hier eingeführte unbeschränkte und immer wahre Implikation verzichten wollte. Sie wird in der wissenschaftlichen Praxis ständig und erfolgreich benutzt, und es wird höchste Zeit, daß sie auch eine logische Form erhält.

2. Systematisch zu fordern ist auch ein Junktor, der obere mit unteren und umgekehrt untere mit oberen Positionen verknüpft und dabei immer wahre Urteile liefert, auf Querverhältnisse angewandt aber falsche Urteile. Dieser findet sich im *unbeschränkten "Zukommen"* des Aristoteles. Er liefert wahre Urteile, weil er zugleich die Subsumption von Unterarten oder Arten unter ihre Gattung ausdrückt ("die Tiere kommen - extensional - dem Lebendigen zu") als auch das Enthaltensein des generischen Merkmals der oberen Position in den unteren ("Das Lebendigsein kommt - intensional - den Tieren zu"). Im Querverhältnis liefert er falsche Urteile ("Tierisches kommt Pflanzlichem zu").

Dieser Junktor ist wegen seiner Doppeldeutigkeit unfruchtbar und daher nach Aristoteles zugunsten der genaueren Unterscheidung des speziellen "Zukommens" (Inklusion bzw. formale Implikation, s. u.) und der Kopula (oder der materialen Implikation, s. u.) nicht mehr verwendet worden.

3. Die Nebenart zum unbeschränkten "Zukommen" des Aristoteles stellt eine horizontale Verknüpfung her. Es ist die *logische Korrelation.* Sie wird gewöhnlich als eine der drei Gestalten der Implikation durch "wenn dann" ausgedrückt. Es sei betont, daß diese Verknüpfungsweise der korrelierenden Implikation von der formalen und von der materialen Implikation streng zu unterscheiden ist, was in den üblichen Notationen nicht formal möglich ist, sich aber in Beispielen deutlich zeigt ("wenn Tiere, dann auch Pflanzen"). Die Korrelationsurteile stellen regelmäßig Sachverhalte nebeneinander ("wenn das eine, dann auch das andere"). Darüber hinaus sind sie auch die logische Form der inhaltlichen Kausalurteile ("wenn Ursache, dann Wirkung" bzw. "Wenn Wirkung, dann auch Ursache"). Sie liefern falsche Urteile, wenn sie auf vertikale Beziehungen angewandt werden (Gattungen können nicht kausale Ursache von Arten bzw. umgekehrt sein!).

Jede dieser beiden Arten läßt sich in wiederum zwei Unterarten aufspalten. Das unbeschränkte Zukommen zerfällt in die folgenden:

4. die Verknüpfung von unten nach oben. Dies wird durch die *Kopula* ("ist") ausgedrückt und führt dann zu wahren Urteilen ("Tiere sind Lebewesen"). Ihr Sinn ist identisch mit der materialen Implikation (wenn Art, dann Gattung). Auf das umgekehrte Verhältnis oder auf Querverhältnisse angewandt liefern sie falsche Urteile ("Lebewesen sind Tiere"; "Tiere sind Pflanzen"). Die Urteile mit Kopula sind grundsätzlich das, was Kant "analytische Urteile" genannt hat, und zwar weil sie das Enthaltensein der generischen Merkmale der Oberbegriffe in einem unteren Begriff offenlegen.

Wir sind uns bewußt, uns mit der These, daß die Kopula nur untere mit oberen Begriffen verknüpft, indem sie generische Merkmale offenlegt, in Gegensatz zu einer langen logischen Tradition zu setzen. Diese deutet die Kopula zugleich als einen Junktor, der auch spezifische Differenzen eines Begriffs offenlegt. Diese Deutung ist von Kant zur Grundlage seiner "synthetischen" Urteile bzw. der seither sogenannten Erweiterungsurteile gemacht worden. In der Tat spricht ja einiges dafür, in dem Urteil "Sokrates ist weise und korpulent" die Weisheit und die Korpulenz nicht für generische Merkmale des Sokrates zu halten. Und noch weniger gilt das von einem "zufälligen" und ggf. zeitgebundenen Prädikat wie "ist sitzend" (wie gewöhnlich die Verben in logische Partizipialprädikate aufgelöst bzw. umformuliert werden).

Wir möchten jedoch dagegenhalten, daß für eine "erweiternde" bzw. spezifische Differenzen zusprechende Prädikation die Äquivalenz und der Existenzjunktor zuständig sind. Daß diese üblicher- aber unachtsamerweise gerne mit "ist" ausgedrückt werden, hat in der Logik immer wieder zu größten Verwirrungen geführt, die auch heute noch die logische Arbeit belasten. Gerade weil die sprachlichen Formulierungen dazu einladen, der Kopula auch die Bedeutung der Äquivalenz und des Existenzjunktors beizulegen, ist bei der logischen Formalisierung sprachlicher Sätze immer eine Vorüberlegung angebracht, ob man die generischen Merkmale oder spezifische Differenzen eines Begriffs offenlegen will. Im Falle der Weisheit und Kopulenz des Sokrates wird man vielleicht darüber streiten können, ob Sokrates derjenige wäre, der er ist (bzw. war), wenn seine geistige und körperliche Anlage nicht zu seinen generischen Merkmalen gehören würden (man teilt ja die Menschen in weise und nicht-weise sowie in dicke und dünne ein und kann Sokrates diesen Arten von Menschen subsumieren). Im Falle ganz offensichtlicher spezifischer Differenzen aber hat man es mit einer Äquivalenz als Definition oder mit einer Existenzbehauptung zu tun und muß dafür die entsprechende logische Formulierung benutzen. Z. B. "Sokrates, d. h. ein weiser und korpulenter Philosoph" bzw. "Es gibt den Sokrates als einen weisen und korpulenten Philosophen".

5. das *spezielle aristotelische Zukommen* ("Leben kommt den Tieren zu") ist identisch mit der *logischen Inklusion* bzw. mit der *formalen Implikation* (wenn Gattung, dann Art). Dieser Junktor liefert falsche Urteile in umgekehrter Richtung ("Tiersein kommt dem Leben zu") oder in horizontaler

Richtung ("Tiersein kommt dem Pflanzlichen zu"; "Tierisches inkludiert bzw. schließt Pflanzliches ein").

Die Korrelation zerfällt in die beiden Folgenden:

6. die *Negation* bzw. die *negierte Kopula*. Sie verknüpft korrelierte Positionen im Querverhältnis. Dies sowohl zwischen Arten unter gemeinsamer Gattung als auch zwischen Arten und Unterarten derselben oder verschiedener Gattungen, und sie betont ihren Unterschied ("Tiere sind nicht Pflanzen"; "Tiere sind nicht Steine"). Sie liefert in Anwendung auf vertikale Beziehungen falsche Urteile ("Tiere sind nicht Lebewesen"; "Lebewesen sind nicht Tiere"). Logisch wichtig, aber in üblicher Notation nicht unterscheidbar sind zwei Gestalten der Negation. a. Die "*bestimmte Negation*", die nur dihäretische Artbegriffe verknüpft. Diese ist umkehrbar und also auch als "*doppelte Negation*" verwendbar. Sie führt als "Negation der Negation" zum Ausgangsartbegriff zurück ("nicht Nicht-Pflanze" = "Pflanze") b. Die "*unbestimmte Negation*" jungiert beliebige Begriffspositionen im Querverhältnis, darunter auch multiple Artbegriffe. Sie ist nicht umkehrbar ("rot ist nicht grün"; "nicht-grün" = "jede Farbe außer grün").

7. der *Existenzjunktor* bzw. das *"es gibt"*. Er dient ganz allgemein zur Einführung logischer Begriffe, indem er die Intensionen von Begriffen, die sonst im Querverhältnis zueinander stehen, zu einer begrifflichen Einheit verschmilzt. Daher haben wir ihn auch *Produktjunktor* genannt ("es gibt Schnecken-Häuser bzw. Schneckenhäuser"). Auch negative Begriffe werden durch den Existenzjunktor eingeführt: "es gibt Nicht-Tiere (d. h. Pflanzen)". Er liefert falsche Existenzurteile, wenn er in vertikaler Richtung Gattungen mit ihren Arten oder umgekehrt verschmilzt (formal: "es gibt Gattung-Art"; "es gibt Art-Gattung"). Sprachliche Beispiele dafür sind leicht mißverständlich oder klingen sinnwidrig oder pleonastisch, weil sie nur das generische Merkmal in einem Begriff wiederholen ("es gibt Lebendiges-Tiere"; "es gibt Tier-Lebendiges").

Wie bei der Kopula schon dargelegt, wird der Existenzjunktor oft mit dieser verwechselt. Besonders die Stoiker haben dazu beigetragen, indem sie ihre empirischen Urteile mit dem "ist" (esti) formulierten, z. B. "Es ist Tag", was dann im Englischen zum "there is..." führte.

Corollarium über die Implikation: Es wurde gezeigt, daß sie als unbeschränkte Implikation in allen Richtungen verknüpfen kann und dann immer wahre Urteile liefert. Spezifiziert man die Verbindungsrichtungen, so schränkt sich der Wahrheitswert der sich ergebenden drei speziellen Implikationen ein und es treten zugehörige Falschheitswerte auf. Diese speziellen Implikationsformen lassen sich nur verdeutlichen, wenn man es in passenden pyramidalen Begriffsverhältnissen demonstriert. In der üblichen logischen Formalisierung lassen sich die Unterschiede nicht darstellen, ebenso wenig bei einem undifferenzierten sprachlichen Gebrauch des "wenn ...dann".

Die *materiale Implikation* verknüpft also von unten nach oben "wahr" und in jeder anderen Richtung "falsch". Sie ist mit dem Sinn der Kopula identisch und kann durch diese ersetzt werden. Meist formuliert man material-implikative Urteile aber zusammen mit der Kopula oder auch mit dem Existenzjunktor: "wenn Tiere, dann Lebewesen" = "wenn Tiere, dann sind es Lebewesen" = "wenn es Tiere gibt, dann gibt es Lebewesen".

Die *formale Implikation oder Inklusion* verknüpft von oben nach unten "wahr" und in allen anderen Richtungen "falsch". Sie ist mit dem speziellen aristotelischen "Zukommen" identisch.

Die *Korrelation oder korrelative Implikation* verknüpft im Querverhältnis umkehrbar "wahr" (und zwar nur das, was durch Negation unterscheidbar ist) und in allen anderen Richtungen "falsch". Dieser Junktor ist zugleich die logische Verknüpfungsform von teleologischen und Kausalurteilen i. e. S. (inhaltlicher Art). Man schließt "stoisch" kausal von der Ursache auf die Wirkung, und teleologisch von der Wirkung auf die Ursache. Von den Stoikern (als Universaldeterministen) wurde diese Korrelationsimplikation als einzige "allgemeine Implikation" behandelt. Dies erklärt, warum sie ihrer vermeintlichen allgemeinen Implikation einen Falschheitswert beilegten. Sie entspricht ihrer Maxime: Eine falsche Theorie mag wohl einige Wahrheiten implizieren, aber eine wahre Theorie kann auch nicht die geringste Falschheit enthalten!

Es ist von größter Wichtigkeit, bei allen Implikationsformen zu beachten, daß hier gelten muß: Implikative Urteile, die in der einen Form der Implikation wahr sind, sind in den beiden übrigen falsch. Kann man diese verschiedenen Verknüpfungsweisen nicht formal unterscheiden (wie es bei der üblichen Notation der Fall ist), dann hat man Anlaß, sich über die auftretenden Wahrheiten und Falschheiten bei ihrer Verwendung in Urteilen zu wundern. Und das ist wohl der Grund für das, was man gelegentlich "das Rätsel der Implikation" genannt hat.

Corollarium über die kantischen analytischen und synthetischen" Urteile. Wie wir gezeigt haben, verknüpft die Kopula von unten nach oben, und ihr Wahrheitswert beruht darauf, daß sie die generischen Merkmale eines Begriffs offenlegt. Dies macht ihren "analytischen" Charakter aus, den Kant scharfsinnig bemerkt hatte. Nun wird aber auch, wie oben gesagt, die Zuschreibung einer spezifischen Differenz (bzw. eines "zufälligen" empirischen Merkmals) zu einem Begriff gewöhnlich durch das "ist" bewerkstelligt: Kant gab dafür das Beispiel: "(diese) eine Rose ist rot". Und das hat er "synthetisch" genannt. Er gibt als weitere Beispiele für solche synthetischen Urteile mathematische Gleichungen an ("5 + 7 = 12"), die er offensichtlich als kopulative Urteile verstand.

Nun wird die kantische Unterscheidung von analytischen und synthetischen Urteilen heutzutage von den einen noch immer ebenso heftig verteidigt, wie sie von anderen (insbesondere W. V. O. Quine) bestritten wird.

Wir möchten hier auf zwei gravierende logische Fehler Kants hinweisen, die auch noch für die heutige Einschätzung der Lage maßgeblich geworden sind. Kant behauptet bekanntlich, der Begriff der Rose werde durch das Prädikat "rot" in einem synthetischen Urteil ("eine Rose ist rot") "erweitert". Tatsächlich wird keineswegs der Begriff der Rose "erweitert" oder näher determiniert, denn es kann ersichtlich nicht zum Begriff der Rose gehören, daß sie eine bestimmte Farbe besitze (sie muß allerdings überhaupt Farbe besitzen, denn dies gehört "analytisch" zu den generischen Merkmalen aller Rosen). Durch die bestimmte Farbe "rot" wird hier nur eine Art (oder im Kantischen Beispiel eine Unterart) von Rosen bestimmt. Diese Unterart wird durch die individuelle Quantifikation "(diese) eine Rose" (neben beliebig vielen anderen) nur unbestimmt angedeutet. Sie bedarf daher der genaueren Ergänzung durch eine Merkmalsangabe. Es handelt sich bei diesem vermeintlichen synthetischen Urteil also um eine Definition. Und diese ist nicht mittels der Kopula, sondern nur als Äquivalenz bzw. durch den sprachlichen Junktor "das heißt" auszudrücken. Was Kant also synthetisches Urteil nennt, ist logisch gesehen eine Definition und damit kein behauptendes Urteil. (vgl. über die Äquivalenz den folgenden Abschnitt b).

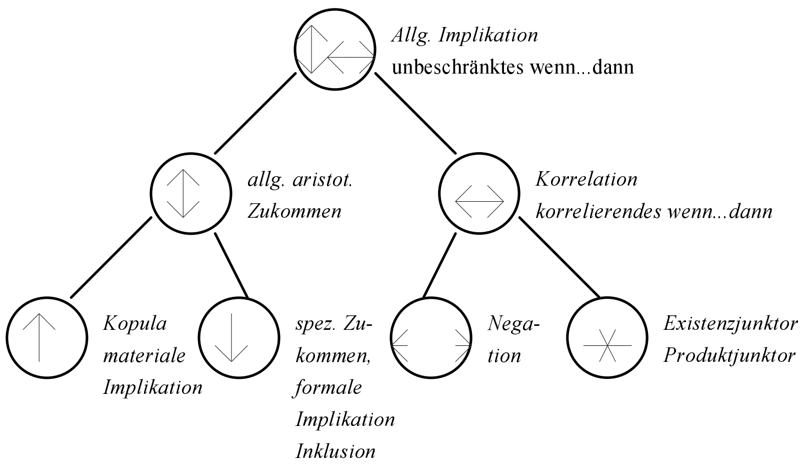
Dieselbe Kritik gilt für das mathematische Beispiel. Mathematische Gleichungen sind ihrer Natur nach Äquivalenzen, und sie haben die Logiker überhaupt erst darauf aufmerksam gemacht, daß es Äquivalenzen gibt und daß diese dasselbe sind wie die aristotelischen Synonyme. Diese definieren sich bekanntlich gegenseitig. Und genau dies leisten die beiden Seiten einer (echten) mathematischen Gleichung. Sie sollten also nicht, wie es von Descartes bis heute häufig vorkommt, mit logischen kopulativen Urteilen verwechselt werden.

Was Kant somit logische oder auch mathematische synthetische Urteile genannt hat, das sind überhaupt keine Urteile, sondern Definitionen und damit Ausdrücke. Kant hatte also Recht damit, die von ihm fälschlich sogenannten synthetischen Urteile als (mathematische) Äquivalenzen darzustellen, aber Unrecht, wenn er auch die Äquivalenzen als kopulative Urteile verstand.

Da diese Verhältnisse in herkömmlicher Notation nicht klargelegt werden können, muß man sich nicht wundern, daß so viele Logiker auch nach Kant noch die Kopula mit der Äquivalenz teils identifizieren, teils verwechseln, und vor allem, daß Mathematiker in der Regel die Gleichungen für behauptende Urteile halten und ihnen überhaupt Wahrheitswerte zuschreiben.

Wir können nunmehr die Pyramide der urteilsbildenden Junktoren aufzeichnen. Sie sieht so aus:

Pyramide der urteilsbildenden Junktoren mit Angabe ihrer "wahren" Verknüpfungsrichtung nebst semiformaler Darstellung



b. Die ausdrucksbildenden Junktoren.

Die bisher nicht behandelten Junktoren verknüpfen sprachliche Elemente zu sprachlichen Ausdrücken, wie z. B. "Hund und Katze", "Geld oder Leben". Sie sind zugleich auch logische Ausdrücke, die für sich stehen oder in Urteilen als Bestandteile an Stelle des Subjekts oder des Prädikats vorkommen können. Ihr Sinn ist unmittelbar verständlich, wenn auch nicht immer leicht zu umschreiben. Wichtig ist zunächst, daß solche Ausdrücke auch logisch sinnvoll sind. Würden wir aber z. B. äußern: "Geld oder Geld", so würde man das entweder für einen Scherz oder für baren Unsinn (oder ersteres mittels letzterem) halten. Daran läßt sich zeigen, daß auch die ausdrucksbildenden Junktoren grundsätzlich Unterschiedenes verknüpfen, nicht aber dasselbe mit sich selbst.

Dies war schon das Problem der allgemeinen Implikation. Man steht also wieder vor der Frage, ob man in der Logik Junktoren zulassen will, die Positionen mit sich selbst verknüpfen, mit anderen Worten: ob man den "ipsoflexiven" (auf sich selbst zurückgewendeten) Gebrauch der Junktoren logisch für sinnvoll hält. Daß ein solcher ipsoflexiver (manchmal auch "reflexiv" genannter) Gebrauch in der Logik üblich ist, ist keine Frage. Aber er hat überall zu paradoxalen Folgen geführt. Wollen wir die Logik klären und vereinfachen, so muß er, wo er (und sei es auch nur dissimuliert) vorkommt, deutlich gekennzeichnet und seine Folgen müssen klar erkennbar werden. Wir halten ihn für eine der Haupteinbruchstellen des Non-sense in die Logik, die mit solchen logischen Formen sprachlichen Unsinn zu logischem Sinn verwandeln soll.

Einige Beispiele mögen das Verständnis erleichtern. Ersichtlich macht es keinen Unterschied, ob man "Hund und Katze" oder "Katze und Hund" sagt, ebenso wenig, ob es "Geld oder Leben" oder "Leben oder Geld" heißt. Das logische "und" (*Adjunktion*) und das logische "oder" (*ausschließende und nichtausschließende Disjunktion*) verknüpfen also in beiden Querrichtungen. Darüber hinaus verknüpfen beide aber auch von unten nach oben und von oben nach unten. Man kann also die sinnvollen Ausdrücke bilden: "Hunde und Tiere" bzw. "Tiere und Hunde" sowie "Hunde oder Tiere" bzw. "Tiere oder Hunde", wobei jeweils Gattungs- und Artpositionen verknüpft werden. Sprachlich wird man dies aber durch zusätzliche Partikel signalisieren, etwa: "Hunde und andere Tiere", "Tiere und insbesondere Hunde".

Bemerken wir hier schon, daß das mathematische "und" ("plus" bzw. *Summenbildungsjunktor*) nur Querverbindungen zwischen Nebenarten derselben Gattung oder Individuen derselben Art herstellt, und deswegen gegenüber dem allgemeinen logischen Adjunktionsjunktor eingeschränkt ist. Deshalb kann man bekanntlich nur Gleichartiges addieren, nicht aber Individuen einer Art mit Arten selbst (z. B. Äpfel mit Obst oder Obst mit Äpfeln, es sei denn, daß die Äpfel selbst als "einige Obstexemplare" definiert werden, wobei es also nicht auf den Apfelcharakter ankommt).

Ebenfalls nur ausdrucksbildend sind die drei *Quantifikationsjunktoren*. Sie verknüpfen von oben nach unten und umgekehrt. "*Ein* Mensch" (*Individualisator*) bezeichnet ein menschliches Individuum vom Gattungsbegriff "Mensch" her und verknüpft so beide Begriffspositionen. "*Einige* Menschen" (*Partikularisator*) verknüpft die Gattungsposition "Mensch" mit einem seiner Artbegriffe und umgekehrt. "*Alle* Menschen" (*All-Quantor*) verknüpft die Gattung "Mensch" mit allen ihren Art- und Unterartpositionen (bzw. Individuen) und umgekehrt.

Nur der Allquantor ist, da er eine Gattung mit allen unter ihr strehenden Arten und Unterarten bzw. Individuen verknüpft, eindeutig. Der Partikularisator verknüpft jeweils nur eine von mindestens zwei Arten mit seiner Gattung ohne festzulegen, welche Art damit gemeint ist. Er ist deshalb auch mindestens zweideutig, und sein Gebrauch bedarf weiterer Verdeutlichung. Deshalb haben wir vorne gesagt, daß er sich nur für eine Definition - und nicht für Urteile - eigne. Der Ausdruck "einige Lebewesen" ist definitionsbedürftig, und die genaue Bestimmung, welche Art von Lebewesen gemeint sein kann, wird durch eine spezifische Differenz beim Definiens ausgedrückt: "einige Lebewesen = die Tiere". Das Entsprechende gilt vom Individualisator. Auch er ist immer mehrdeutig und bedarf der Ergänzung durch die Angabe spezifischer Differenzen: "ein Lebewesen = der Hund".

Schließlich ist der *Äquivalenzjunktor* bzw. die *mathematische Gleichheit* nur ausdrucksbildend. Das muß mit allem Nachdruck betont werden, denn nicht nur die Mathematiker, sondern auch die meisten Logiker halten diesen Junktor für urteilsbildend und daher für wahrheitswertfähig. Von der Entscheidung dieser Frage hängt natürlich ab, ob man den ganzen Reichtum dessen, was in mathematischen Gleichungen dargestellt wird, für "wahr" (genauer: für wahrheitswertfähig) hält. Tut man dies, sieht man sich aber auch gezwungen, Definitionen, die als Äquivalenzen formuliert werden, für wahrheitswertfähige Urteile zu halten. Letzteres dürfte eher bestritten werden, da man ja gewöhnlich davon ausgeht, Definitionen seien "frei" zu setzen.

Die Frage berührt, wie oben ausgeführt, auch die Frage der Wahrheitswertfähigkeit der von Kant sogenannten synthetischen Urteile, die inhaltlich als "empirische Urteile" geradezu als Hauptbeispiele für entscheidbare wahrheitswertfähige Urteile gelten. Wir gehen hier davon aus, daß der Äquivalenzjunktor logisch keine Urteile, sondern Ausdrücke bildet und nehmen dafür die Gründe in Anspruch, die sich aus der Struktur der pyramidalen Struktur der Junktorenbegriffe ergeben.

Die genannten Junktoren bilden tatsächlich das, was Wittgenstein "Begriffsverkettungen" genannt hatte. Die dadurch gebildeten Ausdrücke können in den Urteilen sowohl in der Subjekt- als auch in der Prädikatsstellung auftreten (Hamilton, Beneke und andere machten Vorschläge für die logische Quantifikation des Prädikates, was aber nicht weiter verfolgt wurde. Wohl aber bedient sich die Wahrscheinlichkeitslogik mathematischer Quantifikationen von Wahrscheinlichkeitsprädikaten, vgl. darüber später Gesagtes). Traditionellerweise werden die Urteile selbst danach eingeteilt, also in Quantitätsurteile, disjunktive Urteile, adjunktive Urteile (s. u.). Das dürfte der Grund dafür sein, daß man diese Junktoren selbst auch für wahrheitswertfähig gehalten hat. Der Wahrheits- und Falschheitswert der komplexen Urteile, in denen sie verwendet werden, hängt aber in jedem Falle von den darin vorkommenden urteilsbildenden Junktoren ab.

Die ausdrucksbildenden Junktoren lassen sich als Dispositionsbegriffe zwischen den Arten bzw. Unterarten der urteilsbildenden Junktoren in die Begriffspyramide einbauen. Als Dispositionsbegriffe verschmelzen sie die getrennten Bedeutungen der jeweiligen unterschiedenen Nebenarten bzw. Neben-Unterarten der urteilsbildenden Junktoren. Dies wiederum neutralisiert gleichsam deren Wahrheitswerte.

1. Die *Quantifikation* bildet Ausdrücke, in denen eine Gattungsposition mit zugehörigen Art- und Unterartpositionen (bzw. Individuenpositionen) und umgekehrt verknüpft wird. Die Verbindung von oben nach unten und umgekehrt verschmilzt den Sinn der materialen und formalen Implikation bzw. der Kopula und des aristotelischen speziellen Zukommens. Quantifikation im mathematischen Sinne ist die zahlenmäßig bestimmte Art zu einer Gattung, die logisch als "einige Exemplare von..." ausgedrückt wird. Es wird also das logische "einige" aufgespreizt in bestimmte Zahlangaben zwischen dem "ein" und dem "alle". Die logischen Extreme "alle" und "ein" bleiben auch in der Mathematik zunächst als "logische"

Quantifikationen von Einheiten und Allheiten (mathematisches Infinites) erhalten. Erst in der speziell-arithmetischen Zahldefinition wird eine arithmetisch bestimmte Einheit zur Zahl Eins und eine arithmetisch bestimmte Allheit zur mathematischen Zahl.

Die logischen Quantifikatoren verschmelzen die urteilsbildenden Junktoren der materialen und formalen Implikation (bzw. der Kopula und des speziellen Zukommens) zu einem dispositiven Junktor, der die Wahrheitswerte der Implikationen neutralisiert. Jede pyramidale Begriffsposition bezeichnet ebensowohl "ein Exemplar" einer höheren Position, wie zugleich auch "einige Exemplare" derselben, und sie enthält ihrerseits "eine", "einige" und "alle" unter ihr stehenden Positionen.

2. Die *Äquivalenz* bildet Ausdrücke, in denen im Querverhältnis zueinander stehende Positionen verknüpft sind. Gemeinsprachlich läßt sie sich durch "das heißt" oder "entspricht" ausdrücken, mathematisch genau durch "ist gleich", aber niemals durch die Kopula" (wie es gleichwohl, vor allem beim Lesen des Gleichheitszeichens, oft geschieht). Unterschieden werden solche durch die Äquivalenz verknüpften Positionen durch die Negation. Verschmolzen werden sie durch den Existenz- bzw. Produktjunktor. Die Verschmelzung der Negation und des Existenzjunktors in einen Dispositionsbegriff neutralisiert auch deren Wahrheitswerte. Und die widersprüchliche Natur des Dispositionsbegriffs bewirkt, daß die Äquivalenz das einerseits Wohlunterschiedene und damit Verschiedene zugleich als ein Identisches darstellt.

In mathematischen Gleichungen liegt die Verschiedenheit in den Ausdrücken links und rechts vom Gleichheitszeichen, die Identität im (Zahlen-) Wert dieser Ausdrücke. Gottlob Frege hat diese Gleichungseigenschaften mit der Unterscheidung von "Sinn" und "Bedeutung" fixiert: "Sinn" bezieht sich bei ihm auf die verschiedenen "Ausdrücke" links und recht in der Gleichung, "Bedeutung" ist der identische "Größenwert" der beiden Ausdrücke. Beides muß beim Verständnis der Gleichung berücksichtigt werden. Dasselbe gilt von allen Definitionen, die ja ebenfalls Äquivalenzausdrücke sind. Das Wohlunterschiedene liegt hier in den Ausdrücken für das jeweilige Interpretandum und Interpretans, die Identität in der gemeinsamen Bedeutung beider.

Wenn Frege die Begriffe als "ungesättigte Funktionen" (Gleichungen) bezeichnet hat, so ist das gemäß der Natur der Äquivalenzen bzw. der Gleichungen nur konsequent und richtig. Denn jede Seite einer (echten) Gleichung stellt einen Begriff oder einen Ausdruck dar. Wird er aus der Gleichung herausgenommen, so kann man ihn als "unvollständige Gleichung" bezeichnen. Wären die Gleichungen aber tatsächlich behauptende Urteile, so wäre die Fregesche Bestimmung der Begriffe offensichtlich falsch, denn kein Begriff oder Ausdruck ist ein ungesättigtes oder unvollständiges Urteil. Man hat aber Anlaß zu der Vermutung, daß Frege weithin in letzterem Sinne verstanden worden ist.

3. Die *unvollständige Disjunktion*, *"vel"* bzw. etwas genauer als üblich durch *"und/oder"* ausgedrückt, verknüpft beliebige Begriffe in jeder Richtung miteinander. Sie ist ein Dispositionsbegriff, der aus dem allgemeinen Zukommen (vertikale Verknüpfung) und der Korrelation (horizontale Verknüpfung) verschmolzen ist und damit deren Wahrheitswerte neutralisiert. Analog zur Quantifikation enthält auch die unvollständige Disjunktion zwei Extreme, nämlich die vollständige Disjunktion und die Adjunktion. Dies haben wir durch die im Beamtendeutsch übliche Formel "und/oder", die diese Extreme zusammenfaßt, ausgedrückt. Die Extreme ergeben sich in den Fällen, bei denen positive mit negativen Begriffen zu Ausdrücken verknüpft werden (A und Nicht-A; A oder Nicht-A).

4. Die *vollständige Disjunktion, Alternative* bzw. *"entweder...oder" ("aut...aut")* verknüpft ebenfalls beliebige Begriffspositionen in jeder Richtung miteinander zu Ausdrücken. Der Sinn dieser Ausdrücke ist demjenigen von Dispositionsbegriffen verwandt. Was diese in einen Begriff zusammenfassen, legen jene in zwei Begriffen auseinander ("Schmelzbarkeit" kann, wenn sie nicht direkt als contradictio in adiecto konstruiert wird, verdeutlicht werden als "entweder geschmolzen oder nicht geschmolzen"). Alternative Ausdrücke stehen daher für Wahlmöglichkeiten, unentschiedenes Wissen (Probleme, Vermutungen), Fragestellungen und Entscheidungslagen. Dies wird am häufigsten durch die Verknüpfung von dihäretischen Artbegriffen erreicht. Diese stehen im Verhältnis der bestimmten Negation zueinander und können somit durch die Negation des einen von beiden angegeben werden. Daher ist die verbreitetste Form der Alternative mittels der Negation darzustellen: "entweder männlich oder nicht-männlich" (= "entweder männlich oder weiblich"). Versteht man die Negation hier als unbestimmte, so läßt sie neben "männlich" "alles andere als männlich" übrig.

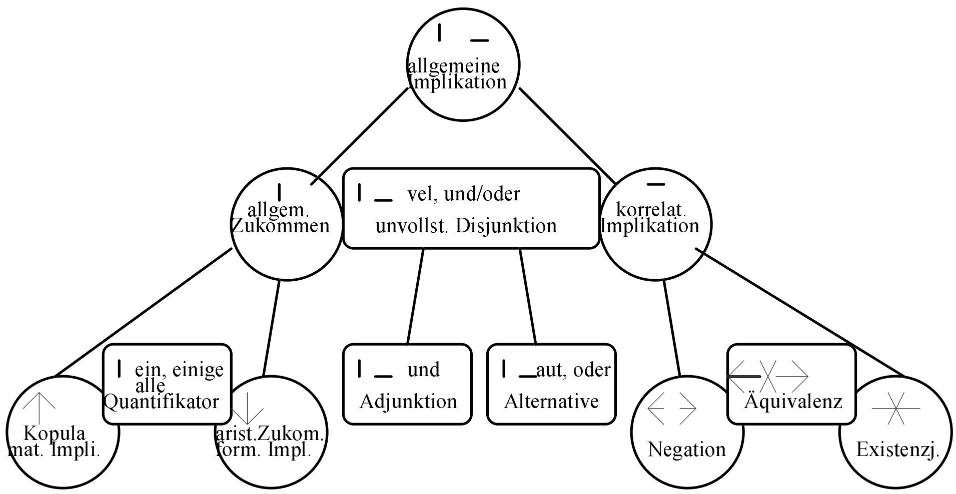
Zweifellos ist die Alternative eine der obskursten logischen Ausdrucksformen. Sie vereinigt nämlich ein präzises logisches (und entsprechend inhaltliches) Wissen mit einem ebenso präzisen Nichtwissen. Man kann dies mit einem schönen Ausdruck des Nikolaus von Kues als "docta ignorantia" bezeichnen. Wobei es eben höchst dunkel erscheint, was dieses präzise Nichtwissen sein könnte. Das Wissen bezieht sich auf alles das, was auch in anderen Ausdrücken über die Verknüpfung der Begriffe des Ausdrucks dargestellt werden kann: z. B. daß es sich (in der Regel) um dihäretische Nebenarten handelt, daß diese in bestimmter Negation zu einander stehen usw. Was man nicht weiß, bezieht sich auf eine Präferenz des einen vor dem anderen, die zugleich nicht begründet bzw. getätigt wird. Denn ersichtlich kann sich eine Präferenz erst von einem Dritten her (welches ebenfalls eine logische Position in der Pyramide sein muß) ergeben. Wir werden diese Dimension des Nichtwissens bei der Behandlung alternativer Urteile weiterverfolgen.

5. Die *Adjunktion* bzw. das *"und"* verknüpft ebenfalls beliebige Begriffspositionen in jeder Richtung miteinander zu Ausdrücken. Das kann man an den so beliebten Buchtiteln sehen, die davon Gebrauch machen. Solche Ausdrücke können sehr lange Verkettungen werden. Es ist sprachlicher Usus, nur das letzte "und" zu formulieren und die vorangehenden Glieder mit Komma abzugrenzen ("Sokrates, Platon, Plotin, der Neuplatonismus und die christliche Philosophie"). In logischer Betrachtung muß dergleichen explizit gemacht werden. Man sieht dann, daß ein solcher Ausdruck eine Sinneinheit umfaßt, von der alles weitere im Kontext Ausgeführte gleicherweise gelten muß. Soll ein Teil davon ausgenommen werden, so kann man die Adjunktion selbst für diesen Teil negieren ("und nicht...").

Wie vorn schon bemerkt, ist das mathematische "und" (Plus, Summenbildungszeichen " + ") auf Querverbindungen eingeschränkt (man addiert nur "Gleichartiges"). Auch das mathematische "und" läßt sich negieren. Anders als im logischen Gebrauch, welcher dann nur eine andere Art von den sonst adjungierten Arten abgrenzt (Äpfel und nicht Birnen), führt das in der Mathematik konventionell zu einer "ispsoflexiven" Anwendung auf die gleichartigen Exemplare (einige Äpfel und nicht einige Äpfel). Die unbeschränkte Anwendung bei zahlenmäßig quantifizierten Arten führt dann bekanntlich zur "Nullklasse" ("keine Äpfel") und darüber hinaus "kreativ" zu "einigen Nicht-Äpfeln". Diese wären für den Logiker allenfalls "Birnen" (oder eine andere Obstart). Für den Mathematikanwender werden sie zu "(negativen) Äpfeln in einer möglichen Welt" (entsprechend den negativen Zahlen im Zahlenkontinuum). Daß dieses eine dialektische Konstruktion sein muß, liegt auf der Hand.

Wir können nun die Dispositionsbegriffe der ausdrucksbildenden Junktoren in die Pyramide der Junktoren eingliedern. Die Pyramide aller logischen Junktoren sieht dann so aus:

Pyramide aller logischen Junktoren



Fassen wir zusammen, worauf es bei dieser pyramidalen Darstellung der logischen Junktoren ankommt.

1. Sie konstruiert die Junktoren selber als logische Begriffe, die ihrerseits zum Gegenstand logischer Definitionen, Urteile und Schlüsse gemacht werden können.

2. Sie kennzeichnet prägnant den Unterschied zwischen ausdrucksbildenden (nicht-behauptenden) und urteilsbildenden (behauptenden) Junktoren.

3. Sie legt die gemeinsamen "generischen" und die jeweils verschiedenen "spezifischen" Merkmale der einzelnen Junktoren offen.

4. Sie stellt im Begriff des allgemeinsten Junktors das wesentliche generische Merkmal der Begriffsverknüpfung in den logisch möglichen Richtungen selbst heraus, das in allen subalternen Junktorbegriffen identisch erhalten bleibt. Damit ist auch festgestellt, daß die sogenannte ipsoflexive Junktur ("verknüpft mit sich selbst") keine "logische" Junktur sein kann.

5. Die spezifischen Differenzen der Urteilsjunktoren bedeuten Einschränkungen der "wahren" Verknüpfungsrichtungen (des allgemeinen Implikationsjunktors) und deren Unterscheidung von den dann übrig bleibenden "falschen" Verknüpfungsrichtungen bei den spezifizierten Urteilsjunktoren. Bei den als Dispositionsbegriffe eingeschriebenen Ausdrucksjunktoren neutralisieren sich die "wahr-falsch"-Verknüpfungen, d. h. es bleiben die Verknüpfungsrichtungen ihrer Oberbegriffe erhalten.

6. Diese Begriffsbestimmungen aller logischen Junktoren liefert zugleich die Grundlage für eine kohärentistische logische Theorie der Wahrheitswerte. Urteilsbildende Junktoren liefern wahre Urteile in den jeweils spezifiziertern Verknüpfungsrichtungen und falsche in jeder anderen. Ausdrucksbildende (Dispositions-) Junktoren liefern wahrheitswertneutrale Verkettungen von Begriffspositionen in der Pyramide.

7. Die Definitionen der einzelnen Junktoren bestimmen zugleich die kommutative Ersetzbarkeit (Substitution) der einzelnen Junktoren durch ihre negierten Nebenarten. Darauf beruhen die sogenannten Äquivalenzgesetze der Junktorenanwendung (vgl. dazu Kapitel 6).

8. Die von Post vorgeschlagene Äquivalenz der negierten unvollständigen Disjunktion mit allen anderen Junktoren (vgl. seine oben zitierte Dissertation) stellt eine überflüssige Komplizierung dar. Denn wie man in der Junktorenpyramide sieht, verknüpft die unvollständige Disjunktion schon selbst alle Positionen. Durch die postsche Negation werden dabei nur positiv bezeichnete Begriffspositionen durch ihre negativen Terme ausgetauscht.

9. Die zuerst von Ch. S. Peirce, dann von H. M. Sheffer vorgeschlagene Äquivalenz zwischen einem von ihnen vorgeschlagenen "neuen" Junktor, dem "Shefferschen Strich", und allen anderen Junktoren krankt an der in der üblichen Notation nicht darstellbaren Unterscheidung von bestimmter und unbestimmter Negation. Der Sheffersche Strich wurde einerseits als "negierte Adjunktion" (nicht ... und nicht ... = weder ... noch) eingeführt, er stellt aber zugleich auch eine negierte unvollständige Disjunktion dar. In letzterer Hinsicht bedeutet er dasselbe wie der von Post vorgeschlagene Junktor. Wie in der Pyramide ablesbar, ist eine Nicht-Adjunktion in bestimmter Negation äquivalent mit der Alternative. Adjunktion und Alternative sind aber ihrerseits Unterarten der unvollständigen Disjunktion (und/oder), die alle Begriffspositionen verknüpft. Wird sie negiert, so kann das nur zweierlei bedeuten. Entweder wird überhaupt jede Verknüpfungsmöglichkeit verneint. Dann kann der Sheffersche Strich überhaupt kein Junktor sein. Oder es werden wiederum nur alle Begriffspositionen durch negative Terme bezeichnet. Und das kommt auf den Postschen Vorschlag hinaus.

c. Die mathematischen Junktoren

Was wir so nennen sind die sogenannten Rechenoperatoren für den Umgang mit Zahlen. Richtige Rechnungen gelten seit den ältesten Zeiten als Vorbild für methodisch geleitetes, überprüfbares und jedermann zugängliches Denken über zählbare Gegenstände und über Zahlen selber. Ihre Ergebnisse nennt man, wenn alle Rechenoperationen vorschriftsmäßig ausgeführt werden, nicht nur richtig, sondern auch wahr. Und dies umso mehr, als man unrichtige Ergebnisse geradezu emphatisch falsch nennt.

Daran zeigt sich, daß das Rechnen auch seit alters der Logik darin Konkurrenz gemacht hat, sehr viel Genaueres über Wahrheit und Falschheit wenigstens in einem bestimmten Gegenstandsbereich ausmachen zu können als die Logik. Offensichtlich war richtiges und falsches Rechnen auch für die

Logik ein Vorbild und ein Motiv, beim Umgang mit Begriffen und Behauptungen auf strikte Entscheidbarkeit zwischen wahrem und falschem Denken, also auf die sogenannte Zweiwertigkeit zu dringen.

Für das Rechnen stellen sich Rechenaufgaben der Summation, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division (Teilung), die noch immer die Grundlage für das Erlernen der Arithmetik als Disziplin geblieben sind, und viele später entwickelte "Aufgaben" oder "Probleme". Und auch sie wurden vorbildlich für regelrechte Problemstellungen in der Logik.

Die Formalisierung von Rechenaufgaben und ihrer Lösung ergab die Darstellung in Gleichungen. Und auch damit gab die Mathematik der Logik ein Vorbild für das logische Schlußverfahren: "Wenn das Problem XY rechnerisch gelöst wird, dann ist das Resultat gleich Z". Vielleicht hat nicht nur der Verfasser beim frühesten Kontakt mit dieser arithmetischen Problemlösungskunst in der Grundschule gemeint, das "ist gleich" in den Gleichungen deute auf eine besonders schnelle Denklösung hin, der gegenüber logische Problemlösung eben längere Zeit brauchten. Und gewiß haben nicht nur mathematische Laien eisern daran festgehalten, daß das Auflösen von Gleichungen nicht nur ein Äquivalent für logische Behauptungen und Schlüsse, sondern geradezu die ausgereiftere logische Sache selbst sei.

Beim Ausrechnen einer bestimmten Aufgabe kann man vielerlei Fehler machen, wodurch sich ersichtlich vielerlei falsche Resultate ergeben. Aber sie lassen sich immer als Fehler nachweisen. Daß es auch bei der Auflösung bestimmter Gleichungen mehrere "richtige" Resultate nebeneinander geben kann, hat noch keinen Mathematiker an der Zweiwertigkeit irregemacht. Denn alle "Wahrheiten" sind für Mathematiker "eine Wahrheit" (wie Frege behauptete), und nur die Falschheit hat viele Gestalten (außer für Frege, der auch nur eine Falschheit anerkannte). Gleichwohl sollte das den Logikern zu denken geben, denn es zeigt schon einen wesentlichen Unterschied zwischen mathematischer Analysis und Logik an. Kein Logiker würde einen Schluß für zwingend halten, wenn er auf mehrere Folgerungen führen würde.

Wenn wir hier zunächst darauf hingewiesen haben, daß die Arithmetik ein altes und traditionelles Vorbild für die Logik gewesen ist, so darum, weil dies verständlich macht, warum auch die neuere Logik nach dem Ausbau der Arithmetik zur Analysis sich nicht nur an dieser orientiert hat, sondern sich geradezu nach dieser zu einer "mathematischen Logik" stilisiert hat. Mathematische Grundlagenforscher betonten und betonen noch immer, sie hätten dabei die Logik dazu benutzt, die Grundlagen der Mathematik zu klären und zu sichern. In der Tat ist das aber nicht so. Sie haben vielmehr eine eigene auf ihre Bereichsprobleme zugeschnittene mathematische Logik entwickelt, die nur in losem Zusammenhang mit dem steht, was man - in welchem Sinne auch immer - unter Logik verstehen kann. Ernst Cassirer sah das wohl richtig, als er 1950 (nicht ganz unzweideutig) schrieb: "In den Arbeiten der Begründer der 'symbolischen Logik', bei Schröder und Boole, bei Frege und Russell, war die Mathematisierung der Logik so weit fortgeschritten, daß die völlige Logisierung der Mathematik folgen konnte. Zwischen beiden Gebieten ließ sich künftig keinerlei scharfe sachliche Grenze mehr ziehen. ... Logik und Mathematik - so erklärt Russell - unterscheiden sich, wie der Knabe sich vom Manne unterscheidet; die Logik ist die Jugend der Mathematik und die Mathematik das Mannesalter der Logik" (vgl. E. Cassirer, Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit, 4. Band, 2. Aufl. Darmstadt 1973, S. 67).

Diese Tendenz läßt sich in der Neuzeit genauer verfolgen. Ihr auffälligster Ausdruck ist das, was man seither "Kalkülisierung" der Logik nennt, und was dann zu allerhand "logischen Kalkülen" für die Anwendung der Mathematik auf die verschiedensten Wissenschaftsgebiete und auch auf die Logik selber geführt hat. "Kalkül" (ursprünglich der Umgang mit "Rechensteinen", griech. psephoi, lat. calculus) ist dafür ein ehrliches Wort, denn es meint ja genau, daß logisches Prozedere in der Form einer Rechnung betrieben werden könnte und soll. Rechnen aber heißt, sich "ohne Bedenken" dem mechanischen Prozedere anzuvertrauen und das Resultat durch das regelrechte Operieren selbst als gesichert anzuerkennen.

Wenn die Logik aber zu einem Rechnungskalkül wird, so kann das nur bedeuten, daß einerseits die mathematischen Rechenarten an die Stelle der bislang benutzten logischen Junktoren treten sollen; andererseits das logische Prozedere ebenso wie das Rechnen zu einem rein mechanischen Vorgang werden soll, bei dem außer dem Regelbefolgen nichts weiter zu bedenken sei. Auch diese Tendenz kündigte sich spätestens seit Leibniz an. Er rief bekanntlich dazu auf, anstelle endloser Dispute zu "rechnen" - und zwar jeder Disputant für sich, um danach die Rechenergebnisse zu vergleichen. Bemerken wir aber hier schon, daß der kalkülmäßige Umgang mit arithmetischen und dann auch logischen Gebilden sich nur der logischen Undurchschautheit der mathematischen Junktoren selbst verdankt. Man verwendet sie in der Regel wie Maschinen oder jetzt auch wie Computer, über deren "inneres" mechanisches Funktionieren man in der Tat nichts wissen muß und meistens auch nichts weiß, um sie dennoch effektiv zu beherrschen. Dieses Kalkülmäßige dürfte sich allerdings in der Mathematik und erst recht in der Logik verlieren, sobald die logische Natur der Junktoren, darin eingeschlossen der mathematischen Operatoren, aufgeklärt werden kann. Davon aber erhoffen wir uns wiederum eine umso effektivere Einsetzbarkeit derselben.

Leibniz, Hobbes und de Condillac - um nur die berühmtesten Propagatoren zu nennen - sprachen vom "Rechnen mit Begriffen". Es schwebte ihnen vor, die Abstraktion als Subtraktion (von Merkmalen) und die "Synthesis" konkreter merkmalsreicher Begriffe als Addition zu begreifen. Leibniz schlug auch zuerst vor, die (unvollständige) Disjunktion von Begriffen als "logische Summe" und die Adjunktion als "logisches Produkt" zu fassen, was sich dann als Standardbezeichnung für diese Ausdrucksbildung in der mathematischen Logik durchgesetzt hat. Für die mathematische Produktbildung und die Division fand sich dann freilich kein logisches Pendant mehr, das dadurch angeblich exakter gefaßt werden konnte. So blieb es beim mathematischen Produkt als "Mengendurchschnitt", den man so in die mathematische Logik einführte. Für die Division, um die George Boole rang, zeigte sich überhaupt kein logisches Äquivalent, ganz zu schweigen von den höheren Rechenarten der Potenzbildung, des Wurzelziehens, der Integration und der Differentiation.

Mit der Negation tat man sich ebenfalls schwer, denn sie war schon für die Bildung der "negativen Zahlen" vergeben. So benützt man sie in der mathematischen Logik meistens für die Auszeichnung des "Falschen" ("-p"; -p = falscher Satz) im Gegensatz zum positiven "Wahren" ("p"; p = wahrer Satz). Wir möchten vermuten, daß dieser Gebrauch der Negation zur Kennzeichnung falscher "Aussagen" für sehr viele Irrtümer und überflüssige Komplizierungen in der Aussagenlogik verantwortlich ist. Er ist zwar immer dann gerechtfertigt, wenn eine allgemeine Aussage ("alle X sind Y") als wahr bekannt ist, denn dann ist ihre Negation ("kein X ist Y") falsch. Aber das gilt schon traditionell nicht mehr für sog. partikuläre Aussagen, die gleichzeitig positiv und negiert für wahr gehalten werden (z. B. "einige Lebewesen sind Tiere", "einige Lebewesen sind nicht Tiere", nämlich die Pflanzen. Beide sog. partikulären Urteile gelten als wahr; wir halten "partikuläre Urteile" aber für definierende Äquivalenzausdrücke: "einige Lebewesen = Tiere!). Aber bekanntlich können auch negative Aussagen wahr sein, und mit solchen kann die mathematische Logik dann nicht mehr rechnen.

Am meisten aber lud die logische Quantifikation dazu ein, sie mathematisch exakter zu fassen. Das "alle" wurde zum Wertebereich von Variablen, das "einige" wurde mit dem "ein" zum "Existenzjunktor" vereinigt. Das "kein" wurde durch die Null als "leere Klasse" ersetzt. Wir haben vorne schon erwähnt, daß die stoische Logik und Begriffslehre, die die in der aristotelischen Logik quantifizierten Extensionen nicht beachtete, dadurch geradezu die extensionalen "Leerstellen" schuf, die durch mathematisch-zahlenmäßige Quantifikationen aufgefüllt werden konnten.

Die Kopula, zweifellos der logische (und sprachliche) Hauptjunktor, wurde mit dem "ist gleich" der Gleichungen identifiziert, die man dann auch (wie schon Descartes und Kant) als Standardform der mathematischen Aussagenlogik auszeichnete. Dafür sah man sich gezwungen, für die Äquivalenz einen neuen Junktor einzuführen, indem man statt zwei nun drei Querstriche (" $\equiv$ ") schrieb. Für die Implikation, die man auch in der mathematischen Logik für einen einzigen Junktor hält, bot sich die Verbindung der Gleichheit mit der Ungleichheit ("gleich/größer $\geq$ als" $\supseteq$ bzw. "gleich/kleiner $\leq$ als" $\subseteq$) an, was zugleich die "Selbstimplikation" jedes logischen Gegenstandes mit sich selber ausdrückt. Die Selbstimplikation, die in der aristotelischen Logik nicht vorkommt, und gegen die sich auch die meisten stoischen Logiker aussprachen, die wir daher auch aus den logisch zulässigen Junktoren ausgeschieden haben, wird für die mathematische Logik (und ist für die Arithmetik insgesamt) geradezu konstitutiv.

Das alles geschah und geschieht in Anknüpfung an die mathematische Mengenlehre, die als "extensionale Logik" ("Klassenlogik") ausgebaut wurde. Von "extensionaler Logik" war auch in der Tradition schon lange die Rede, indem man meinte, es ließe sich der "intensionale Aspekt" des Logischen reinlich vom "extensionalen Aspekt" trennen. Und zweifellos kommt der extensionale Aspekt, der nur auf die "quantifizierbaren" Begriffsumfänge und Inklusionsverhältnisse von Begriffen achtet, der mathematischen Logik weit entgegen. Der hierdurch vernachlässigte - aber gewiß nicht aus der Logik eliminierbare - intensionale Aspekt der Begriffe wurde und wird dafür einem Bereich "intuitiver Interpretationen", "Modellvorstellungen" und "Bewertungen" zugewiesen, der alles Formale und Unanschauliche überhaupt erst vorstellbar und verständlich machen soll.

Wir wollen nicht behaupten, daß jeder mathematische Logiker dieser Charakterisierung zustimmen wird. Es kommt uns auf die Tendenz an, in der in der mathematischen Logik auf die Mathematisierung der Logik hingearbeitet wurde und noch wird. Und diese sollte jeder Logiker sich deutlich vor Augen bringen, wenn er überhaupt verstehen will, um was es dabei geht.

Daß die Logik bei dieser Mathematisierung nicht dieselbe bleibt, liegt auf der Hand. Man hat die Wahl, sie aufzugeben und durch Mathematik zu ersetzen, oder sie beizubehalten, zu verbessern und sie ihrerseits kritisch auf die mathematische Logik anzuwenden. Letzteres wollen wir hier versuchen, indem wir die mathematischen Rechenarten, soweit sie logischer Analyse zugänglich sind, als Junktoren beschreiben.

1. *Die Summation bzw. Summe (Additionsjunktor)* ist eine eingeschränkte Adjunktion, wie oben schon bei dieser ausgeführt wurde. Der Additionsjunktor verknüpft nur "Gleichartiges" im pyramidalen Querverhältnis und ist daher nicht auf vertikale Verbindungen (Art- Gattung und umgekehrt) anwendbar. In logischer Quantifikation werden also "ein ... und ein.." usw. oder "einige... und einige ..." unter demselben Oberbegriff "Summe" verknüpft. Da die mathematische Summenbildung eine auf Querverhältnisse eingeschränkte Adjunktion ist, kann sie nichts mit der logischen Disjunktion zu tun haben. Die logische Disjunktion, und zwar sowohl die unvollständige wie die vollständige (Alternative) hat kein mathematisches Pendant.

Summen sind jungierte Zahlausdrücke, die zur Definition einzelner Zahlen oder anderer Summen dienen können, wie vorn bei der Definition der Zahl Zwei aus der Summation von zwei Einsen gezeigt wurde. Die Umschreibung einer Zahl als Summe dient zugleich als Notation einer Rechenaufgabe, deren Ergebnis als dadurch definierte Zahl mittels des Äquivalenzjunktors bzw. Gleichheitszeichen neben den Summenausdruck notiert wird.

2. *Die Subtraktion (Differenzenbildung)* ist ein aus dem Additionsjunktor (also der eingeschränkten Adjunktion), der logischen Negation und der Quantifikationen der jungierten Begriffe zusammengesetzter Junktor. Logisch läßt er sich als "alle ... und nicht einige..." in Anwendung auf gleichrangige Begriffe im Querverhältnis lesen. In der Mathematik führt er bei unbeschränkter Anwendung auf Zahleinheiten bekanntlich auf die Null und die negativen Zahlen. Dies läßt sich logisch nur so erläutern: Was mathematisch als Null erscheint, entspricht dem logischen Ausdruck "alle... und kein..." und erweist sich somit als ein kontradiktorischer Ausdruck. Entsprechend ist die Null logisch "eine" Zahl und zugleich "keine" Zahl.

Die Subtraktion über die Null hinweg erzeugt und definiert die negativen Zahlen. Euklid hat sie noch nicht gekannt, und noch Vieta wehrte sich im 16. Jahrhundert dagegen, sie überhaupt als Zahlen anzuerkennen. Dem Übergang zu negativen Zahlen entspricht logisch der Übergang auf eine Nebenart des Ausgangsbegriffes. Z. B. "ein X und einige Nicht-X" (z. B. "ein Hund und einige Nicht-Hunde", ggf. Katzen). Für den Logiker sind die negativen Zahlen eine besondere (indexierte) Zahlart neben den positiven Zahlen, ebenso wie im logischen Beispiel die "Katzen" eine negativ benennbare Nebenart der Hunde sind. Ihr spezifisches Merkmal der "Negativität" drückt ihre Bildungsgenesis aus einer Negation in genau derselben Weise aus, wie die vorn behandelten negativen Begriffe.

Während negative Begriffe logische Ausdrücke für positive Begriffe sind und daher durch diese ersetzt werden können, gilt dies für negative Zahlen nicht, da sie eine spezielle Zahlart bilden.

3. *Die Produktbildung (Multiplikation)* ist mit dem logischen Produktbildungsjunktor bzw. Existenzjunktor identisch. Von diesem haben wir gezeigt, daß er Intensionen von im Querverhältnis zu einander stehenden Begriffspositionen zu neuen Begriffen verschmilzt, und zwar sowohl zu regulären wie auch kontradiktorischen bzw. Dispositionsbegriffen. Logisch ist es allerdings ausgeschlossen, daß dabei die Intensionen eines und desselben Begriffes mit sich selbst zu einem neuen Begriff verschmolzen werden. Und das macht den wesentlichen Unterschied zur mathematisch-kalkülmäßigen Anwendung des Multiplizierens aus. Er zeigt sich besonders deutlich bei der auf der Multiplikation beruhenden Potenzierung. Das mathematische "Ein-mal-Eins", das man in der Schule zu handhaben lernt, hat keinerlei logisches Pendant, denn es würde Begriffe bzw. Ausdrücke vom Typ "Sokrates-Sokrates" erzeugen.

In der Mathematik erzeugt der Existenz- bzw. Produktjunktor oder die Multiplikation zunächst überhaupt den allgemeinen Zahlbegriff, indem er eine logische Einheit mit einer logischen Allheit verschmilzt, wie wir vorne beim Zahlbegriff gezeigt haben. Hierbei wird der Junktor zur Einführung eines kontradiktorischen Begriffes verwendet. Darüber hinaus erzeugt er aus gleichartigen Zahlen neue Zahlen der gleichen Art, was der regulären Begriffsbildung entspricht.

Bei der Anwendung der Multiplikation auf mathematisch quantifizierte inhaltliche Begriffe werden deren Intensionen gleichsam parallel zur Multiplikation der jeweiligen zahlmäßig bestimmten Exten sionen verschmolzen. Dies ist zweifellos ein Spezifikum geometrischer und physikalischer Begriffsbildung, die sonst in der Logik nicht vorkommt und daher dem Laien nur schwer verständlich gemacht werden kann. Unter einem "Kraft-Weg" kann sich der Laie kaum etwas vorstellen. Für den Physiker ist "Kraft mal Weg" die Definition der physikalischen "Arbeit", also eines gegenüber den Ausgangsbegriffen neuen Begriffes. Und ersichtlich stimmt dieser mit dem üblichen sprachlichen Arbeitsbegriff nicht überein, der zwar die kräftige Anstrengung, aber nicht einen bestimmten Weg enthält. Legt man einer gemessenen Kraft und einer gemessenen Wegstrecke, d. h. ihren Extensionen, einen jeweils bestimmten Zahlenwert bei, so ergibt die Multiplikation der einzelnen Zahlenwerte den bestimmten Zahlenwert der Extension des physikalischen Arbeitsbegriffs. Wollte man das logisch an einem nichtphysikalischen Beispiel nachmachen, so müßte man etwa sagen können: "*einige* Äpfel mal *einige* Birnen ergeben *ein* Kompott". Natürlich wird man sich nicht so ausdrücken, aber es dürfte verständlich machen, worum es auch bei den mathematisch quantifizierten Begriffen geht. Vor allem wird man dabei auch bemerken, daß es nicht genügen würde zu sagen "einige Äpfel *und* einige Birnen", denn diese werden durch die Adjunktion nicht zu einem neuen Begriff (etwa "Apfel-Birnen") verschmolzen, sondern ließen sich allenfalls nebeneinander unter den Begriff "Obst" subsumieren.

Die Gewohnheit, mit solchen Produktbegriffen umzugehen, macht dem Geometer die Definition der "Fläche" als "Länge mal Breite" verständlich. Auch diese stimmt keineswegs mit dem sprachlichen Flächenverständnis überein, das umgekehrt eher eine Breite und eine Länge von einer Fläche her definieren würde. Das geometrische Verständnis wurde daher auch nur gegen vielerlei Widerstände in der neuzeitlichen Mathematik allmählich durchgesetzt.

Das in der mathematischen Logik speziell sogenannte "logische Produkt" ist eine logische Adjunktion und hat nichts mit dem hier definierten Produktjunktor zu tun.

4 a. Die *Quotientenbildung* ist mathematisch zweideutig. Einerseits stellt sie eine pure Zuordnung *(Proportion)* von Zahlen dar, von denen auch schon Euklid ausführlich gehandelt hat. Als solche Zuordnung von (gewöhnlich) zwei Zahlen ist der Quotient mit der logischen korrelativen Implikation identisch, die wir vorn definiert und von den anderen Implikationsarten genau unterschieden haben. Man kann daher mathematische Quotienten in dieser Verwendung als korrelierende Implikation lesen: "Wenn eine Zahl, dann (auch) eine andere Zahl". Ersichtlich lassen sich alle Zahlen ebenso wie alle Begriffe im Querverhältnis in dieser Weise proportionieren (vgl. "Wenn Tiere, dann Pflanzen"). Diese Verwendung ist ebenso wie die logische korrelative Implikation umkehrbar (kommutativ).

Solche mathematischen Zuordnungen sind längst auch in die Alltagssprache eingegangen. Man sagt etwa vom Torverhältnis zweier Fußballmannschaften: Sie spielten "Drei zu Zwei" oder umgekehrt "Zwei zu Drei". Und wie bei der Multiplikation läßt sich auch die parallele Quotientenbildung bei den Intensionen und zugehörigen Extensionen inhaltlicher Begriffe beobachten, die in (euklidischen) Proportionsgleichungen ausgesprochen wird: "Rot zu Grün wie 3 zu 2" (oder: "Drei roten Toren entsprechen zwei grüne Tore", bzw. umgekehrt). Auch die Null wird sprachlich längst einbezogen, denn es gibt natürlich auch "Null zu 2" (oder umgekehrte) Torverhältnisse. Es liegt auf der Hand, daß sich solche Korrelierungen in Quotientennotation nicht für die Darstellung von Teilungsaufgaben eignen. Ein Torverhältnis als 3/2 (drei halbe) Tore anzugeben, wäre sinnlos und unverständlich. Die korrelative Implikation als Quotient liegt allerdings der Bildung der leibnizschen Differentialquotienten zugrunde. Darüber s. u.

b. Der Quotient als Divisionsoperator (wir nennen ihn Divisionsquotient) hat eine andere Bedeutung als die Proportion. Äußerlich wird das schon an der Nichtumkehrbarkeit von Zähler und Nenner in einem solchen Quotienten kenntlich ("3/4" entspricht keineswegs "4/3"). Das läßt darauf schließen, daß im Divisionsquotienten kein Querverhältnis zwischen Artpositionen, sondern ein vertikales Verhältnis zwischen Zahlbegriffen und ihren Arten bzw. bei Begriffen zwischen Gattungen und ihren Arten festgehalten wird.

Nehmen wir als begriffliches Beispiel wiederum (wie vorn bei der Definition der Zahlen) die physikalische Definition der Geschwindigkeit als Quotient von Kilometerstrecke und Stunden-Zeiteinheit. Man kann hiervon sagen, daß dabei der Begriff der Strecke bzw. des Weges durch eine spezifische Differenz der Zeiteinheit "Stunde" in gleichartige "Stundenstrecken" aufgeteilt wird. Die übliche gemeinsprachliche Ausdrucksweise von den "Stundenkilometern" hält dies genau und richtig fest. Wer etwa mit 100 km pro Stunde Geschwindigkeit fährt, der hat einen Weg eben in Streckeneinheiten von je 100 in der Stunde zurückzulegenden Kilometern eingeteilt. Und diese kann er dann auch nach Zahl aufgewendeter Stunden summieren bzw. multiplizieren. Man sieht, daß der Ausdruck "Stundenkilometer" (der logisch einen Produktbegriff darstellt) selber durch die physikalische Definitionsweise entstanden ist. Es gibt dafür offensichtlich keine logische Entsprechung. Gattungen mit ihren eigenen Arten zu Ausdrücken oder Begriffen zu vereinigen, ist wie vorne gezeigt, logisch nicht üblich. Es würde sich um Ausdrücke wie etwa "Tier-Lebewesen" handeln.

Der Divisionsquotient dient üblicherweise zur Notation von Teilungsaufgaben. Er ist aber bei genauem Hinsehen keine Aufgabe, sondern immer schon das Ergebnis selber. Was als Rechnung bei der mathematischen Operation durchgeführt wird, ist nur die Umwandlung der Quotientendarstellung in eine dezimale Darstellung derselben Zahl. Denn bei den sogenannten Teilungsrechnungen interessiert nur *einer der Teile*, die sich bei der Division ergeben. Das Rechenergebnis entspricht demnach, wie die Gleichungsdarstellung anzeigt, nur einem der Teile, in welche der Divisor eingeteilt werden kann (6/2 = 3). Es berücksichtigt grundsätzlich nicht die Anzahl der Teile, die bei einer tatsächlichen Teilung notwendigerweise anfallen, und die bei der Richtigkeitsprobe der Division als Multiplikator berücksichtigt werden (6/2 = 3 nur wenn 2×3 = 6).

5. Die *Potenzbildung* ist ein Multiplikationsverfahren, also eine Produktbildung, mit gleichen Faktoren. Daher beruht es auch auf dem logischen Produktjunktor. Im Unterschied zum logischen Produktjunktor wird er in der Mathematik "ipsoflexiv" auf eine und dieselbe begriffliche Einheit bezogen. Eine Entsprechung zu dieser Begriffs- bzw. Ausdrucksbildung findet sich in vielen Sprachen durch Verdoppelung eines Wortes (z. B. im Deutschen: "sehr sehr groß" für "riesig"; auch im Chinesischen werden sog. Intensiva durch Wortverdoppelung gebildet, und auch in den chinesischen Schriftzeichen findet sich oft mehrfach dasselbe Radikalzeichen). Es scheint, daß nur Charles Bouillé (1470 - ca. 1553) - freilich recht beiläufig - vorgeschlagen hat, eine produktive Verschmelzung eines Begriffs mit sich selbst in die Logik einzuführen, indem er den ersten Menschen Adam als "homo", Eva als aus dem ersten Menschen gemacht als "homo-homo" und Abel als dritten Menschen und gemeinsames Produkt der Eltern als "homo-homo-homo" bezeichnete (vgl. Carolus Bovillus, Liber de Sapiente, im Nachdruck der Ausgabe seiner Schriften Paris 1510, Stuttgart-Bad Cannstatt 1970 - erst 1973 erschienen - S. 132). Das war lange bevor S. Stevin (1585) die Potenzzahlen in der Mathematik durch die Potenzzeichen markierte.

Daß die Verwendung der Potenzbildung in der Logik nur zu widersprüchlichen Begriffen führen kann, dürfte auf der Hand liegen. In dissimulierter Form kommen sie jedoch im wissenschaftlichen Sprachgebrauch reichlich vor und beeindrucken dann durch ihre spekulative Unverständlichkeit. Wenn wir uns nicht täuschen, gehören die Bildungen mit "Selbst-" wie in "Selbstbewußtsein" (= "Bewußtseins-Bewußtseins" oder "Bewußtsein des Bewußtseins") oder "Selbstorganisation" (= "Organisations-Organisation" oder "Organisation der Organisation") dazu. Denn das "Selbst" kann hier nichts anderes bedeuten als auch das mit ihm verbundene Beiwort. *In der Tat ist die mathematische Potenzierung nichts anderes als das, was wir vorne als Selbstimplikation der allgemeinen Implikation aus der Logik ausgeschlossen haben.*

Diese Selbstimplikation wird durch die Potenzzahldarstellung zu einem neuen mathematischen Ausdruck, den man allenfalls sprachlich durch "Zahl-Zahl" wiedergeben kann. Da durch Variable in mathematischen Formelausdrücken neben Zahlen auch beliebige normale Begriffe dargestellt werden, wird durch das Prozedere der Potenzierung diese Selbstimplikation auch auf diese "inhaltliche" Begriffsbildung übertragen. "a^2 " bedeutet dann für jeden einsetzbaren Begriff eine Verdoppelung und Selbstimplikation. Und so kreiert der mathematische Usus bei den Interpretationen auch neue Gebilde wie "Zeit-Zeit", "Geschwindigkeits-Geschwindigkeit" und ähnliche, für die sich keine Pendants in den Normalsprachen und auch nicht in der Logik finden.

Auch hier sei aber daran erinnert, daß die mathematische Plausibilität wohl einzig und allein darauf beruht, daß man nach diesem Muster Flächen als "Strecken-Strecken" und kubische Körper als "Strecke-Strecken-Strecken" definiert. Es war wohl schon die aus der Antike stammende mathematische Gewohnheit, die einfacheren Potenzzahlen "Quadratzahlen" und "Körperzahlen" zu nennen, welche suggeriert, die Quadratfläche sei als "Strecken-Strecke" (dieselbe Strecke mal dieselbe Strecke) und der Kubus als "Strecken-Strecken-Strecke" zu definieren. Das dürfte wohl dazu geführt haben, daß man auch auf anderen Gebieten "Potenzbegriffe" zu bilden versuchte. Dabei ist leicht zu sehen, daß die "Potenzdefinition" des Quadrats und des Kubus defizient und daher ungenau ist: Es wird dabei keineswegs dieselbe Strecke mit sich verschmolzen, sondern zwei bzw. drei durch die Lage im Raum (im rechten Winkel zueinander stehende) unterschiedene Strecken (Vektorstrecken). Und diese Verschiedenheit kommt in der Potenzdefinition nicht zum Ausdruck.

Die Potenzierung stellt aber in der Mathematik einen Hauptjunktor dar. Und das zeigt auch hier den Unterschied zwischen mathematischen und logischen Denkformen. Für das Verständnis vieler geometrischer und physikalischer Begriffe wie "Zeitquadrat" oder "Geschwindigkeitsquadrat", bei denen die Unterschiedlichkeit der "Dimensionen" nicht beachtet wird, sollte man daher gar nicht erst die Logik bemühen, sondern sich mit der Mathematik begnügen.

6. Das *Wurzelziehen* ist die mathematische Umkehrung des Potenzierens. Es ist bei unbeschränkter Anwendung auf beliebige Zahlen bekanntlich im Gegensatz zur Potenzierung kreativ, indem es irrationale und imaginäre Zahlen erzeugt, über deren Zahlcharakter sich noch immer trefflich streiten läßt. Logisch handelt es sich um die Ausweisung eines Begriffs, der mit sich selbst verschmolzen zu demjenigen Begriff führt, aus dem die Wurzel zu ziehen ist.

Wie wir gerade gezeigt haben, führt schon die Bildung von Potenzbegriffen zu widersprüchlichen Begriffen. Also ist zu erwarten, daß das begriffliche Wurzelziehen ein Junktor ist, der einen widersprüchlichen Begriff in seine Komponenten auflöst und einen der verschmolzenen Teile isoliert. Das kommt aber in der Logik genau so wenig vor wie das Potenzieren. Man muß schon sehr gezwungene Beispiele anführen, um sich eine Vorstellung davon zu machen, was es logisch bedeuten müßte. Aus dem "Selbstbewußtsein" ließe sich so als begriffliche Wurzel sowohl das "Selbst" als auch das "Bewußtsein" ziehen, denn beide bedeuten hier dasselbe.

In der Mathematik aber hat das Beispiel der geometrischen Definition der Flächen und Körper immer wieder als Vorstellungsmodell dienen müssen. Was eine Fläche oder ein Körper ist, weiß jedermann aus direkter Anschauung. Daß Quadratflächen in der Geometrie (wie gesagt sehr unvollständig!) als "2. Streckenpotenz" definiert werden, suggeriert ganz zu Unrecht, daß dies die "wissenschaftliche" und einzig wahre, weil eben "mathematische" Definition von Fläche sei, und daß somit den Potenzbegriffen reale Gegenstände in der Wirklichkeit entsprächen. Hat man es aber mit einer rechteckigen Fläche gleichen Inhalts wie eine Quadratfläche zu tun, so läßt sich nicht die Länge einer Seite als Wurzel(begriff) angeben.

Man muß also sagen, daß das Wurzelziehen ebenso wie das Potenzieren eine rein mathematische Junktur für den Umgang mit Zahlen darstellt und keinerlei Pendant unter den logischen Junktoren findet. Daraus auf Insuffizienz der Logik zu schließen wäre sicher ein Fehler. Vielmehr sollte man daraus gerade auf die grundsätzliche Andersartigkeit der mathematischen Begriffs- und Ausdrucksbildung schließen.

7. Die *mathematische Gleichung* ist die Gestalt, in der Rechenaufgaben und Rechnungsergebnisse einander gegenübergestellt werden. Die Richtigkeit der Rechnung wurde wohl der Grund für die tief verwurzelte Meinung der Mathematiker, solche Gleichungen seien Darstellungen von Wahrheiten. Und da man seit Aristoteles die logische Wahrheit an den behauptenden Urteilen festmacht, so wurde auch die ausgerechnete Gleichung für ein wahres behauptendes Urteil gehalten. Wir haben dafür schon auf Kant hingewiesen, der "richtige" Gleichungen für "synthetische Urteile a priori" hielt. Und noch jetzt wird gerne jede Diskussion über die Wahrheit mit dem Hinweis auf die Vorbildlichkeit mathematischer "Wahrheiten" des Musters "zwei mal zwei ist gleich vier" geschmückt.

Wenn das so wäre, so entspräche eben dem logischen wahren Urteil die "wahre" mathematische Gleichung. Beide müßten denselben wahrheitswertfähigen Behauptungsanspruch besitzen. Sicher wird die Lage von den meisten mathematischen Logikern und den Mathematikern auch so eingeschätzt. Dagegen sind jedoch logische Einwände zu erheben.

a. Die *einfachen Gleichungen sind sehr leicht als logische Äquivalenzen* zu diagnostizieren. Man findet sie nicht nur in der Mathematik, sondern in jedem besseren Wörterbuch - und vermutlich stammt die Gestalt der mathematischen Gleichung aus dem schon antiken Brauch, Wörterbücher zu verfassen und die Wörter in Reihen mit "gleichen Bedeutungen" nebeneinander zu stellen.

In einem einsprachigen Wörterbuch wird ein Wort durch Umschreibungen in anderen Wörtern und Ausdrücken "erklärt" und verständlich gemacht; in einem zweisprachigen durch ein oder mehrere Pendants einer anderen Sprache. Versteht man ein Wort der eigenen oder einer fremden Sprache nicht, so hat man ein sprachliches Problem oder die Aufgabe, sich durch Nachschlagen darüber kundig zu machen, was es bedeutet. Und erfährt man die Bedeutung, so ist das Problem gelöst. Man kann das auch "hermeneutisches Ausrechnen" von Bedeutungen nennen, und Philologen sprechen bezüglich der Wörterbuchäquivalenzen ebenso unbefangen wie die Mathematiker bei Gleichungen von Wahrheit. Daß "Armut = Pauvreté" ist, können sie jedenfalls mit derselben Gewißheit behaupten, wie daß "2 mal 2 = 4" ist.

Vieles, was der Philologe aus Wörterbüchern lernt, wird von Mathematikern durch Gleichungen gelernt, nämlich sich die Bedeutung mehr oder weniger komplexer Ausdrücke durch Nachschlage- bzw. Rechenergebnisse einzuprägen. Ohne gutes Gedächtnis läßt sich schließlich weder eine Sprache lernen, noch Philologie oder Mathematik betreiben. Und so lernte man (früher jedenfalls) durch das kleine und große Einmaleins, daß gewisse Zahlen gewissen Summen, Differenzen, Multiplikationen, Divisionen und ggf. Potenzen entsprechen. Das definiert sich gegenseitig. Daß durch jungierte Ausdrücke und einfache Zahlen in den Gleichungen dieselben Bedeutungen (Größenwerte) dargestellt und untereinander substituiert werden können, gehört zunächst einmal zur Memorialistik und Rhetorik der Mathematik.

Nun kann man bekanntlich manche Rechnungen nicht lösen. Schon die einfache Aufgabe, Zehn durch Drei zu dividieren, liefert ein grundsätzlich nicht aufschreibbares Ergebnis ("3,333...usw.usw."), und dies, obwohl doch jedermann zu wissen glaubt, was das Ergebnis - gleichsam nach dem letzten Punkt notiert (den es aber hier nicht geben kann) - sein müßte. Ebenso gibt es nicht in jeder Sprache sprachliche Pendants für Fremdwörter. Man muß also bei Umschreibungen, die gegebenenfalls ebenso vorläufig bleiben müssen, stehen bleiben.

Auch dies Verfahren wurde für die Gleichungen beibehalten bzw. darin aufgenommen. Sie setzen dann nicht ausrechenbare Ausdrücke gleich. Dies wurde historisch außerordentlich bedeutsam bei der Ersetzung von Zahlen durch Buchstaben. Diese Franciscus Vieta (François Viète, 1540-1603) zugeschriebene Erfindung war wohl selbst der Logik geschuldet, denn die Zahlvertreter ("Variablen") stehen ersichtlich im selben Verhältnis zu den Zahlen, wie die aristotelischen Begriffszeichen zu den einsetzbaren Begriffen. Erst von da an konnte man zahlenlose Gleichungen auch in der Mathematik benutzen. Fortan aber standen diese Variablen sowohl für Zahlen als auch für Begriffe, auf die Zahlen angewandt werden. Zu unterscheiden, wann das eine und wann das andere in bestimmten Gleichungen der Fall ist, dürfte sogar dem Fachmann häufig Schwierigkeiten bereiten. Wir haben schon vorn bei der Konstruktion des Zahlbegriffs darauf Bezug genommen.

Der Umgang mit den "allgemeinen Zahlen", die durch solche Variablen vertreten werden, war und ist problematisch. Man konnte nun notieren: "A = A", wenn man links und rechts des Gleichheitszeichens dieselben (beliebigen) Zahlen einsetzte. Ebenso ließ sich aber auch notieren: "A = B", wenn man damit verschiedene Rechenausdrücke für dieselben Zahlengrößen meinte, z. B. wenn A für die Summe " 3 + 3" und B für das Produkt " 2 mal 3" stehen sollte.

Diese Formulierungen sind weder trivial noch unschuldig. Sie erregen wegen ihrer Zweideutigkeit dem Logiker größte Bedenken. Es bedurfte auch der ziemlich sophistischen Theorie Freges, um selbst die Mathematiker darüber zu beruhigen. Frege stipulierte, indem er beim Sprachgebrauch der Hermeneutiker wilderte, die Gleichungen mitsamt der Variablen hätten zwei Bedeutungen, nämlich das was er als "Bedeutung" und "Sinn" unterschied. Die "Bedeutung" identifizierte er mit demjenigen, was durch die Gleichung als Identisches zwischen ihren linken und rechten Bestandteilen gemeint, aber nicht dargestellt werde; den "Sinn" bzw. die "Sinne" mit dem, was in den Gleichungen als Unterschiedliches links und rechts dargestellt wird. Und fügen wir sogleich hinzu: Die (einheitliche) Bedeutung identifizierte er darüber hinaus mit der "Wahrheit", während ihm für die Bezeichnung des Sinn-Unterschieds der Ausdrücke kein logisches Pendant einfiel. (Vgl. G. Frege, Über Sinn und Bedeutung, in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 100, 1892, S. 25 - 50). Die Folge ist: Beim ersten Beispiel A = A fallen Bedeutung, Sinn und Wahrheit zusammen, und daher wird hier entgegen der Voraussetzung die "Bedeutung" mitdargestellt; beim zweiten "A = B" treten sie auseinander, denn die Bedeutung wird nicht dargestellt. Sie muß "hinzugedacht" werden.

Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung in der mathematischen Logik gilt heute allgemein als grundlegend. In der Tat handelt es sich aber nur um die Form, in der die scholastisch-logische Unterscheidung der verschiedenen "Suppositionen" (d. h. der Zeichenbedeutungen) in der mathematischen Logik wiederentdeckt wurde.

Zeichen verweisen ihrer Natur nach auf etwas, was sie nicht selber sind. Sie lenken die Aufmerksamkeit "in erster Intention" geradezu von sich weg auf dieses andere. Man kann sagen, ein funktionierendes und wohlverstandenes Zeichen macht sich selbst vergessen, nämlich, daß es selbst ein sinnlich wahrnehmbarer Gegenstand ist. Dies andere durch das Zeichen Bezeichnete kann ein wirklicher Sachverhalt (das stoische Tygchanon) sein, aber auch eine psychische Vorstellung (das stoische Lekton). Die scholastische Logik nannte diese Verweisung des Zeichens "formale Supposition" (d. h. daß das Zeichen seinem "formalen Gebrauch nach" auf etwas anderes verweist). Frege hat dies als "Bedeutung" festgehalten.

Daneben sind die Zeichen selber auch ein "materielles" Gebilde für die Wahrnehmung. Die Aufmerksamkeit auf das Zeichen selbst zu fixieren bedarf zweifellos einer besonderen Anstrengung, da eine solche Beachtung des Zeichens als solchen geradezu "seiner Natur zuwider" läuft. Dabei stellen sich - in der Semantik leider kaum beachtete - Probleme. Wenn beim Verstehen des Verweisens des Zeichens gewöhnlich seine eigene materielle Natur geradezu vergessen wird, so kann die Aufmerksamkeit auf das materielle Zeichen selber ebenso gut seine Verweisungsfunktion vergessen machen. In diesem Falle aber bleibt das Zeichen ersichtlich nicht Zeichen, sondern es wird ein sinnlicher Gegenstand unter anderen und verliert damit seinen Zeichencharakter. Vieles, was in dieser Betrachtungsweise in der sog. Semantik unter den Schlagwörtern "bedeutungsloses Zeichen", "sinnloser Term", "reines Symbol" etc. diskutiert wird, kann daher gar nicht zur eigentlichen Semantik gehören, da es sich dabei nicht mehr um eigentliche Zeichen handeln kann.

Die Scholastiker kannten diese letztere Betrachtungsweise der Zeichen als "zweite Intention", d. h. als eine "zweite Aufmerksamkeitsrichtung". Die Zeichen selbst können als Abbilder, Laute, Buchstaben, Buchstabenkomplexe (Wörter) oder ganze Wörtergruppen beschrieben werden. In der Mathematik sind es Zahlzeichen (Ziffern), Buchstaben, Rechenzeichen als Junktoren und die dadurch verknüpften Zahlausdrücke und Buchstaben. Diese "sinnlich-materiellen" Zeicheneigenschaften nannten die Scholastiker "materiale Supposition". Frege hat dies als "Sinn" der Zeichen festgehalten.

Die von Frege gewählte Terminologie - "Sinn" für die (materielle) Eigennatur der Zeichen - ist ungewöhnlich. Sie trägt aber dem mathematischen Bedürfnis Rechnung, bei jeder Formalisierung genau zwischen einem vorgeblich "Gemeinten" (der Bedeutung) und den formalen Darstellungsmitteln (dem Sinn) zu unterscheiden, und sich jederzeit darüber klar zu werden, wovon eigentlich die Rede ist. Und dies wiederum begründet einen fundamentalen Unterschied zur Logik, wo die "materiale Supposition" der Zeichen in der Regel keine Rolle spielt, vielmehr eher deswegen zum Thema gemacht wurde, um sich vor Verwechslungen mit der "formalen Supposition" zu hüten.

Man kann ohne weiteres feststellen, daß das Eigentümliche des mathematischen Denkens (gegenüber dem logischen) gerade darin besteht, das verwirrende Zusammen- und Gegeneinanderspiel von Bedeutung und Sinn der Zeichen zu durchschauen und zu beherrschen. Als Faustregel dürfte hierbei gelten: Alles, was im mathematischen Formalismus unmittelbar ausgedrückt wird, gehört zum "Sinn". Alles, was nicht durch den Formalismus ausgedrückt, sondern nur "gemeint" wird - und damit auch alles, worauf mathematische Formalismen als Inhaltliches angewendet wird - gehört zur Bedeutung. Das sich daraus ergebende Problem besteht nun darin, zu wissen, wann und unter welchen Umständen Sinn und Bedeutung der mathematischen Zeichen zusammenfallen, und wann sie auseinandertreten.

Das zeigt sich schon an der einfachsten Gleichung. Notiert sie: "3 = 3", so notiert sie identische Bedeutung als Äquivalenz identischen Sinnes. Und das kann logisch nur falsch genannt werden, denn eine Äquivalenz kann nicht das Identische durch gleiche Zeichen darstellen. Notiert sie "A = A" (wobei der Buchstabe für jede Zahl stehen kann, sofern links und rechts dieselbe Zahl gemeint ist), so ist sie logisch ebenso falsch. Erst "A = B" kann als logische Äquivalenz gelten, aber dies nur unter der Voraussetzung, daß "A" und "B" für verschiedene gleichbedeutende Ausdrücke stehen (z. B. A = 3 mal 3; B = 7 + 2), nicht aber für eine und dieselbe Zahl. Nimmt man die Buchstaben in dem üblichen "Sinn", daß sie für verschiedene Zahlen stehen sollten (etwa A = 3; B = 7), so ist die Gleichung ersichtlich falsch, sie kann nur eine Ungleichung sein. Rechnet man nun in der "richtigen Äquivalenzgleichung" die Zahlenwerte der Ausdrücke links und rechts aus, so ergibt sich als "Lösung" einer Rechenaufgabe wieder die Gleichung "9 = 9", und sie gilt als Beweis, daß die Gleichung "wahr sei". Logisch formuliert dürfte das Ergebnis aber nicht als Äquivalenz und also durch eine Gleichung dargestellt werden, sondern nur als einfacher Zahlenwert "9".

Wohl die wenigsten Mathematiker und mathematischen Logiker machen sich diese Skrupel. Ihnen gilt sowohl "9 = 9", "A = A", wie auch "A = 9" und "A = B" als Gleichung. Das zeigt, daß sie die Gleichung für ganz willkürliche Identifizierungen von Zeichen-Bedeutungen benutzen, die nichts anderes als freie Definitionen sein können.

b. *Gleichungen mit Unbekannten*. Gleichungen können im mathematischen Gebrauch verändert und umgewandelt werden. Geändert werden dabei die Zeichen für Ausdrücke und damit deren Sinn. Die Bedeutung aber soll dabei dieselbe bleiben. Das entspricht etwa dem Wörterbuchverfahren, die Bedeutung von Wörtern oder Ausdrücken in immer neuen Wendungen zu umschreiben.

Leitend ist dafür das anschauliche Modell einer Waage, die solange waagerecht bleibt, als man beide Seiten gleichmäßig beschwert. Das kann man durch Zugabe oder Wegnahme von kleineren Gewichten in größeren Abständen oder von größeren Gewichten in kleineren Abständen vom Aufhängepunkt der Waage erreichen. Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so entspricht das der Aufrechterhaltung der Gleichung. Senkt sie sich auf einer Seite, so entspricht das einer Ungleichung bzw. einer "falschen" Gleichung. Schon Euklid scheint sich an diesem Modell orientiert zu haben, als er formulierte. "Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, ergibt Gleiches", und "Gleiches von Gleichem weggenommen, ergibt Gleiches".

Die Verwandlungen der Gleichung werden durch symmetrische Rechenoperationen auf beiden Seiten der Gleichung bewerkstelligt. In Anwendung auf welche Ausdrücke und in welcher Reihenfolge dies geschehen darf, dafür gibt es genaue Regeln, die man mühsam lernen muß und bei deren Nichtbefolgung die Gleichung zur Ungleichung wird. Sie sind für alles "Beweisen" in der Mathematik ausschlaggebend.

Die immer wieder an der Waage demonstrierte Voraussetzung, daß eine Gleichung bei allen regelrechten symmetrischen Veränderungen eine Gleichung bleibt, führt in der Mathematik dazu, die *Gleichung ihrerseits als heuristisches Instrument* zu verwenden. Sie verliert dadurch ihren logischen Charakter der Äquivalenzdarstellung und wird Mittel der Darstellung einer besonderen Klasse mathematischer Probleme. Es ist die Aufgabenstellung, den Größenwert einer sog. Unbekannten in und mittels einer Gleichung zu bestimmen.

Dem entspricht wiederum kein logisches Pendant. Allenfalls kann man auf Rätselspiele hinweisen, die mit solchem Gleichungsgebrauch eine gewisse Ähnlichkeit aufweisen.

In Gleichungen mit einer Unbekannten wird anstatt oder neben denjenigen Buchstaben, die für Zahlenwerte (oder in physikalischen Gleichungen für physikalische Begriffe) stehen (a, b. c..., oder n, m, o...) eine besondere Variable eingesetzt und gewöhnlich als X notiert. Da sie ebenso wie andere Buchstabenvariable den "Sinn" hat, für alle beliebigen Zahlengrößen (als ihren "Bedeutungen") zu stehen, wird die Gleichungen zunächst nicht mehr erkennen lassen, ob sie überhaupt Gleichung oder Ungleichung ist. Und so wie sie notiert wird, ist sie gewiß beides zugleich. Das entspricht äußerlich der traditionellen logischen Notation von Urteilen ("S ist P" bzw. "p"), die auch nicht zu erkennen gibt, ob das Urteil wahr oder falsch sein soll.

Im Unterschied zum logischen Urteil zwingt aber die Gleichung, soll sie eine Gleichung bleiben, der Unbekannten X einen oder einige bestimmte Zahlenwerte bzw. Größen auf. Zu deren "Berechnung" bringt man durch Umwandlungen der Gleichung das X alleinstehend auf die linke Seite der Gleichung, und rechts muß dann der ausgerechnete Zahlenwert erscheinen, wie man dies bei allen Rechenaufgaben gewöhnt ist. Daß bei der Problemformulierung durch Gleichungen mit einer Unbekannten mehrere Lösungen vorkommen können, entspricht wiederum besonderen Rätseln, bei denen etwa ein Homonym als Lösungswort gesucht wird. Daß aber auch ggf. die Null als Lösung gilt, kann nur der Rätselfrage entsprechen, die Polyphem dem Odysseus gestellt hat, und die dieser bekanntlich mit "Niemand" beantwortet hat.

Dieser Gebrauch von Gleichungen hat der sog. mathematischen Analysis ihren Namen verschafft. "Analytische Methode" ist - so auch bei Kant - als eine Methode bekannt, das Unbekannte "X" als Bekanntes wie jede andere Variable zu behandeln und es schließlich durch eine Zahlengröße zu bestimmen.

c. Mathematische Gleichungen sollen nun auch Gleichungen bleiben, wenn sie mit mehreren Unbekannten (X, Y, ggf. Z) bestückt werden. Man nennt sie *Funktionsgleichungen oder kürzer Funktionen*. Immer noch am Modell der Waage demonstriert, liefert die Funktionsgleichung keine bestimmten Werte mehr für die eine oder andere Unbekannte, sondern sie legt fest, welche Werte eine zweite oder mehrere Unbekannten in Abhängigkeit von einer ersten (gewöhnlich der durch X bezeichneten "unabhängigen Variablen") annehmen können, ohne daß die Gleichung aufhört, eine Gleichung zu sein. Die Unbekannten stehen in den Funktionen also nicht, wie in den gewöhnlichen Gleichungen, für bestimmte ausgewählte Zahlen, sondern für alles, was in der Mathematik Zahl genannt werden kann. Und sie stellen zwischen solchen Zahlen und Zahlausdrücken eine Äquivalenz her.

Was man auch bei Funktionen "Lösungen" nach der einen oder anderen Unbekannten nennt, ergibt sich nur, wenn man für eine abhängige Unbekannte den Wert Null einsetzt, d. h. sie gewissermaßen zum Verschwinden bringt, so daß man für die andere(n) Unbekannte(n) bestimmte Zahlenwerte erhält. Diese Nullwerte haben nur Bedeutung für die geometrische Veranschaulichung der Funktionsgleichungen durch geometrische Gebilde im cartesianischen Raum, in welchem die 0-Achsen eine ausgezeichnete Stellung besitzen. Nullwerte einer Unbekannten, z. B. Y = 0, bezeichnen dann geometrische Schnittpunkte einer Kurve mit der X-Achse. Die Bezeichnung "Lösung einer Gleichung" ist hier also irreführend.

Funktionsgleichungen sind mathematische Ausdrücke, die eine gleichbleibende Proportion zwischen mathematischen Ausdrücken darstellen. Jede Unbekannte kann, wie immer sie auch in einen Ausdruck eingebaut wird, jeden Zahlenwert annehmen. Und welchen sie auch immer annimmt, so ergibt sich für den Zahlenwert der abhängigen Unbekannten ein bestimmter Wert, und dies immer unter der Voraussetzung, daß die Gleichung eine Gleichung bleibt und nicht zur Ungleichung wird. Bei den so erzielbaren "Lösungen" werden die Funktionsgleichungen - ebenso wie die Subtraktion bezüglich der negativen Zahlen und das Wurzelziehen bezüglich der imaginären Zahlen - kreativ. Sie erzeugen ggf. sogenannte transzendente Zahlen, die im cartesischen geometrischen Raum nicht darstellbar sind.

Auch hier dürfte klar sein, daß es zu mathematischen Funktionsgleichungen kein logisches Pendant gibt. Allenfalls kann man sagen, daß die Funktionsgleichung einem allgemeinen Definitionsschema entspricht. Wohl aber macht die Mathematik den Anspruch, durch Funktionsgleichungen auch die logische Form der "Aussage" (wie sie in der mathematischen Logik verstanden wird, es handelt sich jedoch um nichtbehauptende Ausdrücke!) allgemein darzustellen. Daher die übliche "aussagenlogische" Formalisierung $Y = F (X)$ oder ggf. $y = f (x)$. Das kann aber nur heißen: Die Bedeutung des Begriffs Y ist bestimmt durch die Bedeutung des Begriffs X im Ausdruck F. Im Beispiel: "Junggeselle (Y), d .h (=) unverheirateter (F) Mann (X)". Und das ist ein Beispiel für eine Definition, keineswegs für eine behauptende Aussage bzw. ein Urteil.

8. Der *Differentialquotient* ist logisch eine korrelative Implikation, wie sie oben unter 4 a beschrieben wurde. Die Benennung als "Quotient" dürfte sehr unglücklich gewählt sein, da sie den Eindruck erweckt, es handele sich dabei um einen Divisionsausdruck. In der Tat handelt es sich jedoch um eine Proportionierung von bestimmten Zahlen, nämlich Infinitesimalzahlen. Man findet in mathematischen Lehrbüchern und Lexika und erst recht in philosophischen keine "logische" Erklärung des Differentialquotienten, sondern wird hier regelmäßig mit geometrischen Beispielen konfrontiert, die noch immer die Gedankengänge Leibnizens und Newtons bei der Erfindung dieses Zahlausdrucks reproduzieren.

Der Anspruch, den die neuzeitliche Mathematik mit der Bildung dieser Junktur erhebt, ist kein geringerer als die "Quadratur des Kreises" und die begriffliche Erfassung von Bewegung und Veränderung in den traditionellen mathematischen Denkformen stabiler ("ruhender") Einheiten. Die damit zu bewältigenden Probleme sind im ersteren Falle die Kommensurabelmachung inkommensurabler Einheiten; im zweiten Fall die "Lösung" der Zenonischen Paradoxien, z. B. die Bewegung des paradigmatischen "fliegenden Pfeiles" an seinen "Ruhepunkten" darzustellen.

Inkommensurable Einheiten werden in der Mathematik neutralisiert, indem man sie in Rechenausdrücken einfach (unausgerechnet) stehen läßt. Man kann dann für den unausgerechneten (und auch nicht ausrechenbaren) Ausdruck eine eigene Bezeichnung (wie etwa Pi π für die Proportion von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser) einführen.

In der üblichen Schreibweise wird der Differentialquotient als "dx/dy" dargestellt, also als Divisionsquotient. Dabei ist "d" ein von Leibniz speziell für die Infinitesimalmathematik eingeführtes Zeichen für die Inkommensurabilität der Größen x und y im Verhältnis zueinander. Logisch kann man es als Begriffszeichen für eine besondere "Einheit verschiedener Einheiten" deuten, die dadurch kommensurabel gemacht werden sollen. Wie man sieht, ist der Differentialquotient keine ausrechenbare Größe, er geht allenfalls als "stehender Ausdruck" in andere mathematische Ausdrücke, insbesondere Funktionsgleichungen, ein, in denen x und y (ohne "d") als kommensurable oder auch inkommensurable Größen stehen.

Anwendungen des Differentialquotienten finden sich in der mathematischen Physik, und er ist von Leibniz auch im Hinblick auf physikalische Problemstellungen erfunden worden.

Machen wir bei dieser Gelegenheit auf eine Folge mathematischer Voraussetzungen bei der Differentialquotientenbildung aufmerksam, die sich logisch betrachtet als dialektisch darstellt. Es ist die in der Infinitesimalrechnung übliche Festhaltung der differentiellen Proportion als sinnvoller Ausdruck, wenn die proportionierten Zahlwerte im "Grenzübergang" zu Nullwerten schrumpfen. Man hat sich bei dem Begriff des "Grenzüberganges" seit Leibniz und besonders in der neueren Analysis viel Mühe gegeben, die Grenze bzw. den Unterschied zwischen einer infinitesimal kleinen Größe und der Null einerseits deutlich zu markieren, sie andererseits aber auch aufzuheben und beherzt zu überschreiten, was man nur dialektisch nennen kann.

Logisch und undialektisch muß ein Ausdruck wie "keine Strecke im Verhältnis zu keiner zeitlichen Ausdehnung" jedenfalls als sinnlos gelten. In der mathematischen Physik bezeichnet der Ausdruck aber die "Punktgeschwindigkeit". Man mag sich mathematisch immer einreden, es ließe sich dabei ein Unterschied zwischen infinitesimal kleinen Strecken und "keinen Strecken" machen, und man mag daher den Differentialquotienten nicht "Punktgeschwindigkeit" sondern "Momentangeschwindigkeit" nennen. In logischer Sicht und in der physikalischen Praxis kommen Moment und Punkt (als Zeitpunkt) auf dasselbe hinaus. Und so hat man jahrzehntelang in der Physik danach gesucht, ob und wie sich die Punkt- bzw. Momentangeschwindigkeit experimentell messen lassen könnte. Da das (logisch) unmöglich ist (wie schon Zenon von Elea nachgewiesen hat), hat man den Begriff als "Heisenbergsche

Unbestimmtheit" der "gleichzeitigen Messung" kanonisch konjugierter Größen (etwa von Geschwindigkeit und Impuls eines Teilchens) in mikrophysikalischen Dimensionen unter die Grundbegriffe der Mikrophysik aufgenommen, wo sie bis jetzt als absolute Grenze zwischen Makro- und Mikrophysik fungiert. (Vgl. dazu L. Geldsetzer, Über den Begriff des Zeitpunktes bei Meßbestimmungen kanonisch-konjungierter Größen in der Physik und über das Problem der Prognostik in der Mikrophysik, in: Geschichte und Zukunft. Festschrift für Anton Hain, hg. von A. Diemer, Meisenheim 1967, S. 142- 149). Logisch dürfte diese Grenzziehung nicht haltbar sein. Denn die Nichtmeßbarkeit einer Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ergibt sich logisch eben aus der Tatsache, daß ein bewegter Körper an einem "Punkt" keine Bewegung aufweisen kann.

Eine andere Anwendung des Differentialquotienten findet sich in der Geometrie für die Erfassung des Krümmungsmaßes gebogener Linien (und das ist das Gebiet, auf dem der Differentialquotient entwickelt wurde). An einem geometrischen Punkt kann logisch weder von Geradheit noch von Krümmung einer Linie die Rede sein. Der Differentialquotient soll jedoch für jeden "Punkt" einer Linie (die hier dem zeitlichen "Moment" entspricht), der aber logisch weder ein Punkt noch ein Linienstück sein kann, ein Krümmungsmaß (das ggf. auch ein Gradheitsmaß sein kann) liefern. .

Die besondere Bedeutung des Differentialquotienten in der Analysis besteht darin, daß er auch dazu dient, gleichsam die allgemeine Gesetzlichkeit einer Funktion für jeden beliebigen eingesetzten Wert einer Variablen auszudrücken. Man nennt das im speziellen Sinne eine "Differenzierung" einer Funktion.

Daß es bei der Bildung dieser Junktur nicht ohne Dialektik zuging, kann man an seiner Geschichte sehen. Am ehesten hat sie noch Newton vermieden, indem er auf neuplatonische und kabbalistische Vorstellungen von einer "fließenden Form" zurückgriff, d. h. den Begriff der Bewegung und Veränderung selbst als Grundbegriff in den Bestand der Mathematik und Physik aufnahm - wogegen Leibniz heftig protestierte. Newton definierte so die Linie selbst als Punktbewegung und die Fläche als laterale Streckenbewegung. Und das hatte schon in Euklids Definition der Sphäre als "einmal um eine Achse gedrehter Kreis" ein klassisches Vorbild. In der physikalischen Praxis werden die Newtonsche und die Leibnizsche "Erklärung" und die Notationsweisen des Differentialquotienten als äquivalent behandelt.

Bei den Bewegungen und Veränderungen aber verhält es sich in der Mathematik und Physik seither - im Leibnizschen Paradigma - wie mit der Fläche. Für den Laien ist die Fläche ein schlichtes und bekanntes sinnliches Objekt, für den Mathematiker und Physiker aber ein sehr dialektisches Streckenprodukt. Und ebenso ist Bewegung und Veränderung die schlichteste sinnliche Erfahrung des Laien mit den "Phänomenen". Nur für den Mathematiker sind sie unbewegte und unveränderliche Integralsummen von Differentialquotienten. Die Logik hat keinen Grund, der Mathematik in ihrer "dialektischen" Begriffs- und Ausdrucksbildung eher zu folgen als derjenigen der Alltagssprache.

9. Die *Integralbildung* (Integrieren) ist eine Summenbildung von infinitesimalen Zahlausdrücken, bei denen die Differentialquotienten die Anteile des Infiniten vertreten. Sie setzt die unbeschränkte Potenzbildung und das Wurzelziehen voraus und integriert beides zu einem für die höhere Mathematik typischen Junktor. Da sich weder die Potenzbildung noch das Wurzelziehen für die logische Begriffsbildung eignen, hat auch der Integraljunktor kein logisches Pendant. Logisch könnte man ihn allenfalls als "Summe des nicht-zahlmäßig Erfaßbaren" umschreiben.

Für seine Verdeutlichung muß auch in der Arithmetik noch immer auf das geometrische Modell der rechtwinkligen ("Pascalschen") Dreiecke verwiesen werden. Bekanntlich ist (nach Pythagoras) die Summe der Quadrate über den Katheden eines rechtwinkligen Dreiecks an Flächeninhalt gleich dem Quadrat über der Hypothenuse. Die Hypothenusenlänge läßt sich daher als Wurzel aus der Summe der Kathedenquadrate darstellen oder berechnen. Bedarf für die Integralbildung besteht in der Geometrie in den Fällen, wo die Länge von Kurvenabschnitten, die Flächen mit gebogenen Grenzlinien oder der Volumeninhalt gewölbter Gefäße berechnet werden soll. Die schon in der Antike geübte Methode ist die Zerlegung des Gekrümmten in möglichst viele kleine Geradenabschnitte und deren Summierung (Exhaustionsmethode des Archimedes mit beliebiger "Annäherung" an den richtigen "Grenzwert").

Grundsätzlich wird auch beim Integrieren noch so verfahren. Jedoch wird die einfache Summation beliebig kleiner Geradenstücke z. B. bei der Berechnung gekrümmter Strecken durch die Integralsummenbildung von Wurzelgrößen für kleinste Hypothenusen von umschriebenen rechtwinkligen Dreiecken ersetzt.

Das Verfahren beruht ebenso wie die Differentialquotientenbildung auf dem Leibnizschen sogenannten Kontinuitätsprinzip, nach welchem alles begrifflich Unterscheidbare in seinen Extremen kontinuierlich ineinander übergehen, also zugleich ununterscheibar sein soll. Dahinter steht das berühmte, aber dialektische Prinzip des Nikolaus von Kues, nach welchem "in extremis" alle Gegensätze koindizieren (Prinzip der coincidentia oppositorum). Mathematische Extreme für die Zahlen sind das Unendliche und die Null. Das Unendliche gilt einerseits als Maximalzahl, andererseits kann es keine Zahl(größe) sein. Die Null gilt als Minimalzahl, aber zugleich kann sie ebenso wenig eine Zahl sein. Beide sind und bleiben logische Quantoren, nämlich das "alle" und das "kein". Nähert man sich mathematisch (durch "unendliche" Reihen zunehmender oder abnehmender Zahlgrößen) diesen Grenzen, so tritt im "Grenzübergang" des Minimums zur Null der Fall auf, daß das Unterschiedene: die Zahlgröße und die Null koinzidieren, und im Grenzübergang des Maximums, daß die Zahlgröße und das unendlich Große konzidieren. Die "verschwindende Größe im Grenzübergang" und die "unendliche Größe" im Unendlichen sind mittlerweile heilige Kühe der Mathematiker. Sie gelten zwar als schwierig und dunkel, aber doch als ganz normale mathematische Denkgebilde. Das kann den Logiker nicht hindern, die Widersprüchlichkeit der so gebildeten mathematischen Begriffe und Ausdrücke zu betonen.

In der Mathematik wird das Integrieren noch immer - wie zu Leibnizens Zeiten - geometrisch veranschaulicht. Man "demonstriert" hier, wie im "Grenzübergang" von der Ausdehnung zum Punkt die gerade Linie und die Kurve, die Fläche und die Linie, der Körper und die Fläche koinzidieren. Wenn auch in allen mathematischen Lehrbuchdarstellungen behauptet wird, neuere Verfahren hätten die Widersprüchlichkeit ausgeräumt, und diese sei nur eine Erscheinung der noch ungeschickt-tastenden Erfindungsphase, so dürfte das doch auf einer gewohnheitsmäßigen Selbsttäuschung der Mathematiker über die tatsächliche Dialektik ihrer Denkmuster beruhen.

Wir wollten mit dieser Aufstellung zeigen, daß die meisten mathematischen Rechenoperatoren selbst auch logische Junktoren sind, und soweit sie das nicht sind, wie man sie doch wenigstens logisch verständlich machen kann. Dies zeigt sich in erster Linie daran, daß einige von Ihnen mit den traditionellen logischen Junktoren nicht nur äquivalent, sondern identisch sind, wie etwa die Gleichung mit der Äquivalenz, die Addition mit der eingeschränkten Adjunktion, die Negation z. T. mit der Subtraktion, der Existenz- bzw. Produktjunktor mit der Multiplikation, und die korrelierende Implikation mit dem Differentialquotienten.

Die zusammengesetzten Operatoren gehen jedoch in ihrer Junkturform über die logischen Junktoren hinaus und erlauben die Bildung von Ausdrücken, die es nur in der Mathematik gibt. Gleichwohl ist und bleibt es eine lohnende logische Aufgabe, auch deren Verknüpfungsweise genau zu beschreiben. In den meisten Fällen geht es dabei wohl nicht ohne Rückgriff auf dialektische Verhältnisse ab - etwas, was man in der Logik und Mathematik natürlich scheut oder gar für unmöglich hält. Und doch scheint es das einzige Mittel zu sein, in diesen bisher so unterbelichteten Logikbereich Licht zu bringen und die wichtigen genuin mathematischen Denkmittel einer logischen Analyse zugänglich zu machen.

5. Die Definitionen

Die Definitionen dienen dazu, wie die Bezeichnung besagt, einen Begriff von anderen Begriffen deutlich abzugrenzen.

a. Das geschieht häufig durch *Negationen*. Spinoza wird die Meinung zugeschrieben "omnis definitio est negatio". Man kann aber allenfalls sagen, daß Negationen ein verbreitetes Definitionsmittel sind, aber keineswegs das einzige.

b. Descartes forderte, man müsse "*clare et distincte*" definieren. Damit scheint er gemeint zu haben, bei einer Definition müßten die Intensionen bzw. Merkmale "deutlich", nämlich wohlunterschieden und vollständig, und die Extensionen "klar" angegebenen werden. Richtig und wichtig ist daran, daß man die Intensionen und die Extensionen kennen muß, um überhaupt von einem Begriff reden zu können.

c. Aristoteles hat in seinem Organon die *klassische Art des Definierens* festgelegt, und sie ist die herrschende und bequemste geblieben: Es ist die Definition durch Angabe der nächsthöheren Gattung und der spezifischen Differenz" (*definitio est per genus proximum et differentiam specificam*). Bei dieser klassischen Definitionsart sind aber höchste Begriffe (Kategorien, axiomatische Grundbegriffe) nicht mehr definierbar, weil sie keine höhere Gattung über sich haben. Ebensowenig erscheinen Individuen (unterste Arten) definierbar, weil sie angeblich eine unendliche Anzahl von Merkmalen aufwiesen (scholastische Maxime: Individuum est ineffabile!). Von daher hat sich in der Logik und im Wissenschaftsbetrieb die Meinung durchgesetzt, "Spitzenbegriffe" von Theorien (sog. axiomatische Grundbegriffe) und "Individuen" seien logisch nicht handhabbar. Das ist falsch, wie zu zeigen ist.

Inhaltliche Begriffe werden in der Regel durch Wörter der Gemeinsprachen, die ja als Bildungssprachen auch Wörter der Wissenschaftssprachen ("Termini") enthalten, bezeichnet. In den Sprachen stehen sie in einem sogenannten Wortfeld, welches durch Aufzählung verwandter und sozusagen benachbarter Wörter die Bedeutung eines Wortes umschreibt ("Pferd" bedeutet so etwas wie "Gaul", "Mähre", "schnelles Reittier" usw.). Ist man sprachkundig, so genügt diesen Zwecken der Umschreibung auch ein zwei- oder mehrsprachiges Wörterbuch. Übersetzungen bzw. fremdsprachliche Pendants erklären gewöhnlich schon zufriedenstellend die Bedeutungen. Wortfelder haben allerdings keine bestimmte Struktur. Sie lassen allenfalls erkennen, ob ein Bedeutungsfeld in einer Sprache durch Wörter mehr oder weniger eng und dicht besetzt ist. Bei dieser Besetzungsdichte weichen die Sprachen oft erheblich von einander ab, ja man kennt zahlreiche Fälle, wo es keine wörtlichen Pendants zwischen den Sprachen gibt.

d. *Definition durch die pyramidale Notation*. Wie man schon bisher bemerken konnte, ist der logische Formalismus der Begriffspyramide selbst eine Struktur, die man den unstrukturierten Wortfeldern einer Sprache auferlegen kann. Man beachte, daß die jahrhundertelange Arbeit der Logiker und Theoretiker alle Bildungssprachen schon längst dermaßen durchdrungen hat, daß viele Wortfelder auch dem Laien in der Gestalt von Begriffspyramiden zur Verfügung stehen. Wir greifen bei unseren Beispielssätzen darauf zurück. Dies erzeugt den Anschein der Naturwüchsigkeit des logischen Denkens.

Wie nun die Pyramide zeigt, sind die Begriffe in einem logisch strukturierten Wortfeld immer durch gemeinsame Intensionen und Extensionen miteinander verflochten. Es ist schon etwas irreführend, wenn man von "Begriff" als etwas Isolierbarem und von anderen Begriffen Abgrenzbarem spricht, wie es die Bezeichnung "Definition" insinuiert. Wir haben deshalb vorgeschlagen, von "Begriffspositionen" zu reden, die in einem strukturierten Begriffsfeld durch die Struktur selbst - gleichsam als Knotenpunkte - ausgezeichnet werden können. Auf diese Begriffspositionen beziehen sich nun aber auch die Wörter der Sprache bzw. die Termini, sobald man inhaltlich logisch mit ihnen argumentiert.

Die logische Definition eines Begriffs besteht also darin, ihm einen Ort (Topos) in einer Begriffspyramide anzuweisen. Dies kann auf vielerlei Weisen geschehen, und entsprechend gibt es mehrere für bestimmte Zwecke geeignete und diesen genügende Definitionsarten.

Um ein Beispiel zu geben. Man definiert "Tier", indem man es in eine extensionale Pyramide (Klassifikation) einordnet und dabei durch logische Begriffe seinen Ort beschreibt: "'Tier' d . h. eine der Arten von 'Lebewesen' (neben anderen), welche ihrerseits die Unterarten der 'Warmblüter' und der

'Kaltblüter' einschließt". Es zeigt sich, daß man damit schon die Umgebung der Position "Tier" entfaltet hat, nämlich die (bzw. eine) zugehörige Gattung sowie die (Haupt-) Unterarten.

e. Dieses Definitionsverfahren durch die pyramidale Notation läßt sich auch auf höchste Gattungen und (unterste) Individuen anwenden. Höchste Gattungen ("Spitzenbegriffe von Begriffspyramiden") werden definiert, indem ihre zugehörigen Arten benannt und das gemeinsame Merkmal dieser Artbegriffe (unter Wegsehen - Abstraktion - von deren spezifischen Differenzen) festgehalten und ebenfalls benannt wird.

Bei der Definition von Individuen bestimmt ebenfalls die spezifische Differenz (hier gewöhnlich "Proprium", d. h. das Eigentümliche genannt) wesentlich ihren Begriff, denn sie allein unterscheidet das Individuum von allen anderen Individuen. Alle anderen Merkmale im Begriff des Individuums sind generische Merkmale, die es mit anderen Individuen gemeinsam hat und die daher in einem "nächsthöheren" Artbegriff enthalten sein müssen. Daß es in Beispielsfällen schwerfallen kann, einerseits das Proprium als "letztes Spezifikum" eines Individuums oder andererseits die gemeinsamen Merkmale vorletzter Artbegriffe für die Definition von Spitzenbegriffen anzugeben, tut dem logischen Definitionsverfahren keinen Abbruch. Wo dies nicht gelingt, wird man logisch nicht von Begriffen sprechen dürften.

f. Aristoteles und mit ihm die gesamte klassische Logik haben sich darauf kapriziert, partikuläre und individualisierende Urteile durchweg für behauptende Urteile zu halten. Sie werden seither mit der Kopula gelesen und als Erkenntnisurteile gewertet, z. B. "einige Lebewesen sind Tiere", "der (bzw. ein) Hund ist ein tierisches Lebewesen". Der Grund für diese Meinung war und ist ersichtlich, daß die partikularisierende und individualisierende Quantifizierung nur für eine Bedeutungsmodifizierung des im Satz vorkommenden (allgemeinen) Begriffs gehalten wird. Tatsächlich aber verweist die Quantifizierung - wie an der Pyramide deutlich wird - auf untere Begriffspositionen, die in der Regel unter anderen Termini als eigenständige Begriffe gelten müssen. Diese unteren zugehörigen Begriffspositionen werden in der Regel durch die Quantifizierung nur extensional bestimmt, und zwar sehr undeutlich: "einige X" sind immer eine Art von X neben anderen Arten von X. Und "ein X" ist in der Regel eines unter meist sehr vielen anderen "ein X" einer Unterart von "X". Daher besteht in solchen Fällen Bedarf für eine genaue Definition, welche Art bzw. welches Individuum gemeint wird. Und das wird durch die Angabe der spezifischen Merkmale intensional bestimmt. *Erst bei genauer Angabe aller Intensionen und Extensionen kann ein Begriff als logisch definiert gelten.*

Daher sind auch die sogenannten partikularisierenden und individualisierenden Urteile in der Regel keine behauptenden Urteile, sondern echte definitorische Äquivalenzen. Die Beispielsätze sind daher nicht mit Kopula, sondern mit dem definierenden Äquivalenzjunktor zu notieren: "Einige Lebewesen, d. h. (=) (die) Tiere" (nämlich im Unterschied zu den Pflanzen). "Ein Tier, d. h. (=) der Hund" (nämlich im Unterschied zu allen anderen einzelnen Tieren).

Behandelt man die partikulären "Urteile" als echte kopulative Urteile - wie es ja üblich und in gewissen Fällen auch angezeigt ist - so muß man in Kauf nehmen, daß sie unentscheidbar hinsichtlich ihres (dann vorauszusetzenden) Wahrheitswertes sind. "Einige Lebewesen sind Tiere" erscheint dann als wahr und falsch zugleich, denn es gilt ebenso: "Einige Lebewesen sind nicht Tiere (Nicht-Tiere, nämlich Pflanzen)". Bei individualisierenden "Urteilen" ist das nicht so offensichtlich. Aber es liegt auf der Hand, wenn man sich klar macht, daß alles, was man von "einem Tier" prädizieren kann, gerade für alle anderen Tiere (die jeweils auch "ein Tier" sind), nicht gelten soll. Handelt es sich aber bei den meisten partikulären und individualisierenden Urteilen um Definitionen, so stellt sich bei diesen die Wahrheitsfrage nicht.

Bei der hier vorgestellten pyramidalen Notation entfällt der in anderen Notationsweisen so wichtige Zwang zur besonderen Definition der vorkommenden Begriffe. Die Definitionen sind gleichsam in die Notation eingearbeitet, man "sieht" sie mit einem Blick: nämlich die zu einer Begriffsposition gehörenden Intensionen und Extensionen mitsamt der Herkunft der Intensionen aus dem generischen Merkmalsbestand der zugehörigen Gattungen.

Zugleich vereitelt aber diese pyramidale Notationsweise jedes angeblich logische und insbesondere axiomatische Umgehen mit Kategorien oder dasjenige mit Individuen-Kennzeichnungen, wenn deren Merkmalsbestände und Umfänge nicht angebbar sind. Mit anderen Worten, es vereitelt jede Scheinlogik mit angeblichen (undefinierbaren) Begriffen, die gar keine Begriffe sein können.

Corrolarium 1. Bekanntlich haben die Stoiker die Begriffe und entsprechend die "Aussagen" nicht quantifiziert, sondern in ihren Beispielssätzen stets direkt die zutreffenden (selbständigen) Begriffe verwendet.

Sie müssen daher geahnt oder gewußt haben, daß durch die aristotelische partikuläre und individualisierende Quantifikation nur Begriffe definiert werden.

Corrolarium 2. Kants Annahme, daß mathematische Gleichungen synthetische Urteile, zumal apriorische, seien, ist seither zurückgenommen worden. Man hält die mathematischen Gleichungen jetzt allgemein für analytische Urteile. Es steht freilich noch die Verbreitung der Einsicht aus, daß sie überhaupt keine behauptenden Urteile, sondern Äquivalenzen sind. Sie definieren mit mathematischen Junktoren gebildete Zahlausdrücke entweder durch andere Zahlausdrücke oder durch Zahlenwerte. Letzteres macht sich als Bedürfnis geltend, insofern (durch Rechenoperationsjunktoren verknüpfte) mathematische Ausdrücke gewöhnlich als auszurechnende Aufgabenformulierungen gelten, so daß der ausgerechnete Zahlenwert als Lösung des Rechenproblems und als die prägnanteste Definition dieser Lösung betrachtet werden kann.

Daß mathematische Gleichungen für behauptende Urteile gehalten werden, verdankt sich vermutlich den falschen Rechnungen als Lösung von Gleichungsaufgaben. Denn falsche Rechnungen stehen offensichtlich im selben Verhältnis zu "richtigen" wie falsche zu wahren Behauptungen. Entsprechend stehen dann auch die Gleichungen im selben Verhältnis zu den Ungleichungen wie positive zu negativen Urteilen. Aus dieser Proportionalität auf eine Identität des "Behauptungssinnes" von mathematischen Gleichungen und logischen Urteilen zu schließen, erscheint nicht als gerechtfertigt.

6. Die "Definition" der logischen Junktoren und ihre Äquivalenzen

Die moderne Logik zählt die Definition der Junktoren mittels "aussagenlogischer" Wahrheitswertbestimmungen von komplexen Urteilen, in denen die Teil- bzw. Elementarsätze durch die Junktoren verknüpft sind, zu ihren wichtigsten Errungenschaften. Für die Plausibilität der so - durch Whitehead und Russell sowie durch Wittgenstein und Post - definierten Junktoren beruft man sich üblicherweise darauf, daß sie mit dem Verständnis der Stoiker bezüglich einiger derselben gut übereinstimmen. Wo sie nicht übereinstimmen und insofern man durch mathematische Variationstechniken gänzlich neue Junktoren definiert hat, hält man diese erweiterte Tafel von insgesamt 16 Junktoren für den eigentlichen Fortschritt der modernen mathematischen Logik über die klassische Logik hinaus.

Auf die Fehlgriffe dieser Definitionsweise von Junktoren haben wir schon gelegentlich hingewiesen und werden das noch fernerhin tun. Der Hauptfehler liegt nach dem über die Junktoren Gesagten darin, daß den nicht-urteilsbildenden Junktoren überhaupt ein Wahrheitswert zugesprochen wird.

In der hier vorgeschlagenen Junktorentheorie wurden nun die urteilsbildenden und die ausdrucksbildenden Junktoren streng unterschieden, und es wurde vorausgesetzt, daß nur die ersteren wahrheitswertrelevant sein können. Die pyramidale Notation sämtlicher Junktoren und ihr dadurch offengelegter begrifflicher Strukturzusammenhang enthält nun gleichsam eingebaut auch alle sich aus der Theorie ergebenden Definitionen der einzelnen Junktoren. Der aufmerksame Leser kann sie in der vorne aufgezeichneten Pyramide selbst ablesen.

Der logische Vorteil dieser pyramidalen Definitionen der Junktoren besteht zunächst einmal darin, daß dabei die pyramidale Verknüpfungsweise der Junktoren auf die Begriffe der Junktoren selber angewandt wird. Man kann in aristotelischer Weise für jeden urteilsbildenden Junktor sein generisches Merkmal (das er mit seinem Oberbegriff gemeinsam hat) und seine spezifische Differenz (die eine Einschränkung der "wahren" Verknüpfungsrichtung bedeutet) angeben. Die oberste Junktorengattung "allgemeine Implikation" wird allerdings nur durch das Gattungsmerkmal "in jeder Richtung 'wahr' verknüpfend" bestimmt. Wir betonen auch hier nochmals, daß wir die "Selbstimplikation", die ja keine Junktur bzw. Verknüpfung sein kann, aus den logischen Funktionen dieses Junktors ausgeschlossen haben, obwohl sie in der mathematischen Logik als eine grundlegende Funktion der Implikation verwendet wird.

Das Verfahren, die pyramidale Begriffsstruktur auf die Junktoren anzuwenden, ist etwas, was von der Logik insgesamt zu fordern ist, was aber gewöhnlich sträflich vernachlässigt, ja gewöhnlich auch für unmöglich gehalten wird: daß es nämlich in der Logik selber logisch zugehe. Ersichtlich wäre es eine Probe aufs Exempel der logischen Durchleuchtung der mathematischen Junktoren, wenn es gelänge, auch diese in einer Begriffspyramide darzustellen. Wir haben unsererseits nur für einige mathematische Junktoren gezeigt, wo und wie sie mit den logischen übereinstimmen und somit an die logische Junktorenpyramide anzubinden sind.

Wittgenstein hat in seiner Junktorentabelle ebenso wie wir als ersten einen Junktor definiert, der die Eigenschaft, immer "wahr" zu verknüpfen, aufweisen soll. Er nannte ihn "Tautologie", und er hielt die Tautologie bekanntlich überhaupt für das Wesen der formalen Logik. Daß dies ein gravierender und höchst folgenreicher Irrtum war, dürfte nach allem Gesagten auf der Hand liegen. Kein Junktor verknüpft "tautologisch" irgend etwas mit sich selbst. Mit seinem "Tautologiejunktor" machte Wittgenstein gerade die Selbstimplikation zum Wesen alles rein Logischen. Wir schließen ihn, wie gesagt, (mit den Stoikern) aus der Logik aus. Wie eine "Tautologie" dabei aus gemischt wahren und falschen Elementarsätzen (den mittleren Positionen der Tautotologie-Matrix) ableitbar sein soll, bleibt Wittgensteins Geheimnis.

Über die sich aus der pyramidalen Position der Junktorenbegriffe gleichsam automatisch ergebenden Definitionen lassen sich mittels Anwendung der Junktoren auf diese Positionen selber die sogenannten Äquivalenzen zwischen ihnen übersichtlich und vollständig ablesen. Dies wird zwar auch als wesentlicher Gehalt der aussagenlogischen Definitionen angesehen und führt dort zu mannigfaltigen Versuchen, alle Junktoren auf einen einzigen (aber dann freilich selbst aus mehreren Junktoren zusammengesetzten Junktor, z. B. den sogenannten Shefferschen Strich) zurückzuführen. Wir vermuten, daß dadurch aber viele Irrtümer des Junktorenspiels in der modernen Logik eingeführt worden sind, die sich durch unsere wesentlich genauere Methode korrigieren lassen.

a. Die Äquivalenzen stellen selbst eine bestimmte Definitionsweise dar, nämlich in spinozistischer Manier durch die Ersetzung einer Position durch die negierte (dihäretische) Nebenart. In dihäretischen Begriffsstrukturen, in denen die urteilsbildenden Junktoren angeordnet sind, läßt sich jeder Junktor (außer der allgemeinen Implikation, die keine "Nebengattung" hat) als Negation seiner Gegenart ausdrücken, also in einem umkehrbaren ("kommutativen") Verhältnis. Und so liest man ab: Ein negiertes allgemeines Zukommen ist gleichbedeutend (äquivalent) mit einer Korrelationsimplikation. Entsprechend ist eine negierte Korrelationsimplikation gleichbedeutend mit einem allgemeinen Zukommen. Und ebenso ist dann die doppelte (bestimmte) Negation ("Negation der Negation") äquivalent mit dem Existenzjunktor, und umgekehrt der negierte Existenzjunktor äquivalent mit der Existenzbehauptung eines negativen Begriffs.

b. Gelten diese Äquivalenzen von den urteilsbildenden Junktoren, so lassen sich auch von den ausdrucksbildenden Junktoren solche Äquivalenzen formulieren. Da Ausdrücken aber kein eigener Wahrheitswert zukommt, kommt auch ihren Äquivalenzen kein Wahrheitswert zu. Am meisten dürfte hier einleuchten, daß dasjenige, was Nicht-Alternative ist, nur sein Gegenteil, nämlich die Und-Verknüpfung (Adjunktion) sein kann, und umgekehrt die Nicht-Adjunktion nur eine Alternative.

c. Die Quantifikatoren (ein, einige, alle) haben wir in der Pyramide nicht als drei Nebenartpositionen eigens bezeichnet. Stellt man sie in eine plurale Nebenartenreihe, so wird die Negation eine unbestimmte. "Nicht-ein" kann dann sowohl als "einige" wie als "alle" verstanden werden. "Nicht einige" entsprechend als "ein" oder als "alle". "Nicht alle" sowohl als "ein" wie als "einige". In der neueren Logik wird die "Partikularisierung" gewöhnlich als "mindestens ein" formuliert und damit das "ein" und das "einige" zusammengefaßt. Damit wird die Negation zwischen ihnen bestimmt, und es ergibt sich eine Äquivalenz von "alle = nicht mindestens ein" ("nicht nur einige"), sowie von "mindestens ein = nicht alle". Bekanntlich wird in der Quantorenlogik eine Äquivalenz von "nicht ein = kein = alle nicht" angenommen. Die hier bestehende Unklarheit dürften eine beachtliche Fehlerquelle in der Quantorenlogik darstellen.

Die hier vorgeführten Äquivalenzen sind, wie man sieht, nichts anderes als Definitionen der einzelnen Junktoren durch ihre negierten Nebenartbegriffe (so wie man in dihäretischen Begriffsverhältnissen z. B. "weiblich" durch "nicht-männlich" und umgekehrt definieren und somit ersetzen kann). Sprachlich bedeutet das, daß der jeweils positiv bezeichnete Junktor mit seiner negativ bezeichneten Nebenart synonym verwendet werden kann. Hier von "logischen Gesetzen" zu sprechen, erscheint uns bei weitem zu hoch gegriffen.

d. Die Aufstellung solcher angeblichen Äquivalenzgesetze wurde bekanntlich zuerst von Augustus de Morgan (Formal Logic, London 1847, 2. Aufl. London 1926) in Angriff genommen und dann in der Aussagenlogik geradezu als Forschungsfeld behandelt (vgl. etwa I. M. Bochenski, Grundriß der Logistik, aus dem Französischen übersetzt, neu bearbeitet und erweitert von A. Menne, Paderborn 1954, S. 30 - 33). Hierzu ist kritisch zu sagen:

A. de Morgans berühmte vier "Äquivalenzgesetze" beziehen sich sämtlich auf das aus der Negation des gegenteiligen Junktors ergebende Synonymitätsverhältnis von Adjunktionen und negierten Alternativen und von negierten Adjunktionen und Alternativen. Sie beziehen sich mithin auf ausdrucksbildende Junktoren, die in dihäretischer Begriffslage zueinander stehen. Dies Verhältnis hat de Morgan offenbar für zu einfach gehalten und daher mit mehrfachem Einsatz der Negation formuliert. Seine Äquivalenzen lauten:

1. de Morgansches Gesetz: Nicht-Alternative = nicht... und nicht...(weder...noch... = Adjunktion negativer Begriffe).
2. de Morgansches Gesetz: Nicht-Adjunktion = nicht... oder nicht... (Alternative negativer Begriffe).
3. de Morgansches Gesetz: Alternative = nicht nicht... und nicht...(negierte Adjunktion negativer Begriffe).
4. de Morgansches Gesetz: Adjunktion = nicht nicht... oder nicht... (negierte Alternative negativer Begriffe).

Sie sprechen insgesamt nicht mehr aus als die schlichten Synonymien ohne negierte Bestandteile: Eine Alternative ist zugleich und in gleicher Hinsicht eine negierte Adjunktion; und umgekehrt ist die Adjunktion eine negierte Alternative.

In der aussagenlogischen Verwendung werden nun anstelle der (pyramidal verorteten) Begriffe sogenannte Elementarsätze, also behauptende Urteile eingesetzt. Dadurch wird den ausdrucksbildenden Junktoren ein (neuer) Gesamtwahrheitswert zugesprochen. An die Stelle der positiv (benannten) Begriffe treten dann wahre Elementarsätze, und an die Stelle negativer Begriffe falsche Elementarsätze. Ebenso wird die vorausgestellte Negation (des ganzen Ausdrucks) als Zeichen für dessen Falschheit gedeutet.

Dieser Schritt kann nicht begründet werden und gilt daher als genialer Einfall der Begründer der Aussagenlogik. In der Tat macht er dem Anfänger in der Logik zu schaffen, der wenigstens gelernt haben sollte, daß negative Urteile ("-p") auch wahr sein können und positive ("p") nicht immer wahr sind. Die Notation der Aussagenlogik begibt sich dadurch der Möglichkeit, negative (wahre) Urteile zu bezeichnen, und sie fördert ein Vorurteil zugunsten der Wahrheit "positiver Tatsachen". Da überdies p und -p gelegentlich auch in partikularisierter Quantifikation in der Aussagenlogik benutzt werden, bei der die Negation keineswegs den Wahrheitswert umkehrt (wir halten partikularisierte Urteile aber nicht für behauptende Urteile, sondern für Definitionen, s. o.), kann man sich vorstellen, daß dadurch Fehler bedingt sind.

Liest man in den de Morganschen Gesetzen die Negation als "falsch", so lauten die vier "Gesetze":

1. Falsche Alternative = (wahre) Adjunktion zweier falscher Sätze.
2. Falsche Adjunktion = (wahre) Alternative falscher Sätze.
3. (Wahre) Alternative = falsche Adjunktion zweier falscher Sätze.
4. (Wahre) Adjunktion = falsche Alternative falscher Sätze.

Man sieht auf den ersten Blick, daß diese Einsetzung und Lesung der Negation als "falsch" verheerende Wirkungen hat, denn sie widerspricht in allen Fällen den aussagenlogischen Definitionen von wahren und falschen Alternativen und Adjunktionen. Daraus sollte man entnehmen, daß die de Morganschen "Gesetze" in Anwendung auf Begriffe zwar triviale Äquivalenzen junktorieller Ausdrücke ergeben, wie wir sie auch ohne den Umweg über die Negationen vorgeführt haben, in Anwendung auf wahre und falsche "Elementarsätze" aber selbst in Widerspruch zu deren Wahrheitswertdefinitionen geraten. Und das kann nur ein Indiz für die logische Unzulänglichkeit der ganzen aussagenlogischen Wahrheitswertdefinitionen sein.

Die aussagenlogische Junktorentheorie ist über die de Morganschen Gesetze hinaus, und diese einschließend, dazu übergegangen, allen Junktoren Wahrheitswerte beizulegen. Dies Verfahren hat zur Folge, daß auch Äquivalenzen zwischen Urteilsjunktoren und Ausdrucksjunktoren behauptet und zu definieren gesucht werden. Die in der Aussagenlogik behaupteten Äquivalenzen können sich nach unseren Voraussetzungen keineswegs auf gemeinsame Wahrheitswerte beziehen, da die ausdrucksbildenden Junktoren keinen Wahrheitswert besitzen können. Wohl aber lassen sich urteils- und ausdrucksbildende Junktoren hinsichtlich ihrer Verknüpfungsweise bzw. Verknüpfungsrichtung vergleichen.

In der Begriffspyramide läßt sich ersehen, daß die Verknüpfungsweisen des allgemeinen Implikationsjunktors dieselben sind wie die der unvollständigen Disjunktion. Beide verknüpfen jede reguläre Begriffsposition mit jeder beliebigen anderen Begriffsposition, und diese Begriffsverknüpfungen lassen sich einerseits in der Form behauptender Implikationsurteile, andererseits als (nicht behauptende) Begriffsverkettungen lesen. Eine Äquivalenz zwischen ihnen kann sich also nur auf diese Verknüpfungsweisen, nicht aber auf einen Wahrheitswert beziehen. Und dies ist ersichtlich eine logische Grundbedingung dafür, daß wahre Implikationsurteile nur zustande kommen können, wenn sie auf der Grundlage pyramidal geklärter Begriffsverhältnisse gefällt werden.

In gleicher Weise sieht man in der Pyramide, daß ein allgemeines (material-implikatives und formal inklusives) "Zukommen" genau so verknüpft wie die Quantifikationen, nämlich vertikal. Ebenso, daß eine korrelierende Implikation genau so verknüpft wie die Äquivalenz selber, nämlich horizontal. Auch dieses sind Bedingungen für die Möglichkeit, wahre Urteile auf klar geordneten Begriffsverhältnissen zu fällen. Aber über diese Entsprechungen hinaus kann es keine wahrheitswertdefinierten Äquivalenzen zwischen Urteils- und Ausdrucksjunktoren geben.

7. Die Urteile

Urteile sind Behauptungssätze. Der Behauptungscharakter macht ihre Wahrheitswertfähigkeit aus. Nach der klassisch-aristotelischen wie auch der stoischen zweiwertigen Logik sollten Urteile grundsätzlich wahr oder falsch sein. Behauptungen, die sich nicht als wahr oder als falsch erweisen lassen, sollten als das "Dritte" aus der Logik ausgeschlossen sein.

Zu dieser klassischen Meinung ist zu sagen, daß Aristoteles selbst schon in seiner Modallogik sogenannte *unentscheidbare Behauptungen* für den Bereich des Zukünftigen (possibilia futura) diskutiert hat. Er gab das Beispiel: Die Behauptung "morgen findet bei Salamis eine Seeschlacht statt" ist "heute" weder als wahr noch als falsch zu erweisen.

Dies gilt dann für alle "Möglichkeitsurteile", und zwar nicht nur für Zukünftiges, das man vom gegebenen Jetztstandpunkt aus noch nicht wissen kann, sondern für alles Ungewisse und nur Vermutete auch in der jeweiligen Gegenwart oder in der Vergangenheit.

Daß Aristoteles und mit ihm die ausgebaute Modallogik solche Vermutungssätze bzw. Möglichkeitsurteile als logische Behauptungssätze behandeln, widerspricht der erklärten sprachlichen Voraussetzung, nur echt behauptende Sätze der Sprache zum Thema der logischen Urteilslehre zu machen. Denn Vermutungen und Möglichkeitssätze werden sprachlich üblicherweise im grammatischen Konjunktiv formuliert: "es könnte dies oder das der Fall sein (oder gewesen sein oder zukünftig eintreten)". Der grammatische Konjunktiv kann durch abschwächende (man sagt: "behauptungsmodifizierende") sprachliche Partikel vermieden, aber in seiner Bedeutung nicht verändert werden, z. B. "dies ist vielleicht der Fall", "dies ist möglicherweise der Fall", "dies ist wahrscheinlich (vermutlich) der Fall", "dies kann der Fall sein", u. ä.

Diese grammatischen Mittel der Dissimulation fehlenden Behauptungssinnes scheinen Aristoteles selbst und die Modallogiker dazu verleitet zu haben, sie als - freilich abgeschwächte - echte Behauptungssätze anzusehen. Und dies umso mehr, als solche Möglichkeitsurteile in der Wissenschaft eine hervorragende Bedeutung besitzen, an deren Behandlung die Logik zu allen Zeiten größtes Interesse haben mußte. Jedenfalls führte diese Strategie, Vermutungen bzw. Möglichkeitssätze als Behauptungssätze zu behandeln und sie somit der zweiwertigen Logik zu unterwerfen, dazu, ihnen selber Wahrheits- oder Falschheitscharakter zuzusprechen und sie nicht - wie man von ihrem sprachlichen Charakter her vermuten sollte - als "unentscheidbar" bzw. "ein Drittes neben Wahrheit und Falschheit" artikulierendes Element aus der klassischen zweiwertigen Logik auszuscheiden. Gleichwohl ist das von einzelnen Logikern immer wieder mit Entschiedenheit gefordert worden.

Nun wurde schon vorne gezeigt, daß das aristotelische "Dritte" in logisch relevanter Gestalt nichts anderes als der Urteilswiderspruch selbst ist. Der Urteilswiderspruch ist wahr und falsch zugleich. Die modallogische Strategie hat aber dazu gezwungen, dem Urteilswiderspruch einen klassischen Wahrheitswert zuzusprechen. Als solchen hat man die Falschheit gewählt, und man ist seither gleichsam eisern dabei geblieben, widersprüchliche Urteile als falsche Urteile anzusehen. Dies wurde zum Ausgangspunkt größter Verwirrungen in der ganzen Geschichte der Logik, die aber immer zugleich als anspruchsvolle Problematik dargestellt wurden, die nur dem logischen Ingenium durchschaubar sein sollte.

Diese Fehlentwicklung korrigierend, gehen wir davon aus, daß auch die klassische Logik keine zweiwertige Logik gewesen ist und noch ist, sondern eine dreiwertige. Der dritte Wahrheitswert neben Wahrheit und Falschheit ist das, was wir an anderer Stelle "Wahr-Falschheit" genannt haben. Es ist nichts anderes als dasjenige, was in der Modallogik als "Wahrscheinlichkeit" und in ihren Anwendungen als "Möglichkeit" oder "Chance" thematisiert wird, und was bei den logischen Urteilsformen als Unentscheidbarkeit zur Geltung kommt.

a. Die klassische Urteilsklassifikation und ihre Mängel

Die *klassische Urteilslehre* klassifiziert die logischen Urteile gemäß den in ihnen verwendeten Junktoren und stellt sie unter die von Aristoteles selbst (durch Fragen) ermittelten Akzidenzkategorien der Qualität, Quantität, Relation und Modalität. Da es sich um ein klassisches Lehrstück der Logik handelt, sei diese Klassifikation auch hier vorgeführt:

Klassische Urteilsklassifikation (wir notieren in aristotelischer Formalisierung "ganzer" Subjekt- bzw. Prädikatsbegriffe X, Y, Z)

1. Qualitative Urteile:
   a. bejahende Urteile: X *ist* Y
   b. verneinende Urteile: X *ist nicht* Y.
2. Quantitative Urteile:
   a. allgemeine Urteile: *alle* X sind Y.
   b. partikuläre Urteile: *einige* X sind Y
   c. individualisierende Urteile: *ein* X ist Y.
3. Relationale Urteile:
   a. adjunktive (bzw. konjunktive) Urteile: X ist Y *und* Z bzw. X *und* Y ist Z.
   b. distributive bzw. unvollständig disjunktive Urteile (Junktor "vel", aber auch: "und/oder"): X *oder* Y ist Z bzw. X ist Y *oder* Z.
   c. alternative bzw. vollständig disjunktive Urteile (Junktor "aut"): X ist *entweder* Y *oder* Z bzw. *entweder* X *oder* Y ist Z.
   d. implikative bzw. hypothetische Urteile (Junktor "wenn...dann"): Wenn X (ist, bzw. wenn es X gibt), dann (ist bzw. gibt es) Y.
4. Modale Urteile.
   a. Notwendigkeitsurteile (Kant: apodiktische Urteile): X ist *notwendigerweise*Y.
   b. Faktische bzw. Wirklichkeitsurteile (Kant: assertorische Urteile): X *ist* Y.
   c. Möglichkeitsurteile (Kant: problematische Urteile): X ist *möglicherweise* Y bzw. X ist wahrscheinlich Y.

Diese klassische sogenannte Urteilstafel hat bekanntlich auch Kant noch mit gewissen Modifikationen als Leitfaden für die Auffindung der apriorischen "Kategorien" (die er für "Begriffe von den möglichen Urteilsformen" hielt) zugrunde gelegt und sie damit auch für die Transzendentalphilosophie kanonisiert.

Kritisch ist dazu zu sagen, daß diese Übersicht der Urteilsformen unvollständig und irreführend hinsichtlich der eigentlichen Unterscheidungskriterien der Urteilsformen ist.

Unvollständig ist sie, insofern darin die sogenannten Existenzurteile bzw. "impersonalen Urteile" (Es gibt X) fehlen. Auffällig ist auch das Fehlen der "Äquivalenzurteile" (die Gestalt der mathematischen Gleichungen und der Definitionen), die ja sonst gewöhnlich, aber fälschlicherweise, als behauptende Urteile angesehen werden. Das Fehlen der inversen Formen der kopulativen Urteile (X ist Y), nämlich der mit dem aristotelischen speziellen "Zukommen" gebildeten (Y kommt X zu) kann man vernachlässigen, da das "Zukommen" bald nach Aristoteles nicht mehr verwendet wurde und es ohne weiteres durch Umkehrung von Subjekt und Prädikat durch die Kopula ersetzt werden konnte.

Verhängnisvoller ist die mangelnde Unterscheidung der drei Formen der Implikation (materiale, formale und korrelierende Implikation), die in aristotelischer Formalisierung der "ganzen" Begriffe auch nicht darstellbar ist. Zählt man die Äquivalenzen nicht zu den eigentlichen behauptenden Urteilen - und diese Urteilstafel verfährt (mit Recht) so - dann dürften auch die partikulären und individualisierenden Urteile nicht hier vorkommen, da sie (wie gezeigt wurde) Äquivalenzen bzw. Definitionen sind. Schließlich fehlen auch die widersprüchlichen Urteile (X ist Y und Nicht-Y), und dafür dürfte das Bemühen, sie aus der Logik "als falsch" auszuschließen, kein Grund sein.

Gravierender ist der irreführende Charakter dieser Urteilstafel. Sie hat zu allen Zeiten den Eindruck erweckt, die hier die Klassifikation bestimmenden Junktoren seien ausschlaggebend sowohl für den Behauptungscharakter als auch die Wahrheitswerte der jeweiligen Urteile. Dies ist nach allem, was im Abschnitt über die Junktoren ausgeführt wurde, nicht der Fall. Wie man schon an den Formalisierungen sieht, ist in allen Fällen die Kopula oder die verneinte Kopula oder der Existenzjunktor oder gegebenenfalls eine der Implikationsformen ausschlaggebend für den Behauptungscharakter, und nur diese sind auch ausschlaggebend für die Wahrheitswerte. Wie es scheint, haben sich schon die Stoiker durch diese Klassifikation nach aristotelischen Kategorien dazu verleiten lassen, für Satzverknüpfungen mittels rein ausdrucksbildender Junktoren Wahrheitswerte festzusetzen, und die moderne Aussagenlogik (vgl. Wittgensteins Wahrheitswerttabellen im "Tractatus logico-philosophicus", in denen die Kopula nicht "definiert" wird) ist ihnen darin gefolgt.

Zieht man in Betracht, daß das Urteil dasjenige logische Element ist, an dem sich Wahrheit und Falschheit und ein (wenn auch vorgeblich auszuschließendes) Drittes als logische Eigenschaft zeigen sollte, so leistet die Urteilstafel (und leisten auch die aussagenlogischen Wahrheitswerttabellen) für die logische Auszeichnung der Wahrheitswerte einfacher Urteile (Wittgensteins "Elementarsätze) überhaupt nichts. Man kann keiner der hier genannten Urteilsformen ansehen, ob sie ein wahres oder ein falsches oder gegebenenfalls ein unentscheidbares Urteil darstellt. Vielmehr kann man dies nur an den inhaltlichen Beispielssätzen ausmachen (und muß es von daher unabhängig vom Formalismus wissen). Mit anderen Worten: Die formale Darstellung des Urteils "X ist Y" bzw. "S ist P" bzw. "p" (übliche aussagenlogische Satzvariable) läßt in keiner Weise erkennen, ob ein wahrer oder ein falscher Satz oder auch ein unentscheidbarer Satz gemeint ist. Man muß es unabhängig von der formalen Darstellung hinzubehaupten: "p" sei wahr (oder falsch oder wahr-falsch bzw. wahrscheinlich)! Erst ein eingesetzter Beispielssatz "Tiere sind Lebewesen" wird unmittelbar als wahr, und "Tiere sind nicht Lebewesen" als falsch erkannt.

Man sollte aber auch unter Berücksichtigung des früher Gesagten bemerken können, daß der buchstäbliche Lehrbuchsatz "Sokrates ist sterblich" ein unentscheidbares (wahr-falsches) Urteil ist. Denn Sokrates kann nur entweder tot oder lebendig sein. "Sterblich" (als Dispositionsbegriff) läßt genau dieses offen, so daß man daraus die Wahrheit, daß er längst tot ist, nicht entnehmen kann; ebenso wenig auch die Falschheit, daß er noch lebt. Und dies signalisiert den Fall, daß er sowohl das eine wie das andere sein könnte, also einen Fall von Wahr-Falschheit, der zugleich einen Widerspruch enthält.

Wohl am meisten irritierend und bisher nur unzulänglich beantwortet dürfte die Frage sein, worauf sich der Behauptungscharakter und damit die Wahrheitswertproblematik bei den Urteilen eigentlich bezieht.

Die Frage stellt sich in brisantester Weise beim sogenannten alternativen Urteil und beim Urteilswiderspruch, bei denen man ja voraussetzt, daß in ihnen jeweils eine wahre und eine falsche Urteilskomponente stecken, die nur durch verschiedene Junktoren verknüpft sind. Der Alternative, z. B. "Hunde sind entweder Tiere oder Pflanzen" ("Pflanzen d. h. Nicht-Tiere") aber spricht man den Wahrheitswert "wahr" zu, dem Widerspruch (z. B. "Hunde sind Tiere und Nicht-Tiere") aber den Wahrheitswert "falsch".

Erinnern wir zunächst daran, daß die Alternative und der Widerspruch grundsätzlich begriffliche Ausdrücke sind, die als solche keinerlei Wahrheitswert besitzen. Wahrheitswerte kommen ihnen überhaupt erst zu, wenn sie - wie in den Beispielen mit der Kopula - mit eigentlich urteilsbildenden Junktoren zusammen in Urteilen auftreten. Erst dann kann sich der Behauptungssinn der urteilsbildenden Junktoren auch auf den Sinn dessen beziehen, das durch nichturteilsbildende Junktoren zu einem komplexen Ausdruck verknüpft wurde.

Die meisten Logiker ziehen sich zur Erklärung implizit auf eine Metathese zurück und meinen, die angebliche Wahrheitsbehauptung der Urteilsalternative und die angebliche Falschheitsbehauptung des Urteilswiderspruchs beziehe sich auf den logischen Formalismus, und zwar unabhängig von jedem Inhalt der Urteilskomponenten, deren Wahrheit oder Falschheit "formal" keine Rolle spiele. Deshalb führt man auch gerne inhaltliche Beispielssätze an, deren einzelne Wahrheitswerte man gar nicht kennt, z. B. "Die Zahl der Sterne ist entweder gerade oder ungerade". Diese metatheoretische Betrachtungsweise ist in der Aussagenlogik dogmatisiert worden, und offensichtlich liegt sie auch schon der aristotelischen Unterscheidung der Notwendigkeits- und Wirklichkeitsurteile zugrunde und hat diese befestigt. Sie kulminiert in der kantischen Unterscheidung von apriorisch-formalem und aposteriorisch-materialem Bedeutungsgehalt der logischen Urteilsformen.

Nun mag es für den zünftigen Logiker zwar schmeichelhaft sein, sich durch die Alternative und den Widerspruch über jede Empirie zu erheben und ins Reich rein logischer Wahrheiten und Falschheiten hinaufzuschwingen. Er wird gleichwohl nicht davon absehen können, daß seine rein logische Alternative nur dann "wahr" sein soll, wenn darin eine Falschheit mit ausgedrückt wird, und entsprechend sein rein logischer Widerspruch nur dann falsch, wenn darin auch eine Wahrheit steckt. Denn wenn er dies nicht weiß und beachtet, weiß er nicht, ob seine Alternative wirklich eine Alternative und sein Widerspruch wirklich ein Widerspruch ist. Dieses Verhältnis belastet die Metathese selbst mit einem Widerspruch und bringt sich beim Verstehen als "mystische" Komponente oder als Rätselhaftigkeit zur Geltung. Ersichtlich ist die "Meta-Wahrheit" der Alternative und die "Meta-Falschheit" des Widerspruchs ebenso ein Wahrheitswert wie jeder Wahrheitswert der Urteilskomponenten, zugleich muß er, wenn er als "Meta-Wahrheitswert" ausgezeichnet werden kann, von den Wahrheitswerten der Urteilskomponenten streng unterschieden werden.

Vermeiden wir die Metathese und damit den Widerspruch und erinnern wir an das vorn über die nur ausdrucksbildende Funktion des ausschließenden "oder" und des "und" Gesagte. Ebenso ist an das für "auszuschließen" gehaltene Dritte zu erinnern, das sich doch als das "Wahr-Falsche" keineswegs aus der Logik ausschließen läßt. Dann liegt der Behauptungssinn des alternativen Urteils ebenso wie der des echten Urteilswiderspruchs eben in einer Behauptung über das Dritte, nämlich wahr und falsch zugleich zu sein.

Nicht von ungefähr ist die Alternative die logische Form einer Forschungsfragestellung, bei der man abschätzen kann, in welchen Bereichen man nach Wahrheit und Falschheit suchen muß, ohne daß man sie schon kennt. Die scholastische Quästionenmethode, die auch als "Sic et non-Methode" bezeichnet wird (richtiger hätte es aber "Sic aut non"-Methode heißen müssen) hat daraus eine Tugend gemacht. Das alternative Urteil steckt seinem Behauptungssinn nach eben den Bereich ab, in welchem eine Wahrheit zu erwarten und zugleich von einer Falschheit abzugrenzen sein muß. Ersichtlich ist es dann ein Mißbrauch der alternativen Urteilsform, sie auch dann zu benutzen, wo man die Wahrheit (z. B. von A) und die Falschheit (z. B. von B) schon kennt. Denn in solchem Falle wird man tunlichst die negierte Adjunktion "A und nicht B" in das Urteil aufnehmen.

Entsprechendes muß auch vom Urteilswiderspruch gelten. Er ist die logische Form, der alternativen Fragestellung auszuweichen, sich Festlegungen geradezu zu entziehen. Der Urteilswiderspruch gilt mit Recht als logischer Fehler, denn er unterläuft gewöhnlich dann, wenn man den Begriffszusammenhang hinter Argumentationen nicht durchschaut. Durchschaut man ihn aber, dann mag man sich selbst oder andere "auf dem Widerspruch ertappen" und ihn abstellen. Aber von da zur These überzugehen, eine ganze Argumentation sei "falsch", weil sie einen Widerspruch enthalte, dürfte mehr als kühn sein. Die schlichte Behauptung von Widersprüchen in der logischen Satzform "A ist B und Nicht-B" dürfte im wissenschaftlichen Alltag die große Ausnahme sein. Meistens muß man sich bei der Theorieüberprüfung die Komponenten des Widerspruchs aus entlegenen Theorieteilen zusammenholen, und oftmals ist die "Zuspitzung" von Thesen auf einen Widerspruch hin selber überspitzte Polemik, und die Reaktion darauf dann auch die Unterscheidung zweier verschiedener Sinne der angeblich widerspruchsvollen Behauptung.

Wird aber der Urteilswiderspruch explizit behauptet, dann erfüllt dies ersichtlich den Tatbestand der Lüge, in der immer Wahres und Falsches vermischt ist. Aber warum sollte in der Logik, in der man klar und deutlich wie auch dunkel und andeutend artikulieren kann, nicht auch die Lüge formalisierbar sein? Der Vorzug dieser Deutung ist jedenfalls, daß sich die Lüge als Widerspruch darstellen läßt, die ihr formales Kriterium an sich trägt.

Wer nämlich gut lügt, sagt das Falsche in Abhängigkeit und im Wissen um das entsprechende Wahre, das er verschweigt (sonst würde er allenfalls nur irren). Das Aufdecken von Lügen besteht daher auch wesentlich darin, das verschwiegene Wahre zur Sprache zu bringen und es dem geäußerten Falschen zu konfrontieren. Man kann den Richter oder Ankläger vor Gerichte aber nur davor warnen, den Logikern darin zu folgen, alles widersprüchlich Vorgebrachte des Angeklagten für falsch zu halten, denn der muß schon die Wahrheit mit eingestanden haben, wenn er überhaupt auf einen Widerspruch festgelegt werden kann. Da aber "das Erkenntnis" der Gerichte auch logische Fehler deckt, dürfte die Dunkelziffer derjenigen, die auf Grund der vorgeblich "gänzlichen Falschheit" ihres widersprüchlichen Vorbringens verurteilt worden sind, recht hoch sein.

Bestimmt man im üblichen Sinne den Wahrheitswert des widersprüchlichen Urteils als "unter allen Umständen falsch", so begeht man damit selbst den Widerspruch, die Wahrheit in einer der Komponenten des widersprüchlichen Urteils zu unterdrücken bzw. zu verschweigen. Auch das erfüllt den Tatbestand der Lüge, da man immer wissen kann, daß vom Doppelprädikat "Y und Nicht-Y" hinsichtlich des Subjekts "X", wenn das eine zutrifft, dann das andere nicht zutreffen kann, was die Behauptung "X ist Y und Nicht-Y" wahr und falsch zugleich macht.

Dieser Fall ist aber noch harmlos im Vergleich zu solchen widersprüchlichen Urteilen, in denen ein selber kontradiktorischer Begriff im Prädikat steht. Denn diesem sieht man oftmals seine Widersprüchlichkeit nicht an. Erschwerend kommt hinzu, daß sehr viele als normal und regulär geltende und im Gebrauch befindliche Begriffe undurchschaute contradictiones in adiecto sind, die ihren widersprüchlichen Charakter erst in einer logischen Analyse offenbaren (wozu die pyramidale Kontrolle hilfreich ist). Wie vorn bei den Begriffstypen gezeigt, gehören die Dispositionsbegriffe, der Möglichkeitsbegriff (mit allen seinen Derivaten wie Kraft, Vermögen, Anlage, Disposition), und auch die logische "Wahrscheinlichkeit" dazu.

b. Die Wahrscheinlichkeitsurteile

Wahrscheinlichkeitsurteile nehmen in der modernen mathematischen Logik eine dominierende Stelle in der Urteilslehre ein. Das geht teilweise so weit, daß man die sonstigen schlichten behauptenden Urteile nur noch als Spezialfälle von Wahrscheinlichkeitsurteilen einordnet. Nur die Extremfälle des Wahrscheinlichkeitsurteils mit 100 % iger Wahrscheinlichkeit gelten dann im Formalismus als schlicht wahre Urteile, und entsprechend die Extremfälle von Wahrscheinlichkeitsurteilen mit 0 % iger Wahrscheinlichkeit als falsche Urteile.

Über schicksalhafte Ereignisse in der Zukunft schon in der Gegenwart etwas ausmachen zu können, gehört natürlich schon immer zu den Menschheitsträumen, die zu erfüllen die moderne Wissenschaft in Angriff nahm. Daß der Traum bisher nicht erfüllt wurde, zeigt sich aber schon daran, daß noch kein Mathematiker oder mathematischer Logiker an der Börse ausschließlich erfolgreich spekuliert oder gar eine Spielbank gesprengt hätte. Und das hätte ja geschehen müssen, wenn die quantifizierten Wahrscheinlichkeiten der modernen Modallogik in irgend einer Weise "wahrscheinlicher" wären als der blinde Zufall.

Dies ist so geblieben trotz allem mathematischen Apparat, der seither im Zeichen des comteschen positivistischen Programmes des "Savoir pour prévoir" auf die wissenschaftlichen Prognosen und ihre Verifikation und Falsifikation angewandt wurde. Und dabei sieht es unter der Aszendenz von mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorien in der Wissenschaftstheorie heute in der Forschung schon fast so aus, als gäbe es überhaupt keine sicheren und wahren Prognosen mehr, sondern alle Prognosen seien grundsätzlich "statistische Wahrscheinlichkeitshypothesen".

Wir gehen davon aus, daß die Wahrscheinlichkeitsurteile einen kontradiktorischen oder zumindest dispositiven Prädikatsbegriff prädizieren, deren Struktur wir vorn notiert haben. Damit muß für alle solchen Urteile gelten, daß sie zugleich wahr und falsch sind. Die Wahr-Falschheit der Wahrscheinlichkeit wird sich daher in jeder Rede und Theorie darüber zeigen lassen müssen. Das muß zuerst und grundsätzlich auch von der 100 %igen Wahrscheinlichkeit gelten, die danach, wenn überhaupt Wahrscheinlichkeit, dann wahr und falsch zugleich sein muß, und ebenso von der 0 % igen Wahrscheinlichkeit, die zwar als Falschheit gilt, aber ebenfalls zugleich wahr und falsch sein muß. Daß dies Fehler in der üblichen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitslogik anzeigt, dürfte auf der Hand liegen.

Bei den sogenannten "subjektiven Wahrscheinlichkeitslehren" zeigt sich dies darin, daß damit ein Glaube (belief), ein Überzeugungsgrad, eine Erwartung oder gar eine Hoffnung artikuliert werden soll, die sich von Wissen rigoros unterscheiden lassen müssen. Das setzt aber voraus, daß Urteile auf der Grundlage von Wissens immer wahr sein müßten, was offensichtlich nicht der Fall ist. Und daran erkennt man, daß der Glaube und die Überzeugung gerade auch die Grundlage für alle Urteile mit vollem Wahrheitsanspruch sind. Wird nun eine quantifizierte Wahrscheinlichkeit von 100 % formal mit der Wahrheit identifiziert, so wird damit behauptet, daß in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit mit der Wahrheit identisch sein muß. Und das widerspricht eklatant der Grundunterscheidung zwischen Wahrheit und Wahrscheinlichkeit. Geradezu paradox muß es dann erscheinen, daß schlichte empirische Wahrheitsbehauptungen sich zwar gelegentlich auch als falsch herausstellen können, eine 100 % empirische Wahrscheinlichkeitsannahme aber geradezu unwiderleglich wahr sein müßte.

Entsprechendes gilt auch vom Verhältnis der Wahrscheinlichkeit zur Falschheit. Wird die 0 %-Wahrscheinlichkeit mit der Falschheit identifiziert, so müßte sich dadurch eine Falschheit geradezu "apriorisch" sichern lassen, was doch bei normalen empirischen falschen Urteilen nie der Fall sein kann.

In beiden Fällen wäre ausgerechnet die Wahrscheinlichkeit, die doch dem Glauben Ausdruck verleihen soll, "stärker" als einfache Wahrheit und Falschheit auf Grund wohlbegründeten Wissens.

Die sogenannten "objektiven Wahrscheinlichkeitslehren" erklären die Wahrscheinlichkeiten als "objektive Möglichkeiten", die sich in der Welt realisieren können oder auch nicht. Damit haben sie - im Sinne traditioneller "mögliche Welten-Auffassungen" die Welt mit einer gespensterhaften Hinterwelt ausgestattet, die aus Kräften, Potenzen, evolutionären Tendenzen (Poppers propensities) besteht, die ersichtlich in der Moderne an die Stelle mittelalterlicher Geister und Dämonen getreten sind. Von ihnen gilt immer noch wie von jenen: Keiner kann sie sinnlich wahrnehmen, aber sie "wirken" und gestalten die wirkliche Welt. Und von ihnen muß man in der Weise des Glaubens, der Überzeugung, mithin in Wahrscheinlichkeitsannahmen reden.

Bemerken wir hier wiederum den Widerspruch, der schon in der Entgegensetzung der subjektiven und objektiven Wahrscheinlichkeitslehren besteht: Sie können gar nicht unterschieden werden, da dasjenige, was man subjektiv glaubt bzw. nur glauben kann, weil man es nicht weiß, eben dasjenige ist, was man objektiv für Wahrscheinlichkeiten bzw. Möglichkeiten hält.

Hinsichtlich der "objektiven Wahrscheinlichkeiten", stehen sich die Kausalisten und die Indeterministen - es sind die Nachfahren der alten Stoiker und der Epikureer - unversöhnt gegenüber. Die Kausalisten hoffen und versprechen, durch vertiefte Kausalforschung die Wahrscheinlichkeiten asymptotisch sicheren Wahrheiten annähern zu können. Die Indeterministen halten dies für aussichtslos. Für sie ist das Eintreten von Ereignissen genauso zufällig wie das Äußern von Wahrscheinlichkeitsurteilen (in der Tat sind Behauptungen nach den Voraussetzungen des Indeterminismus selbst indeterminierte Ereignisse). Entsprechend ist es dann auch Zufall, wenn hier Wahrscheinlichkeitsprognosen mit Ereignissen übereinstimmen. Man könnte sagen: Für Indeterministen ist die Wissenschaft mit ihren Wahrscheinlichkeitsaussagen ein großes Glückspiel, in dem der eine oder andere Forscher zufällig das große Los zieht. Aber man muß bis zur Preisverleihung warten, um zu erfahren, daß es das große Los war. Und auch die Preisverleihung selbst unterliegt dann natürlich dem Losverfahren. Daher zielen die indeterministischen Bemühungen auch eher darauf ab, die Wahrscheinlichkeit von der sicheren Falschheit entfernt zu halten, die darin bestünde, überhaupt nichts für möglich zu halten.

Auch in diesem Streit tritt die Widersprüchlichkeit zutage. Die Deterministen können die Existenz einer Universalkausalität höchstens für wahrscheinlich halten und deswegen daran glauben, und die Indeterministen die Existenz der absoluten Freiheit, des Zufalls und der Chaotik ebenso. Und wenn die Wahrscheinlichkeit das ist, was wir voraussetzen, nämlich Ausdruck des Nichtwissens über Wahrheit bzw. Falschheit eines Sachverhaltes, so haben sie "wahrhaft" beide recht und vertreten zugleich eine offensichtlich "falsche" Meinung.

Ist die Wahrscheinlichkeitsaussage logisch ein widersprüchliches Urteil, so steht es im Widerspruch zur Gesamttradition der Logik, diese Urteile nicht für falsch zu halten (denn Widersprüche gelten ja üblicherweise als "falsch"). Man kann sagen, die Entwicklung der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorien in der Neuzeit muß die Logiker so sehr überrascht haben, daß sie nicht einmal daran dachten, wenigstens auf den Falschheitsgehalt der Wahrscheinlichkeitsaussagen zu achten. Und doch liegt er ja offen zutage.

Wir erklären uns das so, daß man die Wahrscheinlichkeitsurteile als Ableger der vollständigen und unvollständigen disjunktiven Urteile behandelte. Das tut der Volksmund noch heute, wenn er die Wetterprognose: "Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist" unbesehen für ein wahres Urteil hält. Denn die Alternative gilt als wahr, wenn das eine Glied wahr und das andere falsch ist, und das ergibt sich in jedem Falle, wenn ein Hahn kräht. Und ebenso, wenn einer beim Würfeln sagt: "Der Würfel fällt auf die Eins oder die Zwei oder die Drei oder die Vier oder die Fünf oder die Sechs", denn das ist nach üblicher Logik ein wahres disjunktives Urteil, das "wahr" sein soll, wenn eines oder mehrere Glieder falsch sind und wenigstens eines - eben der tatsächlich herauskommende Fall - wahr ist. Und wenn das die logische Voraussetzung für die Einschätzung der Wahrscheinlichkeitsurteile abgegeben hat, dann muß man sich nicht wundern, wenn man sie seither mit einem Vorurteil für ihre Wahrheit behandelt: so als wäre man damit näher bei der Wahrheit als der Falschheit (wie das Wort "Wahrscheinlichkeit" und die Ersatzwörter "Probabilität", "verisimilitude" u. ä. suggerieren).

Genau so verhält es sich auch bei allen Wahrscheinlichkeitsurteilen mit mathematisch konstruierten Haufigkeitsverteilungen (die durch Zufallsgeneratoren technisch erzeugt werden können). Die Wahrscheinlichkeitsprognose für den Münzwurf ist ihrer mathematischen Darstellung nach halb wahr und halb falsch - wir nennen das "wahr-falsch" zugleich. Für den Würfelwurf ist sie für jeden Wurf 1/6 wahr und

5/6 falsch. Das kann man dann leicht auf Prozentsätze umrechnen, in denen heute fast alles wahr und falsch zugleich prognostiziert wird.

Nun entfaltet die mathematische Quantifikation der Wahrscheinlichkeiten nach den idealisierten Grenzwerten von Häufigkeiten unendlicher Reihen eine zusätzliche Suggestionskraft für die Wahrheitsseite in der Wahrscheinlichkeit. Wer mehrmals gewürfelt hat, ohne, daß die von ihm gewünschte Zahl erschien, der läßt sich von der mathematisch-exakten "Gleichverteilung" der Häufigkeiten (die man aber erst am Ende aller Tage feststellen könnte, denn sie ist ein idealer Grenzwert unendlicher Reihen!) überzeugen, sie müsse alsbald mit "zunehmender Wahrscheinlichkeit drankommen". Davon kann keine Rede sein. Ob die Zahl erscheint oder nicht erscheint, das bleibt ebenso "auf ewig" ungewiß, wie es die Berechnung der Häufigkeitsverteilung über das mathematische "Unendliche" (im "Grenzwert") definiert hat. Und dabei kann man nicht einmal mit Gewißheit zwischen einem geeichten und einem gefälschten Würfel unterscheiden.

Man sieht, wie sich die Widersprüchlichkeit in der Wahrscheinlichkeit auch hier auswirkt. Je mehr Möglichkeiten, desto weniger Wahrheit und mehr Falschheit in der Wahrscheinlichkeitsaussage über den einzelnen Fall. Man sagt dann, die "Wahrscheinlichkeit, daß der prognostizierte Fall eintritt, wird mit der Zahl der möglichen Fälle geringer". Und zugleich bleibt bestehen: "Der Fall tritt ein oder er tritt nicht ein". Und das kann nur bedeuten: Die Zahl der möglichen Fälle hat keinerlei Verhältnis zur quantifizierten Häufigkeits-Wahrscheinlichkeit des Falleintritts.

Wenn das aber so ist, so kann auch eine Ungleichverteilung von Möglichkeiten kein logisches Verhältnis zum Einzelfall aufweisen. Wir sagen "logisches Verhältnis", weil es keinen Unterschied bedeuten kann, ob man dies mit den Kausalisten "Einfluß" oder "kausale Bewirkung" nennt oder mit den Indeterministen "zufällige Koinzidenz". Ungleichverteilung von Möglichkeiten ist aber die Domäne der empirischen Statistik. Auch hierbei kann sich aus dem, was über Kollektive ermittelt wird, kein logisches Verhältnis zum Einzelfall ergeben. Es bleibt auch bei der empirischen statistischen Wahrscheinlichkeitsaussage und -Prognose bei der widersprüchlichen Verschmelzung von Wahrheit und Falschheit. Und das drückt der nicht von Logik beleckte Volksmund bekanntlich - wider alle wissenschaftliche Einsicht - recht drastisch aus: Mit nichts kann man so gut lügen, wie mit der Statistik (natürlich ist damit nicht die induktive vollständige Datenerhebung, sondern der Bezug auf den Einzelfall gemeint), weil man damit immer die Wahrheit und die Falschheit zugleich äußert.

Wer mit Vertrauen auf statistische Erhebungen weiß (nicht glaubt!), daß 80 % aller Raucher an Krebs sterben, der wird sich als Raucher mit 80 % iger Wahrscheinlichkeit den eigenen Krebstod prognostizieren müssen. Ob ihn das anficht, hängt davon ab, ob er sich vom mathematischen Apparat der Wahrscheinlichkeitslogik beeindrucken läßt. Als Logiker sollte er wissen, daß er 1. gewiß überhaupt sterben wird, und daß 2. die Wahrscheinlichkeitsprognose ihm nur prophezeit, daß er entweder an Krebs oder nicht an Krebs sterben wird. Und um sich das sagen zu lassen, braucht er natürlich weder eine Wahrscheinlichkeitsprognose noch überhaupt Wissenschaft.

Wir plädieren dafür, die "Wahrscheinlichkeitsurteile" wieder auf das zurückzustufen, was sie ihrer logischen Natur nach nur sein können, nämlich eigentlich nichtbehauptende Sätze. Sie sind gleichsam nur aus Versehen schon durch des Aristoteles rudimentäre Modallogik in die Urteilslehre geraten. Formuliert man sie sprachlich korrekt, so müssen sie im Konjunktiv, wie immer er auch durch weitere sprachliche Partikel verbrämt sein mag, ausgedrückt werden. Statt zu sagen: "Es ist wahrscheinlich daß dies oder jenes passiert.", kann man immer und deutlicher sagen: "dies oder jenes könnte passieren". Dann wird auch klar, daß man es damit niemals ausschließt, daß dies oder jenes gerade nicht passiert. Ebenso wird klarer, was durch die mathematische Quantifikation von Wahrscheinlichkeiten eher unklar wird: daß man nämlich auch beim Vermuten gute Gründe haben mag zu sagen: "dies könnte eher passieren als jenes". Aber auch dann wird man sich nicht dafür verbürgen, daß das eine eher als das andere eintrifft. Allenfalls kann man, sofern man gerne spielt und es sich leisten kann, eine Wette darauf abschließen.

Hat man aber genug gute Gründe, etwas zu behaupten, so wird man stets auch diese logische Form des behauptenden Urteils zum Ausdruck wählen und den Wahrscheinlichkeitston der Vermutung verlassen. Dann steht die korrelierende Implikation zur Verfügung, und man sagt: "Wenn diese und jene Fakten vorliegen, dann ergibt sich als Folge dies und jenes Faktum". Das mag ein wissenschaftlich instrumentiertes Kausalurteil sein oder nur ein "schwaches" auf Lebenserfahrung beruhendes Argument. Als solches kann es zwar behauptet werden, aber es kann - wie alles Empirische - sich gleichwohl als Irrtum erweisen. Seitdem die moderne Wissenschaftstheorie die Wahrscheinlichkeitsurteile zum Haupt-
argu

mentationsmittel ausgebaut hat, irrt aber kein Wissenschaftler mehr, denn er kann sich immer darauf berufen, daß er mit der "Wahrscheinlichkeit" jede Möglichkeit quantifiziert richtig vorausgesehen hat.

c. Entscheidungen

Die Logik der Wahrscheinlichkeit ist auch die Grundlage der *Entscheidungstheorien*, die Anwendung bei der Kalkulation von Spiel- und Wetteinsätzen und bei ökonomischen und evtl. auch bei politischen Unternehmungen finden. In der einschlägigen Literatur wird postuliert, daß ein Entscheidungsträger sich "rational" verhalte. In der Ökonomie ist es seit Bentham und Mill der "homo oeconomicus", und in der Logik sollte es dann der "Wahrscheinlichkeitstheoretiker" selber sein.

Die hier postulierte "Rationalität" läuft darauf hinaus, daß der Entscheidungsträger 1. Gebrauch von den logisch-mathematischen Hilfsmitteln machen soll. Aber es sollte schon deutlich geworden sein, daß er sich bei deren Verwendung gegebenenfalls selbst zu einem Zufallsgenerator von Entschlüssen macht. 2. soll er sich selber Präferenzen bei seinen Entscheidungen auferlegen, indem er sich seine eigene Situation und in dieser seine erhofften Gewinne und Schäden, Vorteile und Nachteile zu Bewußtsein bringt. Vor allem aber sollte er einschätzen, ob und mit welchen "Gegenspielern" er es dabei zu tun hat. Wenn er das aber tut, so kann das nur bedeuten, daß er das, was er will und kann und was er erhofft, zunächst einmal in wahren Urteilen feststellt. Dafür bildet aber nicht die Wahrscheinlichkeitslogik, sondern die ganz gewöhnliche Logik mit ihren "wahren" Feststellungen, die sich gelegentlich auch als Irrtümer erweisen können, die Grundlage. Die Entscheidungsrationalität wird also eine Mischung von wahren und wahrscheinlichen Urteilen aufbieteten müssen. Kennzeichen dafür dürfte auch hier das Auftreten von Paradoxen sein, die in der Entscheidungstheorie formuliert wurden. Die hier vorausgesetzte "Rationalität" ist mithin eine Repristination der cusanische "Docta ignorantia" im entscheidungstheoretischen Gewande.

Zur Lageeinschätzung unter Wahrscheinlichkeitsgesichtspunkten gehört die Beurteilung, ob es sich dabei um ein Glücksspiel (mit gleicher Häufigkeitsverteilung der Chancen) oder um ein Geschicklichkeitsspiel (bei dem von ungleichen Häufigkeitsverteilungen ausgegangen wird) evtl. mit Wetteinsätzen, die der Entscheidungsträger sich leisten können sollte, oder um eine ganz undurchsichtige Situation handelt, angesichts derer er die Grundentscheidung treffen muß, ob er überhaupt handeln oder nicht handeln soll. Und dabei wird er neben tatsächlichen Spiel- und Wettsituationen auch die Herausforderungen der Umwelt ("Natur") oder der Gegenspieler als Spielgelegenheiten einschätzen. Ist die Lage ganz undurchsichtig, so ist er gut beraten davon auszugehen, daß es ganz gleichgültig ist, wie er sich entscheidet. Weder er noch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Beratung wird ihm hier Erfolg oder Mißerfolg garantieren, sondern immer beides zugleich. Er muß es sich eben leisten können, etwa bei "Entscheidungen unter Risiko" überhaupt zu handeln oder nicht zu handeln. Und er kann dann statt zu grübeln gewiß auch gleich seine Entscheidung mit einem Münzwurf erledigen.

Bleibt man bei seinen Entscheidungen im Rahmen ethischer Maximen und rechtlicher Regelungen, so sind die Entscheidungen reine Subsumptionsfragen der ins Auge gefaßten Handlungen unter die ethischen und rechtlichen Begriffe (und ihre Lösung verleiht zusammen mit dem darauf beruhenden "guten Gewissen" gewöhnlich die kräftigsten Handlungsimpulse). Gedenkt man sich über diese hinwegzusetzen, so mag man seine Chancen, damit "durchzukommen" wie auch immer berechnen. Auch bei solchen Wahrscheinlichkeiten geht es immer um eine glückspielhafte Alternative, erwischt zu werden oder nicht, und dabei kann man ebenfalls den Münzwurf bemühen.

Die Bilanz der Pleiten und Mißerfolge, aber auch der Erfolge selbst best- und teuerstberatener Entscheidungsträger läßt es jedenfalls als höchst zweifelhaft erscheinen, daß die wahrscheinlichkeitstheoretisch unterfütterten Entscheidungen auch nur um einen geringen Grad "besser" und erfolgreicher wären als das pure Münzwerfen. Im Gegenteil, man kann sich des Eindrucks kaum erwehren, daß gerade das Vertrauen auf diese "wissenschaftiche" Hilfestellung Fluchten aus der Verantwortung für die jeweiligen Entscheidungen institutionalisiert.

d. Paradoxale Urteile

Neben den Wahrscheinlichkeitsurteilen sind die *paradoxalen Urteile* ein bisher logisch unbewältigter Fall von wahr-falschen Sätzen. Betrachten wir das Problem an Beispielen.

Für die ungeklärte Lage auf diesem Felde scheint uns die Geschichte des "Lügner-Paradoxes" (Eubulides) von der Antike bis heute symptomatisch. Immerhin erscheinen ja noch jährlich mehrere scharfsinnige Analysen, die sich anheischig machen, die "Falschheit" des Paradoxes bzw. des in ihm steckenden Widerspruches aufzudecken. Dort, wo man sie sucht, nämlich auf der Metaebene, wird man sie nach allem Gesagten niemals finden. Und dort wo sie ist, nähmlich als Komponente der Wahr-Falschheit, hat man sie geflissentlich übersehen, weil man die Wahrheitskomponente nicht wahr haben will.

Man setzt voraus, daß die Geschichte vom "kretischen" notorischen Lügner nur dann ein Paradox ist, wenn in der Form eines wahren Geständnisses gelogen wird oder auch umgekehrt in der Form einer Lüge ein (wahres) Geständnis abgelegt wird. Wie immer man nun das "ich lüge" des notorischen Lügners interpretiert, ob als (wahres) Geständnis oder als (falsche) Lüge, so wird in jedem Falle das Gegenteil mitbehauptet. Dies in einer geeigneten sprachlichen Behauptungsform auszudrücken (und es gibt viele Variationen davon), das macht den ganzen Witz und Zauber des Lügner-Paradoxes aus. Wie es scheint, hat der Aristoteles-Kommentator Alexander von Aphrodisias (Zu den Sophistischen Fehlschlüssen 171,18, vgl. J. M. Bochenski, Formale Logik, 3. Aufl. Freiburg 1970, S. 152) hier schon das Richtige festgestellt, wenn er sagte: "Der, welcher sagt 'Ich lüge', lügt und sagt die Wahrheit zugleich".

Auch die berühmten mathematischen Paradoxien "funktionieren" nur unter den entsprechenden Voraussetzungen. Auch sie sind wahr und falsch zugleich, und es erscheint als selbstgeschaffenes perennes Arbeitsprogramm der Mathematiker, nach ihrer Meta-Falschheit zu fahnden und diese aufzeigen und womöglich eliminieren zu wollen.

Ein mathematisches paradigmatisches Paradox ist das sog. Russellsche Mengenparadox. Es ist in der mathematischen Grundlagentheorie deshalb so signifikant, weil auch schon Euklid die Zahlen als "Mengen von Einheiten" definiert hatte. Aber Euklid dachte noch nicht daran, daß von "Mengen" gesprochen werden könnte, wenn sie nur "eine Einheit" enthielten, noch weniger, wenn sie "keine Einheit bzw. kein Element" enthielten, und offenbar hielt er es für ganz undenkbar, wenn sie "sich selbst enthalten" sollten. In der mittelalterlichen Mathematik hat man aber die Null unter die Zahlen aufgenommen und in der modernen Mengenlehre hat man die "Menge" zum allgemeinen Zahlbegriff erhoben. Und das führt zum modernen genuin mathematischen Begriff der Menge, die sich selbst als auch evtl nur ein Element oder auch kein Element enthalten können soll. Die Russellsche Paradoxie stellt nun den alten Euklidischen Mengenbegriff, der mit mit dem Alltagsbegriff von Menge übereinstimmt, neben den modernen mathematischen Mengenbegriff und bringt sie als zwei Arten von Mengen in einen logischen Zusammenhang.

Unterscheidet man nun beim Russellschen Mengenparadox die beiden Arten von Mengen, nämlich diejenigen, die sich selbst nicht als Elemente enthalten, und diejenigen, die sich selbst als Elemente enthalten - und das ist die mathematische Voraussetzung - so steht man logisch vor der Frage, wie wohl die gemeinsame Gattung dieser beiden (dihäretischen) Mengenarten beschaffen sei. Sie darf die spezifischen Merkmale des "Sich-selbst-Enthaltens" bzw. des "Sich-selbst-nicht-Enthaltens" selber nicht besitzen, denn davon muß bei einem regulären Gattungsbegriff abstrahiert werden. Offensichtlich läßt sich ein solcher Gattungsbegriff dieser beiden Mengenarten und damit der "allgemeinen" Menge nicht bilden. Und das zeigt, daß das Reden von "Mengen" ohne Spezifikation in der Mathematik eine contradictio in adiecto zum Gegenstand hat, die aus den beiden Artbegriffen verschmolzen ist und somit das "Sich-Enthalten" und das "Sich-nicht-Enthalten" zugleich als spezifische Differenzen enthalten muß.

Wer also Urteile über mathematische "Mengen" *tout court* äußert, der wird immer das Wahre über die eine Art und zugleich das Falsche über die andere Art von Mengen behaupten, und das spiegelbildlich zueinander. Mathematisch benevolent wird man die Behauptung als so gemeint interpretieren, daß sie als wahr verstanden werden kann, und man wird über ihre falsche Komponente hinwegsehen. Logisch malitiös aber wird man fragen, von welcher Mengenart tatsächlich die Rede ist. Und je nachdem, worauf sich der Behauptende festlegt, wird man ihm nachweisen können, daß dies von der anderen Mengenart falsch sei.

Die Analyse zeigt also, daß der moderne mathematische Mengenbegriff selbst - ebenso wie der Begriff der Zahl - eine contradictio in terminis darstellt, indem er den euklidisch-alltäglichen Mengenbegriff und den modernen Zahl-Mengenbegriff zu einer dialektischen Einheit verschmilzt, zu dem es keinen allgemeinen Oberbegriff der Menge überhaupt mehr geben kann. Daher gilt das sog. Russellsche Paradox der Menge nicht nur von einer ausgezeichneten "Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten", sondern von allen mathematischen Mengen: Sie enthalten sich alle selbst und und enthalten sich zugleich nicht selbst.

e. Die entscheidbaren Urteile

1. Die klassische Hauptform des Urteils ist das kopulative Urteil (X ist Y). In ihm verknüpft die Kopula "ist" einen Begriff mit seiner nächsthöheren oder weiteren Gattungen, pyramidal also von unten nach oben: "AB ist A" oder "ABD ist A". Seine Wahrheit beruht ersichtlich darauf, daß es "analytisch" nur ausspricht, daß das Gattungsmerkmal materiell im Subjektsbegriff enthalten ist. Es ist daher nur eine andere Ausdrucksgestalt für eine materiale Implikation. Falsche kopulative Urteile sind daher solche, in denen die Kopula als Querverhältnis gelesen wird (z. B. "AB ist AC").

Ein Problem, das den Verfasser immer wieder zu erneutem Bedenken und Überprüfen seiner Theorie gezwungen hat, besteht in der traditionellen Meinung, kopulative Urteile könnten auch "synthetisch im kantischen Sinne" einem Subjektsbegriff ein nicht in seinen Gattungen enthaltenes Merkmal als Prädikat zulegen, z. B. "AB ist X". Das würde nämlich bedeuten, daß die Kopula gerade nicht mehr nur nach oben zu einem höheren Begriff hin verknüpft, sondern auch in horizontaler Richtung. Dadurch wäre natürlich die Querverknüpfung als Falschheitskriterium untauglich. Bei Überprüfung entsprechender Beispiele hat sich jedoch in allen Fällen gezeigt, daß solche vermeintlich synthetischen kopulativen Urteile darauf beruhen, daß der Subjektsbegriff nicht klar definiert war.

Gelegentlich wird die Kopula auch in Urteilen verwendet, in denen die spezifische Differenz eines Subjektbegriffs im Prädikat steht, also "AB ist B", was man ebenfalls ein "analytisches Urteil" nennen müßte. Solche Urteile sind aber ersichtlich genau das, was man "Tautologie" nennt, denn die spezifische Differenz ist in aller Regel zugleich der logische Grund für die Benennung eines Begriffs und damit des bezüglichen Subjektsbegriffs (während die Gattungsmerkmale gerade nicht in der Begriffsbezeichnung zum Ausdruck gebracht werden). Tautologien - die Wittgenstein bekanntlich für das Wesen des Logischen schlechthin hielt - haben wir aber grundsätzlich aus der Logik ausgeschlossen, weil sie auf dem Mißbrauch eines Junktors beruhen, der in solchen Fällen nichts Unterschiedenes verknüpft. Als Implikationsurteil formuliert sind Tautologien ipsoflexive (sich selbst enthaltende) Urteile, die zwar in allen Reflexionsphilosophien und in der (rekursiven) Mathematik eine große Rolle spielen, in der auf Widerspruchslosigkeit ausgerichteten Logik aber nur zu Widersprüchen führen (vgl. darüber auch das im Kapitel über die Implikationsjunktoren Gesagte).

Bei und seit Aristoteles werden auch quantifizierte Urteile mit der Kopula gebildet. Hier sieht es so aus, als würde ein Subjektsbegriff durch die Kopula mit einem seiner Unterbegriffe verknüpft, also in Gegenrichtung zur von uns als "wahr" ausgezeichneten Verknüpfungsweise und damit identisch mit dem speziellen aristotelischen "Zukommen" (das von oben nach unten verknüpft). Man sagt etwa: "einige A sind AB" (einige Lebewesen sind Tiere). Der Eindruck entsteht und entstand schon bei Aristoteles dadurch, daß man in diesen Fällen "A" (Lebewesen) für den Subjektsbegriff hält. Das ist aber, wie wir bei Behandlung der Extensionspyramide gezeigt haben und bei Behandlung der Syllogismen noch weiter im Auge behalten werden, keineswegs der Fall. Vielmehr bedeutet die partikuläre und individualisierende Quantifikation eines Begriffs den Übergang zu einer seiner Arten oder Unterarten (bzw. Individuen), die gerade nicht genau genug bezeichnet wird und deswegen definitionsbedürftig ist. Der eigentliche Subjektsbegriff in quantifizierten Urteilen ist daher immer einer der Unterbegriffe des durch den Subjektsterm bezeichneten Ausgangsbegriffs. "Einige A" (einige Lebewesen) bedeutet daher logisch: eine von zwei (oder ggf. mehreren) Arten von Lebewesen.

Von solchen durch die Quantifikation unbestimmt bezeichneten Begriffen wäre es wiederum nur tautologisch, mittels der Kopula ihre Gattung anzugeben (etwa: "einige Lebewesen sind Lebewesen"). Vielmehr wird in den sog. partikulären "Urteilen" gerade die spezifische Differenz des eigentlichen Subjektbegriffs prädiziert ("einige Lebewesen sind Tiere"). Wird in diesen Fällen aber die Kopula als Junktor benutzt, so muß davon gelten, was wir oben über die Selbstimplikation sagten. Das ist der Grund, warum wir schon im vorigen die partikulären Urteile nicht als kopulative Urteile, sondern als Äquivalenzen behandelt und eingeordnet haben. Deshalb plädieren wir auch dafür, partikuläre Urteile, in denen ja der Subjektsbegriff extensional unterbestimmt und deshalb intensional definitionsbedürftig ist, als Äquivalenzen und somit als Definitionen zu formulieren: "Einige Lebewesen, d. h. die Tiere".

Erkennt man die partikulären vermeintlichen Urteile als Äquivalenzen, durch die nur vage bezeichnete Begriffe definiert werden, so erledigt sich auch das perenne Problem der Bestimmung ihrer Wahrheitswerte. Sie können als Definitionsausdrücke keine Wahrheitswerte besitzen. Daß man sie gewöhnlich zusammen mit ihren Negationen für wahr hält ("einige Lebewesen sind Tiere"/"einige Lebewesen sind nicht Tiere"(nämlich Planzen)), aber sie umgekehrt genau so gut für falsch halten könnte, zeigt hier keine Dialektik an, sondern ist nur die Folge ihres Definitionscharakters.

2. *Existenzurteile* ("Es gibt X") behaupten in inhaltlicher Form die tatsächliche Existenz des durch den Begriff X Gemeinten. Da man die wirkliche Existenz ontologisch mit dem "Sein" zu identifizieren gewöhnt ist, die Kopula "ist" ebenso gewöhnlich auf das "Sein" und die Wirklichkeit bezogen wird, findet sich in der Logik häufig auch die Satzform "X ist" bzw. "Es ist X". Im angelsächsischen Sprachbereich wird der Existenzjunktor direkt mit "there is..." bezeichnet. Daher wundert sich der englische oder amerikanische Logiker über den deutschen "mythologischen" Sprachgebrauch und unterstellt im deutschen "Es gibt" so etwas wie eine fossile Zauberformel für eine gewährende Gottheit, der man die existierenden Dinge verdanke. Aber mit dem gleichen Recht wird man die Angelsachsen fragen, wo der Ort sei, der mit dem "there" gemeint sein könnte.

Nun mag eine Synonymisierung des "es gibt" und der Kopula "ist" für den inhaltlichen Sprachgebrauch gewöhnlich unverfänglich und unschädlich sein. Daß sie falsch sein muß, zeigt sich spätestens bei ihren Negationen. Daß "Tiere nicht Pflanzen sind" leuchtet unmittelbar als wahr ein. Aber "Es gibt keine Tiere" ("Tiere gibt es nicht") wäre offensichtlich eine falsche Behauptung. Somit können die Junktoren nicht dieselbe Bedeutung haben.

Wir haben sie im Abschnitt über die Junktoren daher auch genau unterschieden und ihre verschiedenen Verknüpfungsweisen gezeigt. Die Kopula verknüpft eine untere mit einer allgemeineren oberen Begriffsposition, während der Existenzjunktor im Querverhältnis verknüpft, und zwar dasjenige, was sonst durch die Negation (in der Weise des Nebeneinanderstellens) verknüpft wird. *Damit ist der Existenzjunktor die logische Form, überhaupt einen Begriff einzuführen, d. h. zum Thema der Behandlung zu machen, indem generische und spezifische Merkmale vereint werden.* Mit der vorn eingeführten Bezeichnung "Produktjunktor" sollte diese Eigenschaft genauer benannt werden. Sie entspricht ja auch der arithmetischen Produktbildung durch Zahlgrößenverschmelzung. Die Kopula dient dann erst dazu, einen gegebenenfalls so eingeführten Begriff mit seinen Oberbegriffen zu verbinden.

Man könnte im Zweifel sein, ob diese Produktion eines Begriffs nicht dasjenige sei, was durch eine Definition geleistet wird. Ersichtlich neigen die meisten Logiker zu dieser Annahme. Die übliche Notationsformel zur Einführung von Begriffen "Es gibt ein X, und von allen X gilt (Def.): X = YZ" scheint das zu bestätigen. Genau besehen sind darin aber die Existenzbehauptung ("Es gibt ein X") und die Definition ("Für alle X gilt: X = YZ) nur vereinigt, und zwar in der Form einer Adjunktion einer Existenzbehauptung und einer definierenden Äquivalenz (die keine Behauptung ist!). Die oftmals gewählte Notationsweise "X, für alle X = YZ" dissimuliert nur den Sachverhalt, bringt aber den Unterschied der Existenzbehauptung von X und seiner Definition nicht zum Verschwinden.

Mit der Existenzbehauptung kann auch ein negativer Begriffs eingeführt werden, z. B. "Es gibt Nicht-Raucher". Davon wird man immer dort Gebrauch machen, wo kein positiver Terminus zur Verfügung steht. Steht er zur Verfügung, so wird man ihn sogleich hinzufügen: "Es gibt Nicht-Tiere, nämlich Pflanzen".

Da der Existenzjunktor "wahr" nur im Querverhältnis jungiert, liefert seine Anwendung auf vertikale Begriffspositionen falsche Existenzurteile. Z. B. "Es gibt Tier-Lebewesen" oder "Es gibt Lebewesen-Tiere". Solche (inhaltlichen) Sätze erscheinen schon sprachlich als Tautologien, und sie sind es auch logisch, da dadurch nur die Identität generischer Merkmale im Gattungs-Art-Verhältnis benannt wird. In der logischen Praxis kommen sie kaum vor.

Auch widersprüchliche Begriffe werden durch Existenzbehauptung eingeführt. Dies umso eher, als man sie meistens nicht (oder nicht ohne weiteres) als kontradiktorische Begriffe (oder Dispositionsbegriffe) erkennt. Ihre Widersprüchlichkeit zeigt sich logisch an der Unentscheidbarkeit von Existenzurteilen über widersprüchliche Begriffe. D. h. daß sie sowohl positiv als auch negierend behauptet werden können.

Wie schon an der klassischen Urteilstafel sichtbar wird, kommt der Existenzjunktor unter den klassisch-aristotelischen Junktoren nicht vor. Er muß jedoch, wie die Pyramide der Junktoren zeigt, aus systematischen Gründen gefordert und definiert werden. Offensichtlich haben ihn die Stoiker in die Logik eingeführt. In der von den Stoikern entwickelten Redeweise "Es ist...", (z. B. "Es ist Tag") auf den wohl auch das englische "There is..." zurückgeht, wird dadurch ein aktueller Bezug zwischen einem empirischen Begriff (einer Situationsbeschreibung", z. B. "Tag"), und einer aktuellen Situation ("Jetzt ist es Tag", dem "Tygchanon") ausgedrückt. (Darüber s. weiter unten).

Beachtet man den kontextuellen Realitätsbezug, auf den die Stoiker bei ihren empirischen Urteilen den höchsten Wert legten, weil er zugleich die "semantische" Wahrheit des Existenzurteils verbürgt, so erkennt man auch, daß der Existenzjunktor zugleich die sprachliche Form der Partizipialbildung bei der Umwandlung von Verben in logische Urteile regiert, keinesfalls aber die Kopula (wie gewöhnlich angenommen wird). Die zahlreichen Beispiel der Stoiker wie "Sokrates geht umher", "dieser Mensch stirbt" werden gewöhnlich - und auch in Übersetzungen - mit der Kopula formalisiert: "Sokrates ist ein Laufender", "Dieser Mensch ist ein Sterbender". Offensichtlich handelt es sich dann um (kantische) Erweiterungsurteile, denn das Prädikat ist sicher kein generisches Merkmal (das durch die Kopula mit dem Individuum verknüpft wird). Es wird vielmehr dem durch den Eigennamen ausgedrückten "Begriff" als spezifische Differenz zugesprochen.

Es scheint, daß diese Formulierungsweise von Urteilen mit "akzidentellen" Prädikaten mittels der Kopula in der ganzen Geschichte der Logik verhängnisvoll geworden ist und bis heute zu Verwirrungen beiträgt. Dazu hat wohl auch wesentlich beigetragen, daß bei Verwendung von Eigennamen in der Logik der Situationsbezug schon durch die Verwendung des Eigennamens gesichert erscheint, so daß sprachlich der Existenzjunktor unterdrückt werden kann.

3. *Die implikativen Urteile* verknüpfen, wie vorn gezeigt wurde, in den drei möglichen Richtungen Begriffspositionen von Arten zu Gattungen, von Gattungen zu Arten, und von Arten zu anderen Arten. In der üblichen Notation ganzer Begriffe können sie hinsichtlich dieser einzelnen Verknüpfungsrichtungen nicht unterschieden werden. Notieren wir aber durch Großbuchstaben die Intensionen der beteiligten Begriffe, so werden auch ihre Wahrheits- und Falschheitswerte in den verschiedenen Richtungen sichtbar.

Materiale Implikationsurteile (wir nennen sie so, weil das Intensionsmaterial der Gattung in den Arten "material" identisch enthalten ist!) verknüpfen von unten nach oben und sind grundsätzlich mit kopulativen Urteilen identisch. "Wenn AB dann A" (z. B. "wenn Tiere dann Lebewesen" = "Tiere sind Lebewesen") ist ein wahres Urteil. Dagegen ist "Wenn A dann AB" ein falsches materiales Implikationsurteil, zugleich aber ein *wahres formales Implikationsurteil* und identisch mit einem speziellen aristotelischen Urteil, das mit "Zukommen" formuliert ist (z. B. "wenn Lebewesen, dann Tiere" bzw. "Das Lebewesen-sein kommt dem Tiersein zu", oder als "Inklusion": "Lebewesensein inkludiert Tiersein"). Letzteres wird falsch, wenn es als materiales Implikationsurteil bzw. als kopulatives Urteil formuliert wird. Die *korrelativen Implikationsurteile* sind als Querverknüpfungen von Arten wahre Urteile: "wenn AB dann AC" (z. B. "wenn Tiere, dann Pflanzen") oder umgekehrt: "wenn AC dann AB". Sie liefern zugleich Falschheitswerte, wenn sie als materiale oder formale Implikationsurteile (also auf vertikale Verknüpfungen bezogen) formuliert werden.

Die korrelativen Implikationsurteile sind der logisch interessante Fall, da sie eben weder mit den kopulativen noch mit den "Zukommens-"Urteilen identisch sind und somit eine für alle Anwendungen der Logik auf Beispiele unentbehrliche eigene Urteilsklasse bilden. Ihre logische Bedingung ist, daß sie nur solche Begriffspositionen verknüpfen, die zugleich auch durch Negationen unterschieden werden können (was ersichtlich bei den beiden anderen Implikationsformen nicht möglich ist). In der empirischen Forschung stellt man mit ihrer Hilfe Korrelationsreihen von Befunden nebeneinander: "Immer wenn das eine, dann auch das andere". Es ist aber eine nicht logisch, sondern nur empirisch zu entscheidende Frage, ob solche Korrelationen zugleich Kausalverhältnisse abbilden. Ist dies der Fall, so ist ausschließlich die Korrelationsimplikation die logische Form der Kausalurteile (Gattungen können nicht Ursachen von Arten, und Arten nicht Ursachen von Gattungen sein, wohl aber und nur eine Art von Gegebenheiten Ursache einer anderen Art von Gegebenheiten).

Betonen wir nochmals, daß jede der von uns unterschiedenen Implikationsformen neben dem wahren auch Falschheitswerte hat. Dies ist die begriffslogische Grundlage auch der stoischen und modernen aussagenlogischen Definition des Falschheitswertes der Implikation. Bekanntlich war die Bestimmung der Wahrheitswerte der Implikation schon bei den megarischen und stoischen Logikern eine Preisfrage, von der Kallimachos aus Alexandria im 2. Jahrhundert v. Chr. sagen konnte: "Es krächzen selbst die Raben auf den Dächern, welche Implikationen richtig sind".

Die von Philon aus Megara vorgeschlagene und seither festgehaltene aussagenlogische Definition besagt, daß die Implikation eines Folgeurteils in einem vorausgehenden Urteil nur dann falsch sei, wenn das vorausgehende ("erste") Urteil wahr und das ("zweite") Folgeurteil falsch sei, ansonsten sei sie wahr. Warum dies so sei, gilt bis heute als ungelöstes "Implikationsproblem", und es wird wohl auf der Grundlage der aussagenlogischen Meta-Wahrheitswerttheorie nicht lösbar sein. Nach unserem begriffslogischen Ansatz werden alle Meta-Erklärungsversuche zu Paradoxien führen, weil sie den metalogischen Wahrheits- und Falschheitsbegriff selber in ein Widerspruchsverhältnis zu den Wahrheitswerten der "Elementarsätze" bringen.

Zerlegt man aber die allgemeine Implikation, die keinen Falschheitswert besitzt, in ihre drei speziellen Formen mit jeweiligen Falschheitswerten, so dürfte sich die Implikationsproblematik ein für allemal lösen.

Viele Logiker halten die *Selbstimplikation (ipsoflexive Implikation)* "wenn X dann X" für eine wahrheitswertfähige Behauptungsform, und entsprechend auch die Negationsform "wenn X dann nicht X". In der Regel findet man die Behauptung, ersteres sei überhaupt ein immer und unter allen Umständen wahres Urteil, und letzteres ebenso selbstverständlich ein "falsches", nämlich ein widersprüchliches Urteil. Hier darf man es aber schon den Stoikern zur Ehre anrechnen, daß sie diese selbstimplikativen Urteile (ihr Beispiel lautet: "wenn es Tag ist, ist es Tag") überhaupt nicht für Urteile gehalten haben, und wenn (bei einigen Vertretern) doch, dann für falsche. Und das haben wir auch vorne bei Behandlung der Junktoren schon gutgeheißen, insofern Junktoren überhaupt nur dann "Junktoren" sein können, wenn sie etwas Unterschiedenes miteinander verknüpfen.

Wird die Selbstimplikation in der Logik als behauptende Urteilsform zugelassen, so muß sie eine Quelle von Widersprüchen in der Logik und in ihren Anwendungen werden. Dies läßt sich in den meisten Reflexionsphilosophien, die diese Denkform anwenden, ohne weiteres konstatieren. Gewissermaßen eine Probe aufs Exempel ist die für falsch gehaltene Negationsform solcher vorgeblichen Urteile. Ersichtlich muß ja die Form "Wenn X dann Nicht-X" ("Nicht" hier groß geschrieben und auf die Nebenart von X, also einen negativen Begriff verweisend), als wahres korrelatives Implikationsurteil gelten. Und dann kann "wenn X dann X" nur für falsch gelten. Wir plädieren aber dafür, die Selbstimplikation überhaupt aus der Logik auszuschließen.

4. *Äquivalenzen* müssen in der Logik eine Sonderstellung einnehmen. Sie werden von vielen Logikern als behauptende Urteile angesehen. Insbesondere gelten sie in der Mathematik in der Gestalt der *Gleichung* als paradigmatische Urteilsform. Auf der Suche nach einem logischen Pendant zur mathematischen Gleichungsform hat man sich in der neueren Logik darauf eingelassen, sie als spezielle Implikationsform anzusehen. Man umschreibt sie als "doppelte bzw. gegenseitige Implikation", formal "... dann und nur dann, wenn" oder "genau dann wenn" ("gdw."). Logisch möchten wir die Bezeichnung "das heißt" als Standardbezeichnung für die Äquivalenz vorschlagen.

Ersichtlich entspringt schon die logische Einordnung der Äquivalenz als Implikationsform der Verlegenheit, sie überhaupt als Urteil aufzufassen. Die Bezeichnung "doppelte Implikation" muß als sehr unglücklich angesehen werden, denn sie ist irreführend. Wie bei den Implikationsformen vorn und auch oben gezeigt wurde, können sich wohlunterschiedene Begriffe überhaupt nicht gegenseitig "implizieren". Was also mit der doppelten Implikation gemeint ist, muß sich daher auf einen einzelnen Begriff bzw. auf eine einzelne Begriffsposition beziehen. Es wurde aber schon gezeigt, daß jeder Begriff "materiell" die generischen Merkmale seiner Gattung und "formal" in seinen Extensionen seine zugehörigen Unterbegriffe impliziert. Damit bleibt für das "korrelative Verhältnis" nur übrig, daß ein und derselbe Begriff zwei verschiedene Termini (sprachliche Bezeichnungen) "impliziert", die in gleicher Weise - "äquivalent" - auf ihn zutreffen. Die Klarlegung dieser Verhältnisse ist aber das Wesen der Definition bzw. der mathematischen Gleichung. Deswegen haben wir die Äquivalenzen vorn bei den Definitionen aufgeführt.

Äquivalenzen bzw. Definitionen werden in der Logik dann gebraucht, wenn ein Begriff bzw. eine Begriffsposition nur unvollständig angedeutet wird und damit eine genauere Determination seiner Intensions- und Extensionsverhältnisse erfordert, um logisch handhabbar zu sein. *Es ist der Fall einer logischen Unklarheit oder Dunkelheit.* Er liegt vor allem bei den Partikularisierungen und Individualisierungen vor. Kennzeichnet man eine Artposition nur durch die Extensionsangabe einer Gattung "einige A", so bleibt dunkel, um welche von zweien oder mehreren es sich handelt. Um sie klarzustellen, muß man die Intensionen oder evtl. den Terminus angeben. Genau das geschieht durch die Definition bzw. die Äquivalenz: "Einige A, d. h. AB", z. B. "einige Lebewesen, d. h. (die) Tiere". In Wörterbüchern wird dagegen gewöhnlich von den Termini ausgegangen: "Hunde, d. h. (einige) warmblütige, vierbeinige, bellende, usw. Tiere". Die Beispiele zeigen unmittelbar, daß solche Äquivalenzen keine behauptenden Urteile sein können. Deswegen haben wir die Definitionen bzw. Äquivalenzen aus den echten Urteilen ausgeschlossen.

Daneben dienen die Äquivalenzen logisch zum Übergang vom inhaltlichen Beispiel zur logischen Formalisierung und umgekehrt: "Tier d h. AB" bzw. "AB d .h. Tier" u. ä.

In der Aussagenlogik werden Äquivalenzen zwischen einfachen und komplexen Aussageformen behauptet, z. B. zwischen der Implikation und der verneinten Alternative. Diese sollen sich aus den identischen Werteverläufen der jeweiligen Wahrheitswerte in den Wahrheitswertmatrizen ergeben. Sie sind jedoch mit größter Vorsicht zu handhaben, da es sich um gelegentlich sehr irreführende Konventionen handelt. Man kann bezweifeln, daß die Negation einer Alternative deren Wahrheitswerteverlauf einfach umdreht. Und darüber hinaus kann man mit guten Gründen zeigen, daß die Negation einer Alternative keine Alternative sein kann.

Naturgemäß lassen sich Definitionen auch mit negativen Begriffen bilden, wie vorn gezeigt wurde, z. B: "Einige Lebewesen, d. h. Nicht-Tiere (nämlich Pflanzen)". Aristoteles hat sie bei den Syllogismen in den dabei vorkommenden partikulären "Urteilen" oft verwendet. Aber die Äquivalenzjunktoren lassen sich auch selbst negieren. Das ist in Wörterbuchdefinitionen bei homonymen Termini angebracht: "Füchse, d. h. nicht (zu verwechseln mit) Füchse(n) der korporierten Studenten". Ansonsten ist es unfruchtbar, von einem Definiendum anzugeben, was es alles nicht bedeuten soll. Wohl aber spielen die *negierten Äquivalenzen als Ungleichungen* in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Und da die mathematischen Gleichungen oft mit kopulativen Urteilen verwechselt werden, gilt das auch von den negierten Äquivalenzen: Die mathematischen Ungleichungen gelten vielfach als negative kopulative Urteile.

Es ist eine Besonderheit der mathematischen Funktionenlehre, Äquivalenz und Nichtäquivalenz, d. h. Gleichung und Ungleichung in einen Ausdruck zu vereinen. Der Junktor wird gewöhnlich als "größer/gleich/kleiner" (>/=/<) oder auch $\cong$ notiert. Dies entspricht einer dialektischen Denkform. Ihre Übertragung in die Logik führt zur Definitionsform der wittgensteinschen "Familienähnlichkeit" der Begriffe in sog. Sprachspielen, über die wir vorne schon gehandelt haben. Ersichtlich bezieht sich die Äquivalenz dabei auf die identischen Intensionen, die Nichtäquivalenz auf die Verschiedenheit von Intensionen von Termini, die für reguläre Begriffe, aber zugleich auch für Metaphern und Homonyme stehen. Beispiel ist der Wittgensteinsche Spielbegriff selber: "Spiele, d. h. gleicherweise alle Arten von eigentlichen Spielen als auch zugleich alle Arten von Spielräumen, Spielformen, Spielsachen usw." Bezeichnet man die eigentlichen Spiele mit X, die "Spielformen" im übertragenen Sinne mit 'X', so läßt sich die Ähnlichkeitsdefinition genauer mit "X $\cong$ alle X und alle 'X' " darstellen.

Diese Definitionsart familienähnlicher Begriffe steht in der großen Tradition des Analogiedenkens, mithin der thomistischen Auslegung des Verhältnisses des Seinsbegriffs zu den aristotelischen Kategorien. "Sein" soll gemeinsame Gattung der Kategorienarten sein und müßte folglich als generisches Merkmal identisch in diesen enthalten sein. Zugleich aber sollen alle Kategorien das "Sein" in unterschiedlicher Weise enthalten, was bedeutet, daß es kein gemeinsames generisches Merkmal in ihnen gibt. Daß auch die analogische Denkweise und das sich ausbreitende Denken in wittgensteinschen Familienähnlichkeiten ein Quellpunkt von Widersprüchen in der Logik und darüber hinaus in den Wissenschaften sein muß, liegt auf der Hand.

5. *Die stoische Urteilslehre*. Neben der bisher vor allem behandelten aristotelischen und seither klassischen Urteilslehre muß noch genauer auf die stoische Urteilslehre eingegangen werden. Sie unterscheidet sich erheblich von der aristotelischen und ist mehr als jene grundlegend für die neueren logischen Urteilslehren, insbesondere der sogenannten Aussagenlogik geworden. Allerdings ist hier die

Quellenlage recht dürftig. Es gibt nur Fragmente der Schriften der Stoiker selber, daneben Berichte aus zweiter Hand wie die Hinweise bei Galen und Diogenes Laertios oder kritische Stellungnahmen etwa bei Sextus Empirikos. Entsprechend groß ist der Spielraum für Interpretationen, den sich natürlich auch moderne Logiker zunutze gemacht haben. Während die ältere Philosophiegeschichtsschreibung etwa bei Eduard Zeller der stoischen Logik jegliche Bedeutung abspricht, hat die moderne mathematische Logik bei ihnen geradezu die Grundlegung und Vorausnahme vieler modernen Einsichten sehen wollen (vgl. dazu Benson Mates, Stoic Logic, Berkeley-Los Angeles-London 1953, 2. Aufl. 1973).

Da man die aristotelische Urteilslehre auch bei ihnen zum Maßstab nimmt, setzt man voraus, die Stoiker hätten die Urteile ebenfalls strikt von den Begriffen abgetrennt und sie ihrerseits wieder als Bestandteile von Schlüssen behandelt. Überdies rechnet man es ihnen als besonderes Verdienst zu, die Wahrheitswerte von Urteilen durchweg in Abhängigkeit von den Junktoren definiert zu haben, wie es die moderne Aussagenlogik dann ebenfalls betrieben hat. Diese Sicht der Dinge dürfte jedoch mehr als fragwürdig sein, und sie hat nach unserem Dafürhalten zu Fehlinterpretationen, einer maßlosen Überschätzung ihrer Leistungen und nicht zuletzt wegen der Berufung der neueren Logik auf diese vermeintlichen Leistungen zu mehr Schaden als Nutzen für die moderne Logik geführt.

In der Tat haben die Stoiker kaum eine besondere Begriffslehre entwickelt. Aus dem wenigen, was sie über die höchsten Begriffe - die Kategorien - sagten (vgl. dazu das Kapitel über die Begriffe), läßt sich entnehmen, daß sie ein eindimensionales Gefälle von der Allgemeinheit zur Besonderheit annahmen und sich immer mehr anreichernde Spezifikationen in den unteren Begriffen voraussetzten. Jedenfalls gab es bei den unteren Begriffen keine "porphyrianische" Verzweigung von Arten und Unterarten der Arten, die sich durch Negationen ausdrücken ließ, wie wir schon vorne zeigten. Das hat auch zur Folge, daß sie die aristotelischen Quantifikationen nicht verwendeten. Überdies kann man daraus entnehmen, daß sie den empirischen Begriffen, die aus der sinnlichen Anschauung eines Gegenstandes (tygchanon) stammen sollten, besonders reichliche Intensionen (Merkmale) zumaßen. Dieser Reichtum an Merkmalen konnte und mußte sprachlich durch einen Terminus, sei es ein Eigenname wie "Sokrates" oder ein Wort wie "Abend" oder "Nacht" evoziert werden können.

Auf Grund ihrer (ontologischen) Voraussetzungen, die wir vorn geschildert haben, hielten sie die Begriffe selbst schon für wahr. Die "rationalen" unanschaulichen bzw. allgemeinen Begriffe hielten sie für wahr, weil sie bei allen Menschen "angeboren" und damit in jedem Bewußtsein immer vorhanden (wenn vielleicht auch nicht immer bewußt) seien. Die "empirischen" konkret-anschaulichen hielten sie für wahr, wenn und insofern sie unmittelbare "Abdrücke" der materiellen Dinge und Situationen in den Sinnesorganen eines jeweils sprechenden Beurteilers im Angesicht der betreffenden Dinge oder der betreffenden Situation seien. Die unmittelbare Situationsbezogenheit eines Urteilenden (die realistisch-semantische Beziehung eines Lekton auf ein gegenwärtiges Tygchanon, das noch heute sogenannte "Zutreffen") wird dadurch ihr ausschlaggebendes Wahrheitskriterium für alle empirischen Urteile, und nur solche kommen in ihren Beispielen vor. Ihre "Urteilslogik" war daher keine Schreibtischlogik, wie die platonische und aristotelische, bei der es wesentlich um die Klärung von Begriffen ging, sondern eine selber konkrete Situationslogik.

Für die wahre Situationsbeschreibung bzw. Beurteilung konnte man die "zutreffenden" Begriffe benutzen: "Es ist Tag", "Sokrates geht umher", "Ich diskutiere". Dabei erscheint es von größter Bedeutung, und das ist von den Logikhistorikern bisher übersehen worden, daß sie die Zuordnung eines empirischen Begriffs bzw. einer dadurch ausgedrückten Situationsbeschreibung zu einer aktuellen Situation (dem tygchanon) meistens durch eine logische Partikel ausdrückten, die unter den aristotelischen Junktoren nicht vorkommt. Es handelt sich um das "Es ist...", wie es immer wieder in ihren Beispielen "Es ist Tag", "Es ist Nacht" vorkommt. Vermutlich ist es die Vorlage für das später allgemein verwendete "es gibt..." (englisch: "there is...") geworden. Der sogenannte Existenzjunktor hat dabei ersichtlich nicht das geringste mit der Kopula "ist" gemein. Im Gebrauch der Stoiker diente er auch nicht zur Einführung von Begriffen, da deren Vorgegebenheit vorausgesetzt wurde. Will man den stoischen Sinn des "es ist..." in moderner Terminologie verdeutlichen, so handelt es sich am ehesten um das, was in der Husserlschen Phänomenologie als "Bedeutungserfüllung" beschrieben worden ist. Der stoische Begriff wird in der Verknüpfung mit dem Existenzjunktor zum wahren Urteil, wenn und solange die durch den Begriff evozierte Situation als Tygchanon tatsächlich gegeben ist.

Für eine wahre Situationsbeschreibung konnte man auch negative Begriffe benutzen. Von solchen mit einer Negation gebildeten Begriffen unterschieden die Stoiker drei Arten. 1. "Absprechende" (*apo* *phatikon*), für die sie das Beispiel "Niemand geht umher" anführten, aber auch einfache negative Sätze wie "es ist nicht Tag". 2. "Verweigernde" bzw. "ableugnende" (*arnetikon*) mit dem Wortbeispiel "menschenunfreundlich". 3. "Mangelanzeigende" (*steretikon*), wofür das Beispiel "lauwarm" (als "nicht-heiß" verstanden) steht. Man erinnere sich, daß sie die Negation nicht - wie Aristoteles - als Abgrenzungsjunktor zwischen Nebenarten kannten! Daher konnte für sie die apophatische Aussage: "Es ist nicht Tag" nicht bedeutungsidentisch mit "es ist Nacht" sein. Und das war wohl der Grund, daß sie 4. von einer "doppelten Negation" (*hyperapophatikon*) sprachen, die sich gleichsam selbst "die Negation abspricht", wie das Beispiel zeigen soll: "Nicht: Es ist nicht Tag" bedeute soviel wie: "Es ist Tag". Man sieht an diesen "Definitionen" negativer Ausdrücke bzw. Urteile, daß in ihnen die Negation nicht zur Umkehrung des Wahrheitswertes führen konnte, wie das in der aristotelischen Logik und auch in der vorgeblich von den Stoikern abstammenden Aussagenlogik grundlegend ist.

Wird nun durch die Situationszuweisung mittels des Existenzjunktors die Wahrheit eines (empirischen) Urteils garantiert, *so wird der fehlende Situationsbezug eines empirischen Urteils für die Stoiker zum Falschheitskriterium.* Wer am Tage sagt: "Es ist nicht Tag" oder "Es ist Nacht", der sagt damit Falsches, sei es, daß er sich irrt oder lügt. Man muß diese "konkreten" Wahrheitswertbedingungen der stoischen Urteilslehre immer im Blick behalten. Sie scheinen den Stoikern so selbstverständlich gewesen zu sein, daß sie darüber kaum redeten. Die spätere Logik, die wesentlich von Aristoteles' "Schreibtischlogik" her inspiriert war, hat diesen Situationsbezug nicht mehr beachtet und tat sich infolgedessen mit dem stoischen Existenzjunktor sehr schwer.

Dabei ist die konkrete Situationsbezogenheit bei den Stoikern auch das weiter ausschlaggebende Kriterium für die Wahrheitswerte der komplexen Urteile, in denen mehrere Begriffe zu Ausdrücken vereinigt sind.

Hier beachteten sie besonders die Konjunktion bzw. Adjunktion (*sympeplegménon*), die vollständige (Alternative, *diezeugménon*) und unvollständige Disjunktion (*paradiezeugménon*), die wie gezeigt wurde, ihrerseits Ausdrücke bilden. Sie werden daher auch bei den Stoikern nicht als Ausdrücke wahrheitswertfähig, sondern nur in Verbindung mit dem Existenzjunktor.

Ein *Adjunktionsausdruck* zur Kennzeichnung einer konkreten Situation (mittels des Existenzjunktors auf die Situation bezogen) ist falsch, wenn auch nur ein durch "und" verknüpftes Glied nicht zutrifft. Dafür beriefen sie sich auf die Sprachgewohnheit, ein Kleid, das auch nur *einen* Riß aufweist, insgesamt ein "zerissenes Kleid" zu nennen. Bei der *Alternative* forderten sie, daß ein Glied zutreffen müsse, das andere nicht zutreffen dürfe, um sie "wahr" zu machen, ansonsten sei sie falsch. Und bei der *unvollständigen Disjunktion* setzten sie fest, daß mindestens ein Glied zutreffen müßte, um sie wahr zu machen, falsch aber sei sie nur, wenn alle Glieder nicht zutreffen.

Am meisten haben die Stoiker sich mit der Implikation (etwa: "Bedingendes" *synemménon*) befaßt, und mit ihnen offenbar weiteste gelehrte Kreise, wie das vorn angeführte Zitat belegt. Ersichtlich ist die Implikation die wichtigste logische Junkturgestalt überhaupt. Auch in der modernen Logik hat sie fast alle anderen, insbesondere aber die kopulative Junktur ersetzt. Und das konnte sie nur deshalb, weil sie (wie gezeigt wurde als "materiale Implikation) mit ihr als Begriffsverknüpfung von Arten zur Gattung identisch ist, daneben aber als formale und korrelierende Implikation auch alle sonstigen Verknüpfungen (von der Gattung zur Art und von der Art zur Nebenart) herstellt.

Halten wir in Erinnerung, daß sich die logische Bedeutung von Junktoren aus dem Sprachgebrauch ergibt, der in die Logik importiert wird, so kann man erwarten, daß sich den Stoikern ihre Probleme mit der Implikation aus der sprachlichen Mehrdeutigkeit des "wenn....dann...." ergeben mußte, die in der Logik zu einer einheitlichen Bedeutung gleichsam zusammengezwungen werden mußte. Diese (mindestens) sechs sprachlichen Bedeutungen sind 1. ein beschränkte zeitliche Gesichtspunkte berücksichtigender Sinn: "Wenn (während) es regnet, wird es naß". 2. ein unbeschränkte zeitliche Gesichtspunkte berücksichtigender Sinn: "Immer wenn es regnet, dann ist es naß". 3. ein eigentlich sog. bedingender Sinn: "wenn (unter der Voraussetzung daß) es regnet, wird es naß (werden)". 4. ein im engeren Sinne kausaler Sinn: "Wenn (weil) es regnet, ist es naß". 5. ein teleologischer Sinn: Wenn (um dessentwillen weil) es naß ist, hat es geregnet.". Und vielleicht nicht zuletzt ein 6. ("irrealer") Vermutungssinn: "wenn (falls) es regnen würde, würde es naß werden". In griechisch-stoischer Terminologie werden alle diese Bedeutungen durch "ei to..., to..." abgedeckt.

Die Richtung zur Vereinheitlichung aller dieser Bedeutungen der Implikation mußte dabei nach ihrer ontologischen Voraussetzung des Universaldeterminismus dahin weisen, daß mit der Implikation grundsätzlich Kausalzusammenhänge (d. h. im engeren Sinne kausale als auch teleologische) ausgedrückt werden. Nicht aus der Betrachtung auszuschließen ist ihre weitere Voraussetzung der "Wieder kehr aller Dinge" in zeitlichen Zyklen (apokatastasis panton). Letzteres dürfte es ausschließen, auf ihre Berücksichtigung zeitlicher Gesichtspunkte eine heute übliche (physikalische) eindimensionale Zeitskala anzuwenden, die jedes "historische Ereignis" als einmalig und unwiederholbar ansieht. In Verbindung mit der Kausalitätsvoraussetzung führt die zyklische Zeitauffassung erst dazu, implikative Prognosen (auf Zukünftiges als sich immer Wiederholendes) logisch zu sichern.

Diese in aller Regel unausgesprochenen Voraussetzungen sind mit der Situationsgebundenheit des Urteilens und Sätzeäußerns, die sich in allen Beispielen der Stoiker zeigt, zu verbinden. Nur so erscheint die Definition der "wahren Implikation" des Diodoros Kronos, die die Stoiker immer wieder diskutierten, verständlich. Sie lautet bekanntlich: "Ein implikativer Satz ist wahr, wenn er mit Wahrem beginnend in Falschem weder enden konnte noch kann". Mit anderen Worten: Das Vorderglied muß ebenso wie das Hinterglied jeweils auf eine tatsächliche Situation "zutreffen", um den implikativen Satz wahr zu machen. Und dies ist auch nur die Konsequenz von Diodors Definition des "möglichen Urteils" überhaupt, das entweder jetzt wahr ist oder in Zukunft wahr sein muß.

Man sollte daraus auch entnehmen, daß Diodor wohl alle anderen implikativen Sätze für falsch hielt, keineswegs aber unterstellen (wie es gewöhnlich der Fall ist), daß er damit der philonischen Falschheitsdefinition der Implikation zugestimmt hätte (sonst hätte er es wohl seinem Schüler Philon zuliebe auch explizit getan). Man kann vermuten, daß Diodor eine "Implikation" mit einem oder zwei falschen Bestandteilen überhaupt nicht als Implikation anerkannt hätte (ebenso, wie man sagen kann, ein alternatives Urteil, bei der nicht der eine Teil wahr, der andere falsch ist, ist überhaupt keine Alternative). Und wenn das der Fall wäre, würde er damit die von uns beschriebene allgemeine Implikation, die keine Falschheitsbedingung hat, definiert haben.

Bewährt sich die diodorische Definition der Implikation bei Kausal- und teleologischen Urteilen des Typs "Wenn Ursache, dann Wirkung" bzw. "Wenn Wirkung, dann Ursache", so hat sie doch eine fatale Folge. Mag ein Stoiker noch davon ausgegangen sein, daß in der Wirklichkeit alles mit allem kausal (bzw. teleologisch) zusammenhängt und damit beliebige wahre Gliedsätze in der Implikation zusammengefügt werden können, so ist die in der modernen Aussagenlogik daraus übernommene Praxis, jede Implikation, die irgendwelche aus welchen Gründen auch immer für wahr gehaltenen Elementarsätze verknüpft, für wahr zu halten, geradezu grotesk zu nennen (z. B. "Wenn Gras grün ist, dann ist 8 eine gerade Zahl"). Aristoteles hatte für seine implikativen Urteile (und entsprechend die Schlüsse) noch wenigstens die Restriktion eingebaut, daß dabei von einem einheitlichen thematischen Gegenstand (wie beim "Mittelbegriff in den Syllogismen) die Rede sein müsse (z. B. "Wenn gerade Zahlen durch 2 teilbar sind, dann ist 8 eine gerade Zahl"). Läßt man dies außer acht, wie es in der modernen Logik generell der Fall ist, so impliziert natürlich jede Wahrheit jede andere, und alle Wahrheiten sind letztlich dieselbe Wahrheit (wie Frege behauptete).

Das ist bei der Definition des Philon von Megara, die die Stoiker und die moderne Logik als kanonisch übernommen haben, ganz anders. Sie lautete demgegenüber: "Der implikative Satz ist nur falsch, wenn das erste Glied wahr und das zweite Glied falsch ist". Und das heißt insbesondere, daß alle anderen Konstellation in der Implikation diese wahr machen. Offensichtlich war Philon daran interessiert, das ausufernde falsche Folgern und Prognostizieren zu bekämpfen und dafür ein Kriterium zu erstellen. Darin war er gewiß erfolgreich, und deshalb hat die logische Nachwelt sein Kriterium kanonisch gemacht. Es klingt so common-sensisch, weil doch jedermann leicht versteht, daß eine Folgerung falsch sein muß, wenn sie zu einem falschen Resultat führt, so wie man Rechnungen eben falsch nennt, wenn das Resultat nicht stimmt.

Das Kriterium ist nur nicht hilfreich, wenn man das Resultat, z. B. die prognostizierte Situation, erst einmal abwarten muß und erst dann entscheiden kann, ob die Implikation falsch war. Denn ehe das geschieht, wird man auch über die Falschheit der Implikation nichts ausmachen können. Daß die Stoiker darin ein Problem sahen, sieht man an dem Diskussionsbeispiel: Wenn man am Tage sagt: "Wenn es Tag ist, ist es Nacht", dann muß man das gemäß Philon für eine falsche Implikation halten. Sagt man es aber bei Nacht, dann muß es als eine wahre Implikation gelten. Das Problem ist sicher bis heute nicht gelöst, vielmehr als logische Konvention einfach festgeschrieben worden. Das Kriterium wird aber zu einer Zumutung, wenn nun falsche Folgerungen aus falschen Voraussetzungen gemäß dieser Definition ebenfalls als wahre Implikationen angesehen werden müssen.

Nun dürfte diese merkwürdige Implikation ("aus Falschem Falsches schließen ist eine wahre Folgerung") schon deshalb bedenkenswert sein, weil man ja vermuten kann, daß Falschheiten in der Logik ebenso durch Junktoren verknüpfbar sein müßten, wie Wahrheiten. Und die Praxis konsequenten Lügens, für welche bei den Griechen die Kreter, bei den Römern aber die Griechen insgesamt berüchtigt waren, scheint dies sehr plausibel zu machen. Unterstellt man mit Platon gar, daß Dichtwerke konsequente Lügen seien, so muß diese "wahre Implikation von Falschem im Falschen" geradezu der logische Junktor par excellence für die schöne Literatur abgeben. Aber das dürften wohl nicht die Gründe dafür sein, daß Philon aus Megara und mit ihm die Stoiker diese "wahre" Implikation (der Folgerung des Falschen aus Falschem) überhaupt diskutiert und schließlich kanonisiert haben.

Der eigentliche Grund scheint vielmehr der gewesen zu sein, daß sie die sprachlichen konjunktivischen Irrealsätze mit unter die implikative Behauptungsform genommen haben, wie es dann ganz allgemein in der Logik geschah. Das Paradebeispiel des Philon "Wenn die Erde fliegt, hat die Erde Flügel" zeigt es deutlich genug. Denn in artikulierter Umgangssprache würde man dergleichen niemals behaupten, sondern vorsichtig vermutend sagen: "Falls die Erde fliegen würde, dann müßte die Erde Flügel haben". Und das kann man nur vermuten, weil man nicht einmal wissen kann, ob es so wäre, und weil man (nach damaligem Wissensstand) weiß, daß die Erde nicht fliegt und daß sie auch keine Flügel hat.

Unter heutigen Umständen müßte man einem verliebten Burschen, der da singt: "Wenn ich ein Vöglein wär' und auch zwei Flügel hätt', flög' ich zu dir" logisch klar machen, daß er logisch zu "behaupten" hätte: "Wenn ich ein Vogel bin und zwei Flügel habe, dann fliege ich zu dir". Und darauf könnte sein Liebchen nur konsterniert feststellen, daß darin ein Versprechen liegt und auch nicht. Denn wenn der zweite Satzteil wahr wäre, müßte sie die Implikation ebenso für wahr halten wie in dem Falle, daß der zweite Satzteil falsch ist. Und von da ist es dann nicht weit bis zur logischen Interpretation der Nagelschen Fragestellung "Wie es ist, eine Fledermaus zu sein". (Vgl. Thomas Nagel, Wie es ist, eine Fledermaus zu sein?, in: M. Frank, Hg., Analytische Theorien des Selbstbewußtseins, Frankfurt a. M. 1994, S. 135-154).

Man erkennt an den Beispielen leicht die Gewaltsamkeit, mit der die Stoiker erst einmal Vermutungssätze in falsche Sätze über die Wirklichkeit umdeuteten bzw. übersetzten. Von da aus machten sie mit Philon den zweiten Schritt, falsche Sätze über die Wirklichkeit in wahre Sätze über "mögliche" Verhältnisse, die eben nicht wirklich sind, umzudeuten. Und darin ist ihnen die moderne Logik wiederum gefolgt. Dies erklärt erst, warum die Implikation mit zwei falschen Gliedern (falsch hinsichtlich der wirklichen Welt) als wahr gelten sollte: Sie ist eine "rein logische" Implikation mit zwei wahren Gliedsätzen über die "mögliche Welt" - und erscheint deshalb *in Analogie* zur Implikation über die wirkliche Welt als wahr. Ohne die Voraussetzung der "Möglichkeit" - über die sich Philon ja offensichtlich mit Diodor stritt - in der sich die Wahrheiten und die Falschheiten gerade spiegelbildlich verkehrt zu den Wahrheiten und Falschheiten der wirklichen Welt verhalten sollten - wären sie sicher nicht auf den Gedanken gekommen, die zweigliedrig falsche Implikation für wahr zu halten.

Damit haben sie sich aber, und mit ihnen die moderne Logik, das Problem eingehandelt, wie man logisch urteilend von der wirklichen in die möglichen Welten "übergehen" kann, und wie man Urteile auszeichnen kann, die sowohl in der wirklichen wie auch in den möglichen Welten zugleich wahr (oder falsch) sein können. Dazu ist von Leibniz mit seinen "notwendigen Wahrheiten" und von Kant mit seinen "apriorischen Urteilen" der Weg in die moderne Logik gebahnt worden, wo dann vor allem S. Kripke wegen seiner "starren Denominatoren" viel gelobt wurde, weil sie angeblich in allen Welten "wahr" seien. Aber das kann nur denjenigen überzeugen, der schon die stoische Implikationstheorie akzeptiert hat, und das tun wir nicht.

Wenn unsere Diagnose stimmt, daß die Stoiker die Implikation mit zwei falschen Gliedern deswegen für wahr hielten, weil sie in der wirklichen Welt falsch und in einer möglichen Welt wahr sein sollte, so beweist das nur, was wir bisher schon vom Möglichkeitsbegriff und von den (hypothetischen) Möglichkeitsurteilen sagten: sie sind dialektische Gebilde. Der Möglichkeitsbegriff ist eine Contradictio in terminis und das Möglichkeitsurteil ist ein Urteilswiderspruch.

Chrysipp muß das wohl geahnt haben. Seine Definition des Implikationsurteils nimmt keinen Bezug mehr auf die Wahrheitswerte der Gliedsätze. Sie lautet: "Ein implikatives Urteil ist wahr, in welchem der Gegensatz des Nachsatzes mit dem Vordersatz unverträglich ist". Als Beispiel gab er gerade eine "paradoxe" (d. h. widerspruchsvolle) Implikation an: "Wenn es Nacht ist, dann ist es Tag". Von ihr haben wir schon gezeigt, daß man sie nach Philons Kriterien bei Nacht ausgesprochen für falsch, bei Tage gesprochen für wahr halten mußte. Sie muß nach Chrysipp deshalb falsch sein, weil das Gegenteil des zweiten Satzes mit dem Vordersatz verträglich ist. Damit man aber nach seinem Kriterium nicht eine Selbstimplikation wie "Wenn es Nacht ist, ist es Nacht" für wahr hielt, betonte er (mit Recht, weil ja hierdurch nichts Verschiedenes verknüpft wird!), daß eine (dasselbe) "wiederholende Implikation" überhaupt keine Implikation sei.

Wie man bemerkt, macht Chrysipps Wahrheitskriterium der Implikation nun keineswegs alle Implikationen mit falschen Teilsätzen wahr. Weder hat er dies behauptet, noch kommt es ihm überhaupt auf den Wahrheitswert der Teilsätze an. Vielmehr muß nur "der Gegensatz" des zweiten Gliedes auf eine "Unverträglichkeit" mit dem Vorderglied überprüfbar und feststellbar sein. Und das ist durchaus nicht dasselbe, wie das Vergleichen von vorgeblichen Wahrheitswerten der Vorder- und Hinterglieder, wie es in der modernen Logik üblich geworden ist. Zwar sagt der Volksmund und der moderne Logiker "Wenn du Rumpelschen heißt, bin ich der Papst" und hält das noch immer mit Philon für ein wahres Implikationsurteil, aber man sieht nicht, ob und wie die Tatsache, daß "ich nicht der Papst bin" mit der Tatsache unverträglich sein könnte, daß "du Rumpelstilschen heißt".

Kurzum, Chrysipps Implikationstheorie ist sicher nicht die Grundlage für spätere und heutige logische Meinungen über die Wahrheit von Implikationen mit zwei falschen Teilsätzen geworden. Und seine Vorsicht sollte auch jetzt noch eine Warnung sein, die übernommene Meinung zu dogmatisieren oder sie gar für ein "Apriori" zu halten.

Das Wesen der echten logischen Urteile ist ihre Wahrheitswertfähigkeit. Denn erst durch den Behauptungscharakter der Urteile wird, wie schon Aristoteles wußte, die Wahrheitsfrage zu einem logischen Thema. Wir haben gezeigt, welche Formen die echten Urteile annehmen können, und welche vermeintlichen, aber tatsächlich nur ausdrucksbildende "Begriffsverkettungen" darstellende Formen aus den Urteilen auszuschließen sind. Überdies haben wir in der pyramidalen Notation eine Formalisierung vorgeführt, die ein altes logisches Ideal - und ein Postulat Wittgensteins - einlöst: daß die logische Form des Urteils (des Satzes) an sich selbst zeigen muß, welchen Wahrheitswert das formale Urteil hat.

Über die traditionelle Zweiwertigkeit hinausgehend und damit die Modallogik in die Urteilslehre integrierend, haben wir gezeigt, daß das sonst "auszuschließende Dritte" selbst ein durchaus formal auftretender Wahrheitswert, nämlich der der Wahr-Falschheit ist. Eine effektive Klassifikation der Urteile kann und sollte daher ihre Wahrheitswerte zum Unterscheidungskriterium nehmen. Eine solche Klassifikation teilt die Urteile daher in die folgenden ein:

1. Wahre Urteile.
2. Falsche Urteile
3. Wahr-Falsche Urteile bzw. Wahrscheinlichkeitsurteile ("unentscheidbare Urteile").

Welche Form bzw. Notation diese Urteilsformen annehmen, ergibt sich aus der Pyramide der urteilsbildenden Junktoren. In der dort angegebenen Verknüpfungsrichtung zwischen Begriffspositionen "gelesen" formuliert man gleichsam automatisch wahre, falsche und wahr-falsche Urteile.

Da man an die traditionellen Bezeichnungen, wie sie in der Urteilstafel vorkommen, gewöhnt ist, knüpfen wir an diese an und detaillieren folgendermaßen:

1. Wahre Urteile
   a. Existenzurteile, sofern sie zur Einführung regulärer Begriffe dienen.
   b. Kopulative Urteile, sofern sie von unten nach oben verknüpfen.
   c. Urteile mit dem speziellen aristotelischen "Zukommen", sofern sie von oben nach unten verknüpfen.
   d. Negative Urteile, sofern sie im Querverhältnis verknüpfen.
   e. Materiale Implikationen (sinnidentisch mit kopulativen Urteilen), sofern sie von unten nach oben verknüpfen.
   f. Formale Implikationen (sinnidentisch mit aristotelischem "Zukommen"), sofern sie von oben nach unten verknüpfen.
   g. Korrelationsurteile (korrelierende Implikationen), sofern sie im Querverhältnis verknüpfen.

2. Falsche Urteile
   b. - g., sofern sie in einer anderen als der die Wahrheit ausdrückenden Richtung verknüpfen.

3. Wahr-Falsche Urteile
    a. Alternative Urteile.
    b. Distributive Urteile mit wahren und falschen Komponenten.
    c. Adjunktive Urteile mit wahren und falschen Komponenten.
    d. Widersprüchliche Urteile, insbesondere Wahrscheinlichkeitsurteile und Paradoxe.

Ersetzt man in diesen (elementaren) Urteilen die Subjekts- oder Prädikatsposition durch (jungierte) Ausdrücke und bildet somit komplexe Urteile, so ist die Verknüpfungsweise des urteilsbildenden Junktors in Bezug auf jede der Positionen des jeweiligen Ausdrucks einzeln zu prüfen. Erst dann läßt sich zeigen, ob das komplexe Urteil wahr, falsch oder wahr-falsch ist.

8. Die Schlüsse

Schlüsse sind Verbindungen von zwei oder mehreren Urteilen zu Sinneinheiten, die einen gemeinsamen Behauptungssinn enthalten. Dadurch sind auch die Schlüsse wahrheitswertfähig, und ihre Klassifikation und Analyse ist wesentlich auf die Feststellung ihres jeweiligen Wahrheitswertes abgestellt. Einige von ihnen - wie besonders der sog. Modus Barbara der aristotelischen Syllogismen und die sog. "Erste Unbeweisbare" (Schlußform) der Stoiker - sind in der Geschichte der Logik als Vehikel des "Wahrheitstransports" der Wahrheit von elementaren Urteilen in andere Urteile so prominent geworden, daß sie gleichsam blind als Wahrheitsgarantien in Argumentationsstränge und Beweise eingebaut werden. In inhaltlichen Anwendungen gelten sie daher in ihren standardisierten Gestalten als schlagende oder gültige "Argumente".

Sie gaben einer jahrhundertlangen und bis heute nicht abgeschlossenen Forschung und Überprüfung das Muster, auch andere Urteilsverbindungen wie eben die zuvor behandelten stoischen komplexen Urteile hinsichtlich ihrer Wahrheitswerte zu prüfen. Die Resultate variieren allein hinsichtlich der aristotelischen Schlußformen ("Modi") zwischen 14 und 195 und zeigen damit auch die Umstrittenheit der Schlußtheorien an.

Wir haben schon bei der Behandlung der alternativen und widersprüchlichen Urteile die Tendenz kritisiert, die Wahrheitswertfrage solcher Urteile in einer "Metaperspektive" zu diskutieren. Diese hat zu der Festlegung geführt, daß die Alternative als "wahr gilt", wenn eine Komponente des Urteils "wahr", die andere aber "falsch" ist. Umgekehrt bei den Widersprüchen, die bei gleicher Ausgangslage (mit "und"-Verknüpfung) als "falsch" gelten. Dieselbe Tendenz wird von den meisten Logikern in der Schlußlehre verfolgt. Viele prominente und gleichsam blind angewandte Schlußformen gelten als wahr, wenn ihre Komponenten falsche Urteile sind. Insbesondere verdankt man der stoischen Logik - und die moderne "Aussagenlogik" hat deren Theorien wieder aufgenommen und dogmatisiert - *die Faustregel des logischen Schließens: "Ein Schluß ist nur falsch, wenn sich aus wahren Prämissen (d. h. aus als wahr vorausgesetzten Urteilen) ein falsches (Schluß-)Urteil ergibt.* In allen anderen Fällen sei ein Schluß wahr ("gültig"!). Diese übrigen drei möglichen Fälle sind bekanntlich: Wenn von Falschem auf Wahres geschlossen wird; wenn von Wahrem auf Wahres geschlossen wird, und wenn von Falschem auf Falsches geschlossen wird.

Dazu ist kritisch zu sagen: Diese Regeln des logischen Schließens setzten ihrerseits eine genaue Kenntnis des Wahrheitswertes der beteiligten Urteile - und insbesondere auch des Schlußurteils selbst - voraus. Wenn diese Kenntnis aber gegeben ist, so ist grundsätzlich fraglich, warum überhaupt Schlußverbindungen zwischen diesen Elementen erforderlich sein sollten. Die Frage spitzt sich besonders auf den Punkt zu, der sich bei Beweisverfahren ergibt, nämlich wieso man Schlüsse dazu verwenden sollte, schon bekannte Wahrheiten durch sie zu "erschließen" und dadurch evtl. zu "beweisen". Geradezu paradox erscheint dann aber die darin verankerte Folgerung, daß ein ganzes Buch voller falscher Urteile als Prämissen mit einem daraus erschlossenen falschen Resultat insgesamt als "wahr bzw. gültig" angesehen werden muß; ebenso natürlich auch, wenn das Resultat bei gleicher falscher Prämissenlage wahr wäre.

In der Praxis der Wissenschaften wird man solche Konsequenzen der logischen Metatheorien der Wahrheit nicht allzu ernst nehmen. Umso schlimmer für die Logik! Sie hat sich dadurch ziemlich weit von dieser Praxis entfernt und muß daher um ihre wissenschaftstheoretische Relevanz fürchten.

Wir entgehen diesen Folgerungen, wenn wir die Metaperspektive der Wahrheitswertbestimmungen von Schlüssen ebenso wie bei den Urteilen verwerfen und auch hier die Wahrheitswerte bei denjenigen der beteiligten Urteile belassen. Wobei ja schon gezeigt wurde, daß die Wahrheitswerte der Urteile auf die pyramidalen Lagen der involvierten Begriffe (Begriffspositionen) und ihrer junktoriellen Verknüpfungsweisen zurückzuführen sind.

Ein erster Schritt dahin ist schon die sprachlich-grammatische Einsicht, daß in vielen Fällen in der Form behauptender Urteile verkappte Konjunktivsätze in die Logik eingeschmuggelt werden, die keinen Behauptungscharakter haben. Als "Vermutungen" und "Hypothesen", "Wahrscheinlichkeitsurteile" und "Prognosen" haben sie in der Logik gleichwohl die Gestalt von Behauptungen angenommen, und es wird ihnen schlicht ein "Metawahrheitswert" zudekretiert.

Ein zweiter Schritt wird durch die Einsicht erreicht, daß die Verbindungsweise zwischen Urteilen zu Schlüssen eine grundsätzlich andere ist als die Verknüpfung von Begriffen zu Urteilen mittels der Junktoren. Die üblich gewordene Verwendung der Junktoren in Schlüssen ist eine Verlegenheitslösung, die freilich solange nahelag, als man die eigentliche Funktion der Junktoren bei der Ausdrucks- und Urteilsbildung nicht durchschaute und dennoch Bedarf bestand, die Schlußverbindungen irgendwie zu bezeichnen.

Daß das so ist, erkennt man leicht daran, daß eine Bezeichnung der Verbindung der Prämissen untereinander und dieser mit dem Schlußurteil i. e. S. in den aristotelischen Syllogismen ohne Beeinträchtigung ganz weggelassen werden kann: "Alle Tiere sind Lebewesen. Alle Hunde sind Tiere. Alle Hunde sind Lebewesen" (modus barbara) bedeutet ebensoviel wie: "*Wenn* alle Tiere Lebewesen sind, *und wenn* alle Hunde Tiere sind, *dann* sind alle Hunde Lebewesen". Bei den stoischen sogenannten "Unbeweisbaren" werden die Verbindungen in der Prämisse zwar durch Junktoren bezeichnet, nicht aber beim Übergang zum eigentlichen Schluß, wie später genauer zu zeigen ist.

Ein dritter Schritt besteht in der Einsicht, daß die besonderen Verbindungskennzeichnungen der Urteile in Schlüssen schon dadurch entbehrlich werden, daß der Formalismus der Begriffspyramide selbst diese Verbindungen unmittelbar zum Ausdruck bringt. Das drückt sich in der von Aristoteles mit allem Nachdruck geforderten Verbindung der Prämissen durch den gemeinsamen "Mittelbegriff" (medius terminus) aus, der dann auch den logischen Grund dafür abgibt, daß die in den Prämissenurteilen vorkommenden übrigen (gewöhnlich zwei) Begriffe selbst in ein pyramidal geregeltes Verhältnis, das durch ein sogenanntes Schlußurteil formuliert wird, treten müssen. Auch die Stoiker haben für ihre "Unbeweisbaren", die nur zwei Begriffe enthalten, ein solches pyramidal ausweisbares Verhältnis zwischen diesen Begriffen vorausgesetzt, nämlich das, was sie als "Gegenteil" oder "Gegensatz" bezeichneten, was sich aber nur in aristotelischer Begriffslehre als ein gegenseitiges Negationsverhältnis darstellen läßt. Daher schlossen die meisten Stoiker die Selbstimplikation ("Wenn es Tag ist, ist es Tag") ebenso aus wie Sätze, die keinen solchen Zusammenhang zwischen den beteiligten Begriffen erkennen lassen ("Wenn es Tag ist, geht Sokrates umher") aus den Schlußformen aus.

Ein zum logischen Schließen analoges Verfahren, thematisch zusammengehörende Sätze einfach neben- bzw. untereinanderzustellen, ist bekanntlich in der Mathematik bei Gleichungsumwandlungen (evtl. bis zur sogenannten Auflösung der Gleichung) üblich. Sieht man die Gleichungen als behauptende Urteile an (was wir nicht tun, da wir sie für Definitionsketten halten), so müßten solche Gleichungsreihen auch als Schlußketten eingeschätzt werden. In der Tat werden sie bekanntlich in der Praxis der Mathematik regelmäßig als Beweisketten eingeschätzt.

Diese logisch durch die Begriffspyramide aller vorkommenden Begriffe und bei inhaltlichen Schlüssen durch den thematischen Zusammenhang der Argumente bereitgestellte Verbindung der Urteile in den Schlüssen ist nun entscheidend für die Tragweite und Plausibilität, ja auch die Sinnhaftigkeit aller schlußmäßigen Argumentationen und Beweise. Die moderne Logik hat diese Rahmenbedingungen der Schlüsse gerade unter Berufung auf den vorgeblich autonomen Meta-Wahrheitswert der Schlußformen aus dem Auge verloren. Die jetzt üblicherweise fallengelassene Bedingung der Mittelbegriffe und des thematischen Zusammenhangs der Schlußargumentation wird in den üblichen Formalisierungen der Schlüsse gewöhnlich nicht sichtbar, aber die Beispielsätze in vielen Lehrbüchern zeigen es deutlich.

Man muß als moderner Aussagen- und Schlußlogiker als "wahr" und "gültig" behaupten: "Wenn Gras grün ist, und wenn 6 eine gerade Zahl ist, dann ist Gold ein Metall!" Ebenso aber auch: "Wenn Gras blau ist, und wenn 7 eine gerade Zahl ist, dann ist Gold ein Metall". Dieselbe Schlußform erlaubt auch den "wahren" bzw. "gültigen" Schluß: "Wenn Gras grün und zugleich nicht grün ist, und wenn 6 eine grade und zugleich eine ungerade Zahl ist, dann ist 7 eine ungerade Zahl" (notabene: unter der üblichen Voraussetzung, daß ein widersprüchliches Urteil falsch sei!). Unter derselben Voraussetzung der "Falschheit" des Widerspruchs gilt ebenso als "wahr" bzw. als "gültig": "Wenn Gras grün und nicht grün ist, und wenn 6 eine gerade und zugleich eine ungerade Zahl ist, dann ist Berlin die Hauptstadt und zugleich nicht die Hauptstadt von Deutschland". Erst die "Behauptung": "Wenn 6 eine gerade Zahl ist, und wenn Berlin die Hauptstadt von Deutschland ist, dann ist Berlin nicht die Hauptstadt von Deutschland" gilt als "falsch" bzw. als "ungültig". Und dies alles nach den oben genannten formalen Regeln des Schließens in Verbindung mit der üblichen Wahrheitswertzuschreibung der Widersprüche. Wir halten alle diese "mittelbegriffslosen" Gebilde überhaupt nicht für Schlüsse und scheiden sie aus der Logik aus.

Daß man mit solchen logischen "Wahrheiten"; die wir hier mit leicht verständlichen Beispielsätzen belegt haben, während sie in elaborierteren Beispielen nicht so leicht zutage treten, viele Gutwillige von der Befassung mit der Logik abschreckt, dürfte auf der Hand liegen. Da hilft auch die vielfach geäußerte Beschwichtigung nicht: Die formale Logik demonstriert die Wahrheit, aber es ist sehr schwierig, geeignete Beispiele dafür zu finden. Und überdies kommt es ja in der reinen formalen Logik auf Beispiele gar nicht an. Die sind nur etwas für den Anfänger!

Ein vierter Schritt, der die Vorgaben der pyramidalen Ordnung der schlußfähigen Urteile in Rechnung stellt, besteht in der Verabschiedung einer Reihe scholastischer Schlußregeln. Sie verdanken sich Vorsichtsmaßnahmen, die darauf hinausliefen, beim Ausprobieren von Schlußformen anhand von plausiblen Beispielssätzen lieber einige wahre Schlußformen nicht zuzulassen, als Gefahr zu laufen, sie nicht "beweisen" zu können.

Dazu gehören die Regeln: "Aus nur negativen Prämissen gibt es keinen Schluß" (ex mere negativis non valet consequentia) sowie "Der Schluß i. e. S. folgt der schwächeren Prämisse", d. h. wenn in den Prämissen partikuläre und/oder negative Urteile vorkommen, so muß die Konklusion ebenfalls partikulär und/oder negativ sein (Wir gehen davon aus, daß die "schwächeren" partikulären Prämissen in Syllogismen gar keine Urteile, sondern Definitionen sind, als "partikuläre Konklusionen" natürlich ebenfalls!). Auch die vermeintlich allgemeinste Schlußregel bzw. das berühmte "Dictum de omni et nullo: Was vom Allgemeinen gilt, gilt auch vom Besonderen, und was vom Allgemeinen nicht gilt, gilt auch nicht vom Besonderen" (quod valet de omnibus valet de singulis, et quod valet de nullo, non valet de singulis) ist zweideutig und irreführend. Sie spricht wohl richtig aus, daß generische Merkmale einer Gattung auch jeder zugehörigen Art und Unterart bzw. Individuen zuzusprechen sind (darauf beruht die sog. Subalternation); ebenso, daß ein nicht zur Gattung gehöriges generisches Merkmal auch nicht als solches in den Unterbegriffen auftauchen kann. Aber sie verkennt, daß die spezifischen Merkmale von Unterbegriffen einer Gattung gerade nicht der Gattung zuzusprechen sind, so daß in dieser Hinsicht sehr wohl vom Besonderen gilt, was vom Allgemeinen nicht gilt. Aristoteles hat diese intensionalen und extensionalen Verhältnisse nicht genau durchschaut, wie man an gegenteiligen Behauptungen in den Topica (II, 4, 111a14-32) sieht. Dort heißt es: "Es ist nicht notwendig, daß dasjenige, was zur Gattung gehört, zur Art gehört ... Aber was zur Art gehört, muß zur Gattung gehören ... Was nicht zur Gattung gehört, gehört nicht zur Art, aber was nicht zur Art gehört, muß nicht notwendigerweise nicht zur Gattung gehören". Dieser Irreführung ist, wie vorn schon gezeigt, auch Kant bei seinem "synthetischen Urteil" über die "rote Rose" aufgesessen.

Nun sind sicher diejenigen Schlüsse am wichtigsten, die aus wahren Prämissen-Urteilen Wahres erschließen. Aber neben den wahren gibt es die falschen - und wie wir hinzubehaupten - die unentscheidbaren Urteile. Sie alle können ersichtlich Bestandteile von Schlüssen sein, und selbst die Syllogistik des Aristoteles und die moderne Aussagenlogik, nicht zuletzt auch die Meta-Wahrheitslogik geht (bei den Wahrheitwerten der Elementarsätze) davon aus. Es hieße die Tatsache leugnen, daß man auch in syllogistischen Schlußformen konsequent lügen und täuschen kann, wollte man nicht anerkennen, daß man auch falsche Prämissen und falsche Konklusionen als Syllogismen vortragen kann. Und eben diese Tatsache verführt wohl die meisten Logiker dazu, den formalen Schlußformen selbst - unabhängig vom Gehalt ihrer Urteile und deren Wahrheitswerten - einen selbständigen "Meta-Wahrheitswert" zuzulegen.

Schauen wir aber näher hin, so muß man zunächst festhalten, daß gutes und konsequentes Lügen eben deswegen "gut gelogen" ist, weil es die Lüge als Wahrheit erscheinen läßt. Erst durchschaute und entlarvte Lügen können Falschheiten genannt werden, und die Einsicht in die Falschheit einer Lüge ist grundsätzlich eine "wahre" Erkenntnis. Wenn das so ist, so ist das Lügen jedenfalls kein Exempel dafür, daß "aus Falschem Falsches wahr geschlossen werden" könnte.

Harmloser und für die meisten Logiker ebenso verführerisch sind die vielberufenen Vermutungen bzw. Hypothesen, die in Prämissen eingesetzt werden, und die die sog. hypothetischen Syllogismen und stoischen Schlüsse, dann aber auch die Wahrscheinlichkeitsschlüsse und Prognosen ausmachen. Von Hypothesen gilt aber grundsätzlich, daß sie kein wahres Wissen ausdrücken, sondern gerade die vermutende Ungewißheit bezüglich des Wahrheitswertes. Sie in die Form von behauptenden Urteilen zu kleiden, ist selbst schon Betrug. Man kann und sollte sie bei wissenschaftlicher Redlichkeit in die sprachliche Form des Konjunktivs kleiden. Dann entfällt aber ebenfalls jeder Grund, im Falle, daß sie sich als "falsche" bzw. "falsifizierte" Vermutungen herausstellen lassen, ihre Verwendung im Syllogismus als Argument für die "Wahrheit" eines Schlusses von Falschem auf Falsches (oder Wahres) zu benutzen.

Definieren wir die Schlüsse entsprechend dem Gesagten und unter Verzicht auf besondere Junktoren als den *logischen Übergang von Urteilen zu anderen Urteilen*. Es liegt dann auf der Hand, daß es Übergänge von wahren zu wahren, von wahren zu falschen, von falschen zu wahren und von wahren oder falschen zu unentscheidbaren Urteilen geben muß. Und halten wir dabei fest: Jedes einzelne solcher Urteile behält seinen eigenen Wahrheitswert, die Verbindung aus ihnen aber kann keinen eigenen Wahrheitswert annehmen. Ein solcher kann allenfalls eine willkürliche und zur logischen Konvention gewordenen Zuordnung eines Wahrheitswertes sein, wie es in der stoischen und wieder in der modernen Aussagenlogik der Fall ist.

Das sieht man bei den 256 möglichen Modi von Syllogismen, die die scholastische Logik ausgearbeitet hat, und aus denen man bis heute die "wahren" bzw. "gültigen" auszusondern und als wahr bzw. gültig zu beweisen versucht. Ersichtlich setzt das voraus, daß alle anderen Modi falsch bzw. ungültig sein müssen, weil in ihnen eben nicht vom Wahren auf Wahres geschlossen wird.

Da nun die aristotelischen Syllogismen und die stoischen "Unbeweisbaren" in der Geschichte der Logik ein bevorzugtes Trainingsgebiet für logischen Scharfsinn gewesen sind und auch heute noch eine wichtige Disziplin der Logik darstellen, wollen wir im folgenden näher darauf eingehen.

a. Die aristotelische Syllogistik.

Die aristotelische Syllogistik steht unter den Beschränkungen, die sich aus dem von Aristoteles eingeführten Formalismus der Bezeichnung von Begriffen durch einfache Buchstaben ergeben haben. Am aristotelisch "formalisierten" Begriff läßt sich nicht erkennen, in welchem logischen Verhältnis er zu anderen Begriffen steht. Der Gattungs-Art-Unterart (Individuen)-Charakter der Begriffe wird durch den aristotelischen Formalismus dissimuliert. Das ganze syllogistische Spiel dient daher dazu, diese Stellung im pyramidalen Verhältnis offenzulegen. Und dies geschieht, wie schon öfter betont, bei partikulären Prämissen und Konklusionen auch in der Form von Definitionen.

Die von Aristoteles zugrunde gelegte Pyramidenstruktur ist dabei durchweg die dihäretische bzw. dichotomische Weise der Art- und Unterartbildung, wie sich aus seinen Beispielen entnehmen läßt. Man beachte, daß sich auch eine multiple Artbildung immer auf eine dihäretische zurückführen läßt, wenn man mehrere Nebenarten gemeinsam durch die Negation zu einer Ausgangsart zusammenfaßt. Wir werden davon bei den Beispielen für Unterarten gelegentlich Gebrauch machen.

Eine weitere Besonderheit (gegenüber den stoischen Schlüssen) besteht darin, daß in zahlreichen Modi in der Gestalt partikulärer und gelegentlich auch negativer Urteile Definitionen von Begriffen eingeführt werden. Diese können ihrem Definitionscharakter gemäß nur dazu dienen, den pyramidalen Ort des jeweiligen Begriffes festzulegen und damit andere Interpretationsmöglichkeiten seiner Bedeutung auszuschließen.

Eine weitere für die Syllogismen typische Bedingung ist die, daß in allen Gestalten (Modi) der Forderung nach nur drei Begriffe vorkommen sollen. Diese Bedingung ist jedoch in einigen Modi nicht erfüllt, deren Formulierungen in dissimulierter Weise vierte oder gar fünfte Begriffe einführen.

Die drei schlußthematischen Begriffe stehen ihrerseits in den für die Syllogistik typischen pyramidalen Beziehungen (mit dihäretischer Art- und Unterartbildung) zueinander, die Aristoteles selbst in seinen berühmten drei "Figuren" (Schemata) bestimmt hat. Eine vierte Schlußfigur wird üblicherweise Galen zugeschrieben. Sie ist aber nur eine Umkehrung einer der drei aristotelischen Figuren, die sich bei Ersetzung des speziellen "Zukommens" durch die Kopula und Vertauschung von Subjekt und Prädikat ergibt.

Die pyramidale Position der drei Begriffe (in Gattungs-, Art-, Unterart- oder Nebenartposition) wird zunächst durch zwei Urteile festgelegt, nämlich die sog. Prämissen ("vorausgeschickte" Urteile). Das heißt zugleich, daß einer der beteiligten Begriffe in beiden Prämissenurteilen zugleich vorkommen muß. Es ist der sog. Mittelbegriff (medius terminus), der bei eingesetzten Beispielsätzen jeweils auch den "thematischen Zusammenhang" des Sinnes der Urteile garantiert.

Ist nun durch die Prämissen die Stellung der drei Begriffe zueinander eindeutig bestimmt (wobei sich die beiden Prämissen im Mittelbegriff gewissermaßen überschneiden), so ist zu erwarten, daß auch zwischen den beiden übrigbleibenden Begriffen eine eindeutige logisch-pyramidale Beziehung bestehen muß. Diese Beziehung wird im eigentlichen sog. Schlußurteil ausgesprochen und ist in der Pyramide ablesbar.

Der Schematismus des syllogistischen Schlußfolgerns läßt sich somit auf die Formel bringen: *Stehen zwei Begriffe in einer Pyramide in eindeutigem Verhältnis zu einem dritten (Mittel-)Begriff, so stehen sie auch untereinander in einem eindeutigen Verhältnis.*

Man wird bei dieser Formulierung leicht die Analogie zu einer geometrischen Konstruktions- oder mathematischen Rechenaufgabe bemerken, nämlich aus Gegebenem etwas Gefordertes zu konstruieren oder zu berechnen. In der Tat dürfte diese Analogie zu allen Zeiten dazu beigetragen haben, die Syllogismen für das logische Pendant mathematischer Problemlösungsinstrumente, d. h. von Gleichungsauflösungen zu halten. Noch reizvoller - und sicherlich populärer - dürfte die Analogie zu gewissen Rätselspielen erscheinen.

Aristoteles hat sich das einfache Spiel dadurch kompliziert gemacht, daß er nicht beachtete, daß bei der Partikularisierung (und Individualisierung) eines Begriffs von diesem zu einem selbständigen Unterbegriff desselben übergegangen wird. Bei seiner Formalisierungsweise mußte ihm "einige A" als eine nähere Bestimmung des Begriffs "A" erscheinen, während es sich tatsächlich doch um den Übergang zu einem der beiden Unterbegriffe von "A" (nämlich entweder "AB" oder AC", gelegentlich sogar zu einer Unterart ABD) handelt. Das wurde bei einigen seiner Modi, die solche Partikularisierungen enthielten, der Grund dafür, daß faktisch mehr als drei Begriffe im Syllogismus vorkamen. Erst recht macht sich diese Komplizierung bemerkbar, wenn der Mittelbegriff in Subjektstellung beider Prämissen partikularisiert wurde.

Aristoteles selbst hat vierzehn "gültige" Schlußmodi - und ersichtlich durch Ausprobieren an Beispielsätzen - angegeben. Die scholastische Logik aber hat alle rechnerisch möglichen Kombinationsgestalten der syllogistischen Modi erfaßt und systematisch geordnet, nämlich 256. Syllogistische Forschung hat seither ohne eindeutiges Ergebnis darauf abgezielt, in der Zahl dieser möglichen Modi diejenigen auszuzeichnen, die tatsächlich zu "wahren" Schlußurteilen führen und die übrigen als "falsch" bzw. als "ungültig" zu erweisen.

Obwohl diese Bemühungen nur noch von historischem Interesse sein dürften, sei doch ein Blick auf ihre Prinzipien geworfen, da sie in der logischen Didaktik immer noch eine gewisse Rolle spielen.

1. Die Anordnung der syllogistischen Modi wurde systematisch nach der Stellung des Mittelbegriffs durchgeführt, nämlich ob er in den Prämissen als Subjekt oder Prädikat steht. Aristoteles selbst meinte, bei dieser Voraussetzung könne es nur drei Verhältnisse geben, die er als "drei Figuren" bezeichnete. Er formulierte den Sachverhalt in den Analytica priora (A 23, 41 a) folgendermaßen:

> "Wenn man nun etwas (beiden Prämissen) Gemeinsames (d. h. den Mittelbegriff) C annehmen muß und dieses auf dreifache Weise geschehen kann, indem man nämlich entweder A von C, und C von B aussagt, oder C von beiden anderen oder diese beiden von C, und das sind gerade die angegebenen (drei) Figuren, dann ist offenbar, daß jeder Syllogismus durch eine dieser Figuren zustande kommen muß".

Das "aussagen von" bezieht sich ersichtlich auf alle urteilsbildenden junktoriellen Verknüpfungen, die zwischen den Begriffspositionen in einer Begriffspyramide bestehen können. Es können auch, wie Aristoteles richtig bemerkt, nur drei Verknüpfungen sein, nämlich die von der Gattung zur Art oder Unterart, die umgekehrte von Art oder Unterart zur Gattung, und diejenige zwischen Nebenarten. Erstere werden als "wahre" durch das aristotelische "Zukommen" ausgedrückt, die zweite durch die Kopula, die letztere durch die Negation.

Nun lassen seine Begriffszeichen A, B und C nicht erkennen, ob es sich dabei jeweils um Gattungs-, Art-, Unterart- oder Nebenartbegriffspositionen handeln soll. Das Ausprobieren der Möglichkeiten solcher Stellungen anhand von Beispielen führte ihn offensichtlich zu den von ihm für "gültig" gehaltenen 14 Modi. Geht man nun, wie Aristoteles es auch beabsichtigte, von der Stellung des gemeinsamen Mittelbegriffs (C) aus, so läßt sich das "Aussagen" von C bezüglich A und B und umgekehrt von A und B bezüglich C ersichtlich sowohl als kopulatives Urteil ("ist"), als negatives Urteil ("ist nicht") wie auch äquivalent als "Zukommen" und als verneintes "Zukommen" lesen. Anders verhält es sich aber beim positiven oder negativen "Aussagen" von A bezüglich des C und des C von B. Es kann sowohl "A ist C" und "C ist B" (bzw. deren Negationsformen) bedeuten, wie auch "A kommt C zu" und C kommt B zu" (bzw. deren Negationsformen). Diese Urteilsformen sind aber nicht äquivalent, wie man leicht einsehen kann. Es verbergen sich daher unter dem ersten Satz "A von C und C von B aussagen" zwei "Figuren", nämlich "A ist C und C ist B" sowie "B ist C und C ist A" (bzw. jeweils in negierter Form). Das hat Aristoteles offenbar übersehen, nicht aber Galen, der die "vierte Figur" hinzufügte. Die scholastische Syllogistik hat diese sich dann ergebenden vier Figuren unter Berücksichtigung der Stellung des Mittelbegriffs und der Anordnung der Prämissen derart, daß die erste Prämisse (Maior) in den Fällen, wo es möglich erscheint, den allgemeinsten Prädikatbegriff enthalten sollte, zum Standard erhoben.

Das klassisch gewordene Figurenschema sieht so aus:

a.	C ist A	b.	A ist C	c.	C ist A	d	A ist C	*Maior*
	B ist C		B ist C		C ist B		C ist B	*Minor*
	B ist A		B ist A		B ist A		B ist A	*Conclusio*

Man erkennt, wo der Mittelbegriff (C) in der ersten (Maior) und zweiten (Minor) Prämisse steht, und daß er im Schlußurteil (Conclusio) entfällt. Ebenso sieht man, in welcher Folge die übrigbleibenden Begriffe in der Konklusion stehen müssen. Diese Folge ergibt sich, wie gesagt, aus der Voraussetzung, daß die erste Prämisse (Maior) den allgemeinsten Begriff enthalten soll, unter den dann der Begriff der zweiten Prämisse (Minor) fallen sollte. Das ist nicht bei jedem Modus der Fall.

2. Als Urteilsformen wurden in der scholastischen Syllogistik positive und negative kopulative Urteile (mit Kopula "ist" und "ist nicht") und deren Quantifizierungen ("alle" und "einige", ggf. aber auch "ein") angenommen. Die Anzahl von 256 möglichen Modi der vier oben angegebenen Schlußfiguren ergibt sich, wenn man alle Variationen von positiven und negativen und zusätzlich von allgemeinen und partikulären Urteilen in den Prämissen bildet (Wir sprechen im folgenden in Übereinstimmung mit dem scholastischen Brauch ebenfalls von "parikulären Urteilen", obwohl wir sie für Definitionen halten).

3. Man möchte nun erwarten, daß die Einsetzung bestimmter Beispielsbegriffe an der Stelle der Variablen A, B und C in allen Figuren lauter wahre Prämissenurteile und ebenso wahre Konklusionsurteile ergäbe. Dies ist aber keineswegs der Fall, wie man ohne weiteres an einer Belegung mit A = Lebewesen, B = Hund, C = Tier und bei nur allgemeinen positiven Urteilsbildungen ausprobieren kann. In der Figur a ergeben sich zwar dabei lauter wahre Urteile, in der Figur b aber erhält man eine falsche Maior ("Lebewesen sind Tiere"), die man nur durch Partikularisierung ("einige Lebewesen sind Tiere") und Umstellung der Prämissen heilen könnte. In der Figur c erhält man eine falsche Minor ("Tiere sind Hunde"), die ebenfalls nur durch Partikularisierung ("einige Tiere sind Hunde") "wahr" wird. In der Figur d werden beide Prämissen falsche Urteile ("Lebewesen sind Tiere" und " Tiere sind Hunde"), die man also beide partikularisieren muß, um sie wahr zu machen. Gleichwohl sind alle Konklusionen wiederum wahre Urteile (Hunde sind Lebewesen").

4. Diese Beispiele zeigen, daß die scholastischen Logiker ebenso wie schon Aristoteles die passenden ("gültigen") Spezifikationen von Prämissen ausprobiert und von den unpassenden ("ungültigen") unterschieden haben. Dabei bleiben in jeder der vier Figuren nur einige wenige gültige Belegungen übrig, die man durch sehr sinnreiche Termini bezeichnet hat.

Der byzantinische Logiker Michael Psellos (gest. um 1106) hatte für die drei aristotelischen Figuren mit griechischen Merkversen, die auch einen schönen Sinn ergeben, das Beispiel gegeben. Diese lauten:

Grammata egrapse graphidi technikos.
Egrapse kateche metrion acholon.
Hapasi sthenaros isakis aspidi homalos pheristos.

Es schrieb ein Fachmann mit dem Schreibstift Buchstaben.
Er schrieb: halte dich an das Gemäßigte, das keinen Groll stiftet,
ausdauernd in allem und am besten gleichmäßig eben wie ein Schild.

Wilhelm von Shyreswood (gest. zwischen 1266 und 1272) scheint sie zuerst in seinen "Introductiones in logicam" in der heute noch üblichen Form im lateinischen Westen verbreitet zu haben, während sie Petrus Hispanus, der spätere Papst Johannes XXI (gest. 1277), in seinem berühmten Logiklehrbuch

"Summulae logicales" noch in etwas anderer Folge zusammenstellte. Der kanonische Merkvers für alle vier Figuren lautet so:

Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.	*1. Figur*: Barbara, Celarent, Darii und Ferio.
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.	*2.*: Cesare, Camestres, Festino und Baroco.
Tertia grande sonans recitat Darapti, Felapton,	Groß tönt die *3.*: Darapti, Felapton,
Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae	Disamis, Datisi, Bocardo und Ferison.
sunt Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.	*4*. Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Die drei Vokale in jedem der "künstlichen" Merkwörter bezeichnen in der Abfolge die logische Spezifikation der Maior, Minor und der Conclusio, die für einen gültigen Modus erforderlich ist. Dabei bedeutet:

a	allgemein bejahend,	(alle...sind...)
e	allgemein verneinend,	(alle... sind nicht / kein...ist...)
i	partikulär bejahend,	(einige... sind)
o	partikulär verneinend.	(einige...sind nicht...)

Einige der in den Merkwörtern vorkommenden Konsonanten bedeuten zugleich Hinweise auf logische Operationen, mit denen man den jeweiligen Modus in einen anderen und als leicht einsehbar geltenden Modus umwandeln kann. Diese Umwandlungen und Zurückführungen galten in der scholastischen Logik als logisches Spielfeld für die Übung des Scharfsinns. *S* bedeutet Vertauschung von Subjekt und Prädikat in derjenigen Prämisse, die durch den dem S vorausgehenden Vokal bezeichnet wird. *P* bedeutet Vertauschung von Subjekt und Prädikat und Partikularisierung des Subjekts (conversio per accidens). *M* bedeutet Vertauschung der Prämissen untereinander. *C* bedeutet eine Rückführung auf "Falschheit" (bzw. Aufweis eines sich ergebenden Widerspruchs: Reductio ad absurdum). Ein scholastischer Merkvers für diese Operationen lautet:

S vult simplicer converti, P per accidens,
M vult transponi, C per impossibile duci

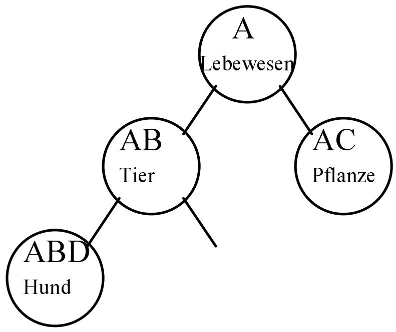
(vgl. darüber noch immer F. Ueberweg, System der Logik und Geschichte der logischen Lehren, 2. Aufl. Bonn 1865, S. 317 sowie C. Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande, 2. Band, 2. Aufl. Leipzig 1885, S. 282 f.)

Setzte man die Vokale des lateinischen Merkverses bei den vier Figuren entsprechend ein, so verließ man sich darauf, daß thematisch zusammenhängende wahre Satzbeispiele für die Prämissen und die Konklusion insgesamt wahr sein sollten. Die jahrhundertelange Übung an und mit den Syllogismen hat dabei zu den vorne schon angesprochenen Faustregeln geführt, die man auch heute noch berücksichtigt. Man sollte sie aber eher Vorsichtsmaßregeln nennen, da sie gewisse Möglichkeiten ausschließen und zudem teilweise irreführend sind. Diese "Schlußregeln" lauten:

1. Dictum de omni et nullo. Was von allem gilt, gilt auch vom Einzelnen (vgl. die klassische Subalternation), und was von keinem gilt, gilt auch nicht vom Einzelnen.
2. Latius hos quam praemissae conclusio non vult. Die Konklusion will nicht mehr behaupten als die Prämissen enthalten.
3. Debiliorem semper sequitur conclusio partem. Die Konklusion folgt immer der schwächeren Prämisse (negative Urteile sind schwächer als positive, partikuläre sind schwächer als allgemeine!)
4. Utraque si praemissa neget, nihil inde sequitur. Aus zwei negativen Prämissen folgt kein Schluß.
5. Nil sequitur geminis ex particularibus umquam. Aus zwei partikulären Prämissen folgt kein Schluß.

Ersichtlich sind sie als Vorsichtsmaßregeln beim Umgang mit aristotelisch notierten Begriffen entstanden, bei denen man ihr pyramidales Verhältnis zueinander nicht durchschaute. Die pyramidale Kontrolle erweist als sie als überflüssig und z. T. als irreführend.

Wir können nun die 14 von Aristoteles als gültig herausgefundenen sowie die weiteren 5 von den Scholastikern als gültig mitbehandelten Modi übersichtlich in eine Pyramide eintragen. Es zeigt sich dann, daß sie sämtlich in Teilen der Begriffspyramide "spielen", die für eine andere Einteilung als die aristotelisch-scholastische nach der Stellung des Mittelbegriffs dienen können. Grundsätzlich werden für das syllogistische Spiel der regulären Modi nur vier Begriffspositionen benötigt. Wir geben dafür den Grundtyp und tragen Beispielsbegriffe ein.



Bei genauer Prüfung aller Modi zeigt sich jedoch, daß einige derselben zu falschen partikularisierten Konklusionen führen und dabei einen zusätzlichen im Syllogismus unzulässigen vierten Begriff einführen. Und dies offensichtlich nach der Vorsichtsregel, daß "der Schluß der schwächeren Prämisse folge" ("in debiliorem!"). Dies betrifft die Modi Datisi, Ferison und Fresison. Läßt man diese Vorsichtsregel außer acht, so sind die Modi Datisa, Ferisen und Fresisen wahre Modi, und es bleibt bei drei Begriffen. Wir zeigen es am Beispiel Datisi bzw. Datisa:

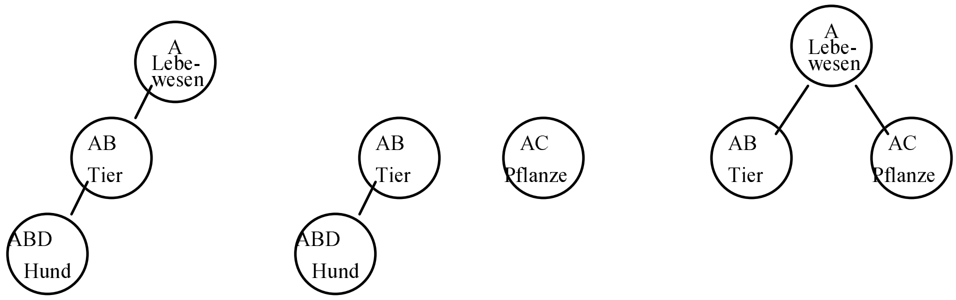
Modus Datisi:	Alle *Tiere* sind Lebewesen	(Art mit Gattung verknüpft).
	Einige *Tiere* sind Hunde	(Art mit Unterart verknüpft).
	Einige Hunde sind Lebewesen	(Unter-Unterart mit Gattung verknüpft.)

Die Konklusion ist falsch, denn *alle* Hunde (und nicht nur einige) sind Lebewesen, also Datisa!

Die Teile der Pyramide, in denen die einzelnen Modi "spielen", haben wir als Leiter, Riß und Spitze bezeichnet, was unmittelbar aus ihrem Bild verständlich sein dürfte. Sie sehen so aus:

Die drei Begriffskonstellationen in den syllogistischen Modi

1. Leiter 2. Riß 3. Spitze



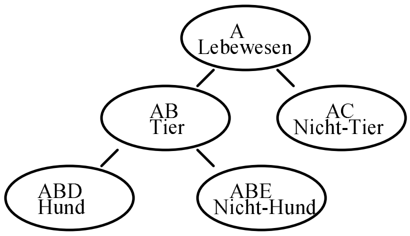
Aus den Strukturverhältnissen und den eingesetzten Beispielsbegriffen ergibt sich ohne weiteres, welche Urteile bzw. Definitionen in den jeweiligen Konstellationen abgelesen werden können. Ebenso sieht man, daß in der Leiter reine Subsumptionsverhältnisse der beteiligten Gattungs-, Art- und Unterartbegriffe vorliegen; im Riß ein Subsumptionsverhältnis einer Unterart zur Art und ein Distinktionsverhältnis beider zu einer Gegenart, das durch die Negation dargestellt wird. Schließlich ergeben sich in der Spitze zwei Subsumptionsverhältnisse von Arten zur Gattung und das negative Distinktionsverhältnis der Arten untereinander.

Wir müssen betonen, daß diese drei Konstellationen, die wir auch syllogistische Figuren nennen können, keineswegs mit den drei "aristotelischen Figuren" übereinstimmen. Vielmehr gilt, daß die nach der Scholastik gültigen 19 Modi auf alle diese neuen Figuren verteilt sind. Die Verteilung zeigt aber, daß immer wieder dieselben Subsumptions- und Distinktionsverhältnisse in verschiedenen logischen Urteilen ausgesprochen werden. Allein in der Leiter spielen 9, im Riß 6, und in der Spitze 4 von den 19 Modi, die im lateinischen Merkspruch der Modi genannt werden.

Um den Mechanismus durchschaubar zu machen, wollen wir die klassischen Modi in den neuen Figuren vorführen und wiederum die Verknüpfungsverhältnisse in den Konstellationen angeben.

a. Die syllogistischen Modi in der Leiter:

Pyramidales Muster



Konstellation

Verhältnis der drei syllogistischen Begriffe zueinander:
A Gattung
AB Art, AC negative Nebenart
ABD Unterart, ABE negative Neben-Unterart.

Die Nebenarten AC und ABE wurden in die Leiter eingetragen, weil sie in einigen der Modi entgegen der Voraussetzung, daß nur drei Begriffe vorkommen sollten, mitbenutzt werden. Auch die Scholastiker haben die stillschweigende Einführung eines vierten Begriffes in den Syllogismus, und zwar bei der Einsetzung eines homonymen (doppeldeutigen) Begriffs als Mittelbegriff, schon als Fehler der "*Quaternio terminorum*" (Vervierfachung der Begriffe) diagnostiziert. Unbemerkt blieb die Begriffsvermehrung aber in den Fällen, wo eine partikularisierende Quantifikation oder ein negativ bezeichneter Begriff auf eine außerhalb der drei in den Figuren zulässigen Begriffspositionen verweist.

Die Mittelbegriffe sind oblique geschrieben. Die partikulären Urteile ("Definition!") müßten logisch streng genommen als Äquivalenzen formuliert werden (z. B. "einige Lebewesen, d. h. Hunde").

1. Barbara:	alle *Tiere* sind Lebewesen.	Art zur Gattung
	alle Hunde sind *Tiere*.	Unterart zur Art
	alle Hunde sind Lebewesen.	Unterart zur Gattung
2. Bamalip:	alle *Tiere* sind Lebewesen.	Art zur Gattung
	alle Hunde sind *Tiere*.	Unterart zur Gattung
	einige Lebewesen sind Hunde.	Gattung zur Unterart (Definition!)
3. Darapti:	alle *Hunde* sind Lebewesen	Unterart zur Gattung
	alle *Hunde* sind Tiere.	Unterart zur Art
	einige Lebewesen sind Tiere.	Gattung zur Art (Definition!)
4. Baroco:	alle Hunde sind *Tiere*.	Unterart zur Art
	einige Lebewesen sind Nicht-*Tiere*.	Gattung zur negativ definierten Art
	einige Lebewesen sind Nicht-Hunde.	Gattung zur negativ def. Unterart
5. Datisa:	alle *Tiere* sind Lebewesen.	Art zur Gattung
	einige *Tiere* sind Hunde.	Art zur Unterart (Definition)
	alle Hunde sind Lebewesen.	Unterart zur Gattung
6. Darii:	alle *Hunde* sind Tiere.	Unterart zur Art
	einige Lebewesen sind *Hunde*.	Gattung zur Unterart (Definition)
	einige Lebewesen sind Tiere.	Gattung zur Art (Definition)

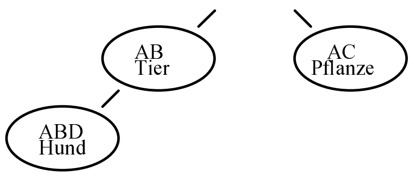
7. Dimatis:	einige Tiere sind *Hunde*.	Art zur Unterart (Definition)
	alle *Hunde* sind Lebewesen	Unterart zur Gattung
	einige Lebewesen sind Tiere.	Gattung Art (Definition)
8. Disamis:	einige *Tiere* sind Hunde.	Art zur Unterart (Definition)
	alle *Tiere* sind Lebewesen.	Art zur Gattung
	einige Lebewesen sind Hunde.	Gattung zur Unterart (Definition)
9. Bocardo:	einige *Tiere* sind Nicht-Hunde.	Art zur negativ def. Unterart
	alle *Tiere* sind Lebewesen	Art zur Gattung
	einige Lebewesen sind Nicht-Hunde.	Gattung zur negativ def. Unterart

Dazu ist zu bemerken: Wir haben *Datisi* oben als Datisa notiert. Die Konklusion in Datisi lautet: einige Hunde sind Lebewesen. Dadurch würde ein unzulässiger vierter Begriff (nämlich eine Unter-Unterart) in den Syllogismus eingeführt Überdies wäre die Konklusion falsch, wie man unmittelbar versteht, und wie sich auch aus der *Gegenprobe bei Negation* zu solchen falsch partikularisierten "Urteilen" ergibt. Zu jedem wahren "partikularisierten Urteil" (die aber u. E. Definitionen sind) gibt es eine "wahre" Verneinung, genauer eine gleichwertige negative Definition. Die Gegenprobe bei Datisi würde ergeben: "einige Hunde sind (d. h.) nicht Lebewesen", was hier offensichtlich ebenso "falsch" wäre wie die positive Partikularisierung.

Bei *Baroco* sind zwei Begriffe durch Negation positiver Begriffe eingeführt worden. Da man zu ihrer Definition die positiven Begriffe benötigt, sind in diesem Modus fünf Begriffe im Spiel. Der Modus Baroco ist daher zwar ein gültiger Schluß, aber kein echter Syllogismus, da ein solcher nur drei Begriffe enthalten soll. Er kann also nicht in der Leiter alleine dargestellt werden. Bei *Bocardo* gilt desselbe für einen vierten negativen Begriff.

b. Die syllogistischen Modi im Riß:

Pyramidales Muster *Konstellation der Begriffe*



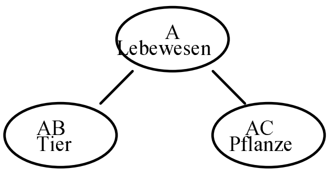
10. Camestres:	alle Hunde sind *Tiere*	Unterart zur Art
	keine Pflanze ist *Tier*	Nebenart zur Art
	keine Pflanze ist Hund	Nebenart zur Unterart der Art
11. Calemes:	alle Hunde sind *Tiere*	Unterart zur Art
	kein *Tier* ist Pflanze	Art zur Nebenart
	keine Pflanze ist Hund	Nebenart zur Unterart der Art
12. Cesare:	keine Pflanze ist *Tier*	Nebenart zur Art
	alle Hunde sind *Tiere*	Unterart zur Art
	kein Hund ist Pflanze	Unterart der Art zur Nebenart

13. Celarent:	kein *Tier* ist Pflanze	Art zur Nebenart
	alle Hunde sind *Tiere*	Unterart zur Art
	kein Hund ist Pflanze	Unterart der Art zur Nebenart
14. Ferisen:	kein *Tier* ist Pflanze	Art zur Nebenart
	einige *Tiere* sind Hunde	Art zur Unterart (Definition)
	kein Hund ist Pflanze	Unterart der Art zur Nebenart.
15. Fresisen:	keine Pflanze ist *Tier*	Nebenart zur Art
	einige *Tiere* sind Hunde	Art zur Unterart (Definition)
	kein Hund ist Pflanze	Unterart der Art zur Nebenart.

Auch hierzu ist zu bemerken: *Ferison* und *Fresison* nach Art der klassischen Modi führen durch die Partikularisierung in der Konklusion jeweils unzulässige vierte Begriffe ein. Überdies scheint die Partikularisierung wie im Falle von Datisi nur wegen der Vorsichtsregel "in debiliorem" vorgenommen worden zu sein. Sie ist in jedem Falle falsch, wie auch die Gegenprobe zeigt. Gültig und mit nur drei Begriffen notierten wir daher Ferisen und Fresisen.

c. Die syllogistischen Modi in der Spitze

Pyramidales Muster — *Konstellation der Begriffe*



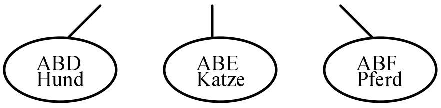
16. Ferio:	kein *Tier* ist Pflanze	Art zur Nebenart
	einige Lebewesen sind *Tiere*	Gattung zur Art (Definition)
	einige Lebewesen sind Nicht-Pflanze	Gattung zur Nebenart (neg. Def.)
17. Felapton:	kein *Tier* ist Pflanze	Art zur Nebenart
	alle *Tiere* sind Lebewesen	Art zur Gattung
	einige Lebewesen sind Nicht-Pflanze	Gattung zur Nebenart (neg. Def.)
18. Festino:	kein Tier ist *Pflanze*	Art zur Nebenart
	einige Lebewesen sind *Pflanzen*	Gattung zur Nebenart (Definition)
	einige Lebewesen sind Nicht-Tiere	Gattung zur neg. def. Art.
19. Fesapo:	kein Tier ist *Pflanze*	Art zur Nebenart
	alle *Pflanzen* sind Lebewesen	Nebenart zur Gattung
	einige Lebewesen sind Nicht-Tiere	Gattung zur neg. def. Art

Ebenso wie die drei aristotelischen Figuren durch Galen um eine vierte vermehrt wurden, können wir auch unseren drei neuen Figuren eine vierte hinzufügen. Sie wurde durch die 4. Regel, daß aus zwei negativen Prämissen kein Schluß folge, ausgeschlossen, da sie bei unbedachter Anwendung auf Begriffe, die im Gattungs-Art-Unterartverhältnis zueinander stehen, zu falschen Konklusionen führen. Unter der

Voraussetzung, daß nur strikt nebengeordnete Begriffe (Nebenarten, Neben-Unterarten) zugelassen werden, ergibt sich die 4. Figur einer "Kette" als nur negativen Urteilen.

d. syllogistische Modi in der Kette:

Pyramidales Muster — *Konstellation der Begriffe*



20. keine *Katze* ist Pferd
kein Hund ist *Katze*
kein Hund ist Pferd

im Beispiel sämtlich: Nebenunterart zu Neben-Unterart

21. kein Pferd ist *Katze*
kein Hund ist *Katze*
kein Hund ist Pferd

22. keine *Katze* ist Pferd
keine *Katze* ist Hund
kein Hund ist Pferd

23. Kein Pferd ist *Katze*
keine *Katze* ist Hund
kein Hund ist Pferd

Daß auch solche rein negativen (syllogistischen) Schlüsse in der logischen Praxis von erheblicher Bedeutung sind, dürfte auf der Hand liegen. Sie spielen bei der Feststellung von logisch gleichrangigen Sachverhalten, ihrer Unterscheidung (durch Negationen) und ihrer Koordination eine wichtige Rolle. Insbesondere sind sie ein Prüfmittel dafür, daß keiner der vorkommenden Begriffe einen der übrigen impliziert. Ist dies nämlich der Fall, so ergeben sich falsche Konklusionen in der Riß-Konstellation: z. B. kein Hund ist Pflanze / keine Pflanze ist Tier / kein Hund ist Tier. Diese werden durch die Regel 4 vorsichtshalber ausgeschlossen. Auf der Ebene gleichrangiger Arten bleibt die Kette dagegen gültig: kein Tier ist Pflanze / keine Pflanze ist Mineral / kein Mineral ist Tier, usw.

Das komplizierte Syllogismenspiel und seine etwas aufwendige Betrachtung sollte gezeigt haben, worauf es dabei ankommt und überhaupt nur ankommen kann. Es geht darum, die Lage von drei Begriffen in einer pyramidalen Konstellation zu fixieren. Solange man dies in der pyramidalen Notation formal darstellt, kann es nur zum Lernen und Einprägen der Pyramidenstruktur selbst mittels der Lesungen in den klassischen Urteilsformen dienen. Bei der Anwendung dieser Modi auf inhaltliche Begriffe wird man sich zunächst Rechenschaft über deren Verhältnis zu einander ablegen und ihnen somit gleichsam eine pyramidale Konstellation aufzwingen.

Das ist bei Gegenständen des Alltagsumgangs gewöhnlich höchst trivial, bei sog. "abstrakten Begriffen" jedoch oftmals eine recht schwierige Angelegenheit. Wer sich z. B. über "Güter" und "Werte" klar werden will, der muß sich die Frage stellen, ob die Güter Arten von Werten oder umgekehrt die Werte Arten von Gütern sind, oder ob sie beide evtl. nebengeordnete Arten einer gemeinsamen Gattung sind, für die er vielleicht nicht einmal eine Bezeichnung angeben kann. Und je nachdem wird er sich dann auch über die Unterarten von Gütern bzw. von Werten klar werden müssen. Naturgemäß gibt es darüber verschiedene Meinungen, die zu Theorien konsolidiert sind. Und je nachdem, worauf er sich festlegt, wird er die eine oder andere Theorie für sich explizieren und zu denjenigen Folgerungen gedrängt, die sich aus der jeweiligen Theorie ergeben.

Die syllogistischen Modi sind jeweils nur dazu geeignet, die Konstellation von drei Begriffen zu artikulieren. Damit verfügt man jedoch immer nur über einen thematischen Ausschnitt aus umfassenderen pyramidalen Konstellationen, in denen noch grundsätzlich unbegrenzt weitere Begriffe thematisiert werden können. Es liegt auf der Hand, daß jeder hinzugenommene Begriff sich nach denselben schematischen Modi mit zweien vorab geklärten in ein neues Verhältnis bringen läßt. Bildlich gesprochen bedeutet das: Man verschiebt die Figuren innerhalb der Pyramide nach Bedarf nach oben, um allgemeinere Begriffe ins Spiel zu bringen, oder nach unten, um "konkretere" Spezifikationen zu klären, oder nach den Seiten, um weitere Abgrenzungen und Distinktionen vorzunehmen. Dieses Verfahren wird gewöhnlich als Aneinanderfügen von Schlußketten beschrieben. Ist einem das Verfahren gewissermaßen in Fleisch und Blut übergegangen, so kann man damit leicht ziemlich ausgedehnte Begriffsbestände logisch überblicken, in "Enthymemen" und "Epicheiremata" (stillschweigenden Schlußketten und "Kurz-Schlüssen") argumentieren und sich dadurch den Gehalt einer ganzen Theorie zueigen machen, die man - subjektiv - für die wahre hält.

Stößt man bei konsequenter Anwendung des syllogistischen Verfahrens auf unbenannte Begriffspositionen in seiner Pyramide, so wird man diese durch neue Termini markieren und dadurch den wissenschaftlichen Sprachschatz erweitern. Häufiger aber stößt man auf Mehrfachterminologisierung derselben Begriffspositionen. Dann sollte man nicht davor zurückscheuen, sie als Synonyme eines und desselben Begriffs zu behandeln. Nicht immer gibt es da, wo verschiedene Termini (man sagt freilich gerne "Begriffe") zur Verfügung stehen, auch Verschiedenes zu denken. Ganz abwegig ist daher auch die in der neueren Logik und Sprachtheorie verbreitete Meinung, die Sprache und ihre Wörter seien Maß und Grenze unserer Denkmöglichkeiten, und was nicht irgendwie verwortet sei, könne auch nicht gedacht werden. Wer in der Begriffspyramide zu denken gelernt hat, wird schnell über solche Grenzen hinausgedrängt und auch dort noch weiterdenken, wo die Sprache mit ihrem Wortmaterial längst versagt.

Eine Grenze des syllogistischen Begriffsklärungsverfahrens liegt freilich dort, wo man auf widersprüchliche Begriffe stößt. Dies passiert bei der Prüfung von Theorien dann, wenn sich ein Begriff einer Theorie als widersprüchlich herausstellt, indem er bei der Verwendung in Urteilen widersprüchliche Urteile hervorbringt. Aristoteles hat allerdings schon gewußt, daß widersprüchliche Begriffe in Syllogismen solange unschädlich - und das heißt auch unbemerkt - bleiben können, als sie im Mittelbegriff stehen, denn dann fallen sie bei der Konklusion heraus. Auch als Gattungsbegriffe sind sie solange unschädlich, als man sich nur an eine der beiden Intensionen hält, die in ihnen (als spezifische Differenzen von Nebenarten) verschmolzen sind. Man kann vermuten, daß es daran lag, daß trotz der jahrhundertelangen Überprüfung des Begriffsschatzes der Philosophie soviele Begriffe davor bewahrt wurden, als contradictiones in terminis entlarvt zu werden.

Es kann daher auch nicht verwundern, daß die syllogistische Begriffsprüfung in Verfall geriet, als Kant in der "Kritik der reinen Vernunft" die von ihm sog. transzendentalen Vernunftideen als widersprüchliche Begriffe auswies, was freilich vor ihm auch schon Nikolaus von Kues getan hatte. Dieser berief sich aber für seine "coincidentia oppositorum" nicht auf die Logik, sondern auf die Mathematik. Kant zeigte sich allerdings nicht ganz auf der Höhe der von ihm so gerühmten und für abgeschlossen gehaltenen aristotelischen Logik, als er behauptete, aus diesen widersprüchlichen Ideen ließen sich einerseits zwei gleichfalsche ("mathematische Antinomien"), andererseits zwei gleichwahre ("dynamische Antinomien") Urteile ableiten, während doch ersichtlich aus dem Widerspruch immer ein wahres und ein entgegengesetztes falsches Urteil folgt. Im sich ausbreitenden nachkantischen "dialektischen Denken" spielte dann auch die Syllogistik keine Rolle mehr. An ihre Stelle traten nunmehr die logischen Verfahren der Induktion und Deduktion zur Prüfung der Logizität von Theorien.

Ebenso findet die syllogistische Begriffsprüfung an den Theorien der Mathematik - und durch deren Anwendung in der Physik als "mathematischer Logik" auch bei den Theoriebeständen der Physik - eine Grenze. Auch hier ist die Nichtanwendbarkeit der Syllogistik durch die dialektische Natur der Grundbegriffe sowohl der Mathematik als auch der Physik bedingt. Um deren "Logizität" zu prüfen, bedarf es eben derjenigen logischen Methoden, die durch Leibniz und seine Nachfolger im 19. Jahrhundert (wie Boole, Frege u. a.) als mathematische Logik etabliert worden sind.

b. Die stoische Schlußlehre.

Sie hat sich besser als die aristotelische Syllogistik bis in die neuere Logik erhalten. Und zwar in solchem Maße, daß man viele vorgeblich neue Einsichten im Nachhinein als schon von den Stoikern vorweggenommene ausdeutet.

Im Gegensatz zur aristotelischen Logik haben die Stoiker die Logik im Zusammenhang mit sprachphilosophischen Erwägungen ausgebaut. Sie sind bekanntlich auch die Väter der abendländischen Grammatik gewesen. Das läßt schon darauf schließen, daß sie über die logischen Elemente von Begriff, Urteil und Urteilsverknüpfung hinaus vor allem das sprachliche Argumentieren in diesen logischen Formen zum Thema machten. Und dies dürfte wiederum der Grund dafür sein, daß sie mit solcher Selbstverständlichkeit zwei verschiedene Wahrheitskonzeptionen zugleich annahmen, nämlich eine sprachlich-argumentative und eine rein logisch-strukturelle. Terminologisch unterschieden sie hier das einzelne bzw. konkrete Wahre einer Sachverhaltsbeschreibung von der allgemeinen formellen Wahrheit. Ersteres entspricht sehr deutlich einem semantischen Wahrheitsbegriff der Korrespondenz von Sachverhalt und sprachlicher Aussage darüber, letzteres einem formalen Wahrheitsbegriff der Kohärenz logischer Formen.

Anders als Aristoteles, aber darin Platon verwandt, suchten sie die formale Wahrheit schon in den richtigen Begriffen, die sie ja als logoi spermatikoi bzw. koinai ennoiai (lat. notiones communes) oder als "eingewurzelte Ideen" und Mitgift der Weltvernunft (Pneuma) bei allen vernünftigen Lebewesen voraussetzten. Daher ihre sprachwissenschaftliche Begründung der sogenannten *Etymologie* als Erforschung der zugleich ursprünglichen wie auch "wahren" Wortbedeutungen. Diese Einstellung ist uns im "transzendentalen Apriorismus" seit Kant auch in der Logik erhalten geblieben. Kant hat sich bekanntlich scharf dagegen verwahrt, seine Lehre vom Apriori hätte auch nur das geringste mit Platons eingeborenen Ideen zu tun. Gegen stoische Erbschaften, die auch sonst in seinem Werke zur Wirkung gekommen sind, hat er sich aber nicht ausgesprochen.

Konsequenterweise stellten die Stoiker dann auch die Verknüpfung von (für wahr gehaltenen) Begriffen zu formal (für wahr oder falsch gehaltenen) Ausdrücken mittels der Junktoren in den Mittelpunkt ihrer Untersuchungen. Wir haben ihre Beiträge schon bei der Behandlung der "Urteilsformen" (die aber bei ihnen neben eigentlichen Urteilen auch Ausdrucksformen enthalten) berücksichtigt. Auffällig an ihrer Urteilslehre ist allerdings, daß sie keinen besonderen Begriff vom Widerspruch entwickelt haben. Stattdessen reden sie von vielerlei Formen von Gegensätzen, unter denen dann faktisch auch die kontradiktorischen vorkommen. Sie haben zwar auch die Logik (bzw. Dialektik, wie sie es nannten) als "Wissenschaft vom Wahren, dem Falschen und von dem, was keines von beiden ist" definiert (vgl. J. M. Bochenski, Formale Logik, S. 126), aber das "keines von beidem" verstanden sie als das schlechthin Nichtlogische. Und soweit sie sich mit den von der megarischen Schule - ihren Lehrmeistern - herabgeerbten Paradoxen befaßten, hielten sie diese für sinnlose Verlautbarungen. Auch diese Einstellung hat sich bei vielen Logikern darin erhalten, daß sie alles Widersprüchliche als "sinn- und bedeutungslos" oder als "absurd" erklären.

Die Folge dieser Einschätzung war, daß sie nicht nur die Urteile, sondern eben auch die Ausdrücke grundsätzlich nur für entweder wahr oder falsch halten mußten. Ein Drittes konnte es nicht geben. Da sie den Urteilswiderspruch als sinnlose Wortfolge aus der Logik ausschlossen, mußten sie einem adjunktiven Urteil, bei dem ein Teilglied eine falsche, das andere eine wahre Aussage war, einen Wahrheitswert zulegen, und sie schlugen in diesem Falle die Falschheit vor. Das lief aber darauf hinaus, den Widerspruch auf diesem Wege wieder in ihre Logik einzuführen und ihn ebenso wie die aristotelischen Logiker als falsch zu definieren. Man sieht daran, wie sie bei aller vorgeblichen Ausweisung des Widerspruches aus der Logik selbst einem widersprüchlichen Verfahren der Definition von Satzwahrheit und Satzfalschheit aufsaßen.

Dasselbe gilt für ihre Definition der Urteilsalternative: Sie ist wahr, wenn ein Teilsatz falsch, der andere wahr ist. Und wiederum gilt es von ihrer Definition der Implikation, die sie von Philon von Megara übernommen hatten, und die seither in der Logik kanonisch geworden ist: Sie sei nur falsch, wenn eine Wahrheit eine Falschheit impliziere; wahr aber in den drei Fällen, daß eine Wahrheit eine andere Wahrheit, eine Falschheit eine Wahrheit oder eine Falschheit eine Falschheit impliziere. Daran ist hier nur zu erinnern, denn es ist Grundlage auch noch heutiger aussagenlogischer Wahrheits- und Falschheitsdefinitionen von Urteilen und Schlüssen geblieben.

Wie man an der Urteilslehre der Stoiker sehen kann, haben sie den sogenannten Wahrheitswert der (aus Ausdrücken) zusammengesetzten Sätze von den Wahrheitswerten ihrer elementaren Komponenten unterschieden. Das ist der seither in der Logik kanonische Gedanke einer Stufenunterscheidung von Wahrheiten und Falschheiten, der in den Metatheorien (insbesondere in B. Russells Typentheorie) der Wahrheit noch weiter ausgebaut worden ist. Da er sich stoischer Tradition verdankt, in der der Widerspruch nicht vorkommen darf, hat man auch nie darauf geachtet, daß er selbst einen Grundwiderspruch enthält. Er zeigt sich darin, daß die Meta-Wahrheitswerte der zusammengesetzten Sätze einerseits von den Wahrheitswerten der einfachen "Elementar"-Sätze abhängig gemacht und von diesen unterschieden werden, andererseits zugleich ebenfalls Wahrheitswerte sein sollen, da sie ja den Gesamtwahrheitswert der Gesamtaussage ausmachen.

Indem sie nun die Wahrheit bzw. Falschheit der einfachen Sätze (unter die sie wohlgemerkt auch Ausdrücke zählten) von der Junktur der Begriffsverknüpfung abhängig machten, haben die Stoiker in ihrer Schlußlehre konsequenterweise versucht, die Wahrheit und Falschheit umfassenderer Satzverknüpfungen wiederum von der Junkturart der Teilsätze abzuleiten. In der Tat haben sie dabei durch Ausprobieren herauszufinden gesucht, welche Verknüpfungen von Urteilen sich als wahre auszeichnen ließen. Und was sie dabei herausfanden nahmen sie als Muster für ähnliche Verhältnisse.

Dies Verfahren führte sie zur Aufstellung ihrer heute sogenannten 5 "Unbeweisbaren" (anapódeiktoi, lat. indemonstrabile). Man nennt sie heute "unbeweisbar", weil man es von Aristoteles her kennt, daß die Beweisgrundlagen bzw. die "Axiome" einer Disziplin nicht selbst wiederum bewiesen werden können oder nicht bewiesen zu werden brauchen, was ja in der modernen Logik und Mathematik beibehalten wurde. Was die Bezeichnung aber genau besagen soll, ist bisher etwas dunkel geblieben (vgl. dazu M. Frede, die Stoische Logik, Göttingen 1974, S. 127 ff.). Und das umso mehr, als die Stoiker nicht nur die fünf Grundformen der Schlüsse "anapódeiktoi" nannten, sondern auch alle, die sich daraus ableiten lassen.

Da wir aber schon gezeigt haben, daß sie mit ihren Begriffen und behauptenden Aussagen immer auf ein reales "Tygchanon" (worauf etwas "zutrifft") abzielten, die Schlußformen sich aber nicht auf ein solches Tygchanon beziehen lassen, dürfte sich die Sache leicht erklären. Ihre Begriffe und Aussagen hielten sie selbstverständlich für "aufzeigbar" (apódeikton) in einer jeweiligen Situation, wofür dann auch gelegentlich der Zeigefinger oder die Partikel "dieser", "jetzt", "hier" diente. Damit redeten sie immer über das sinnlich "Anschauliche" und "Wahrnehmbare". Im Gegensatz dazu kann es wohl nur gemeint sein, daß sie die Wahrheit bzw. Gültigkeit einer Schlußform nicht für "aufzeigbar" in der angegebenen Weise, sondern für "unanschaulich" hielten. Dies besonders in den Fällen, wo mittels der Schlüsse etwas "Verborgenes erschlossen" werden sollte, das man während der Äußerung des Arguments nicht sehen konnte. Ihr immer wiederkehrendes Beispiel ist das Erschließen der (unsichtbaren) Poren in der Haupt, auf deren Existenz aus dem Hervortreten des Schweißes, der sichtbar ist, geschlossen werden kann.

Das erklärt nebenbei auch, worum sie nur bei diesen Schlüssen eine Formalisierung mit "das Erste (Alpha) ... das Zweite (Beta)" (A und B sind im Griechischen auch Zahlzeichen!) verwendeten, die Aussagen und Begriffe aber nicht durch formale Zeichen darstellten. Nennen wir die stoischen Grundformen der Schlüsse also nicht "Unbeweisbare", denn sie zu beweisen haben die Stoiker gar nicht erst versucht, sondern "die unanschaulichen" Schlußformen oder kurz "die Unanschaulichen". Sie sind ja offensichtlich selber für alle spätere Logik ein Argument dafür geworden, daß man es in allem Formalen der Logik mit dem "Unanschaulichen" zu tun hätte. Daß wir aber keineswegs dieser Meinung zustimmen, haben wir schon dadurch gezeigt, daß wir auch die angeblich "Unanschaulichen" im Formalismus selbst veranschaulicht haben.

Die fünf "Unanschaulichen", die Chrysipp wohl nach Vorarbeiten seiner Vorgänger zusammengestellt hat, lauten wie folgt:

Formale Gestalt	*Stoische Beispiele*
1. Wenn A, dann B	wenn es Tag ist, ist es hell
nun A	nun ist es Tag
also B	also ist es hell
2. Wenn A, dann B	wenn es Tag ist, ist es hell
nun nicht B	nun ist es nicht hell
also nicht A	also ist es nicht Tag
3. Nicht: A und B	nicht: Tag und Nacht (zugleich)
nun A	nun ist es Tag
also nicht B	also ist es nicht Nacht
4. Entweder A oder B	entweder ist es Tag oder es ist Nacht
nun A	nun ist es Tag
also nicht B	also ist es nicht Nacht
5. Entweder A oder B	entweder ist es Tag oder es ist Nacht
nun nicht B	nun ist es nicht Nacht
also A	also ist es Tag.

Ihre Schlußlehre führten die Stoiker als "Lehre von den Argumenten" (logoi) ein, die in sprachlichen Argumentationen als "gültige" Verknüpfungsgestalten von Begriffen und Ausdrücken benutzbar sein sollten. Gültige Argumente nannten sie auch "gesund" (hygies). In allen Fällen geht es bei diesen "Argumenten" um die Verknüpfung von nur zwei Begriffen (bzw. Ausdrücken, die sie ja als Aussagen behandelten), und dies macht den wesentlichen Unterschied zur aristotelischen Syllogistik aus, bei der es ja um drei zu verknüpfende Begriffe geht.

Jede "Unanschauliche" gilt ihnen als formale Lösung einer Problemstellung bzw. einer Aufgabe (Lemma). Für die jeweilige Problemlösung bedarf es einer Voraussetzung (proslepsis, den syllogistischen "Prämissen" entsprechend), um daraus einen "Schluß" (epiphora) zu gewinnen. Das Wort Epiphora (wörtlich "Übertragung") insinuiert, daß es im Schluß um die Übertragung der Beweiskraft der formalen (unanschaulichen) Prämisse auf das tatsächliche Verhältnis zwischen den thematischen (anschaulichen) Begriffen bzw. Aussagen ankommen soll.

Die Formalisierung dieser "Unanschaulichen" mit dem griechischen Alpha und Beta mag von Aristoteles übernommen sein. Wenn dies so war, gaben die Stoiker damit zu erkennen, daß sie das, was man "Aussagen" nennt, selbst als komplexe Begriffe und Ausdrücke angesehen und formalisiert haben. Da Alpha und Beta im Griechischen zugleich auch Zahlzeichen waren, nämlich Eins und Zwei, konnte man darunter auch eine zahlenmäßige Abfolge verstehen. Und das ist in der Geschichte der Logik so übernommen worden. Man übersetzt die formalen Ausdrücke gewöhnlich mit "wenn ein Erstes, dann ein Zweites. Nun das Erste. Also das Zweite".

Bei den Begriffen berücksichtigten die Stoiker, wie wir in der Begriffslehre schon gezeigt haben, nicht den logisch-extensionalen Aspekt der Begriffe. Was bei Aristoteles als extensionaler Teil von Begriffen dargestellt wird, mittels dessen die höheren Begriffe auf untere Begriffe in ihrem eigenen Umfang verweisen, das faßten die Stoiker direkt als "semantische" Beziehung der Begriffe und Ausdrücke auf reale Sachlagen, auf die Wirklichkeit selber auf. Und sie verdeutlichten diesen Wirklichkeitsbezug stets durch inhaltliche Beispiele der Anwendung der Begriffe. In den fünf "Unanschaulichen" wird der Wirklichkeitsbezug explizit erst durch die formelhafte Partikel. "nun aber ..." ausgedrückt. Das ist kein Junktor, wohl aber läßt er sich durch den Existenzjunktor ersetzen, und letzterer hat wohl auch von daher seinen Namen erhalten.

Das läßt jedenfalls ihre Kategorienlehre vermuten, bei denen sie das Allgemeinheitsgefälle nicht durch Gattung, Arten und Unterarten darstellten, sondern nur die Vermehrung der Intensionen in den untergeordneten Kategorien herausstellten. Als oberste Kategorie bzw. allgemeinsten Begriff, wie vorne schon gezeigt, nahmen sie "Hypokeimenon" (Substanz, Zugrundeliegendes) Als untergeordnete Spezifikation galt ihnen die "qualifizierte Substanz" (poion hypokeimenon). Nächst untergeordnet war ihnen dann eine sich in "bestimmter Weise verhaltende" qualifizierte Substanz (pos echon poion hypokeimenon). Daran schloß sich als unterste Kategorie die "in Relation stehende" sich in bestimmter Weise verhaltende qualifizierte Substanz an (pros ti pos echon poion hypokeimenon). Es handelt sich ersichtlich um eine eindimensionale Hierarchie von zunehmend spezifizierten Begriffen, bei der die Stoiker sehr richtig die Inhärenz aller (generischen) Intensionen der oberen in den unteren Kategorien beachteten. Aber sie teilten diese Begriffe nicht in nebeneinanderstehende Arten und Unterarten auf.

Dadurch entging ihnen die Möglichkeit, gleichrangige Artbegriffe durch Negationen voneinander abzugrenzen. Ebensowenig konnten sie das Allgemeinheitsgefälle durch logische Quantifizierungen markieren. Man findet jedenfalls davon keine Spur bei ihnen. An ihrer Stelle setzten die Stoiker immer sogleich die entsprechenden "ganzen Begriffe" selbst ein. Das ist wohl auch der Grund, warum sie die aristotelische Syllogistik mit ihrem Spiel der partikularisierten Urteile bzw. Definitionen grundsätzlich abgelehnt haben.

Setzt man bei ihnen diese Begriffslehre voraus, so versteht sich auch von daher, daß sie "Aussagen" im wesentlichen als komplexe Begriffe und Ausdrücke ansahen. So konnte sich ihre Urteilslehre auch nur darauf konzentrieren, einerseits die Implikationsverhältnisse von Intensionen (Merkmalen) in den Begriffen offenzulegen und andererseits die Geeignetheit von Begriffen für eine "wahre" Situationsbeschreibung zu untersuchen. Daß es ihnen nicht, wie Aristoteles, um den Aufbau von Theorien und die syllogistische Prüfung der intensional-extensionalen Verflechtung der Theoriebegriffe ging, sieht man an ihren immer sehr konkreten Beispielen von Situationen, in denen ein Beurteiler "hier und jetzt" zu einem empirischen Sachverhalt Stellung nimmt. Der konkrete Situationsbezug bestimmte aber nicht nur die Angemessenheit von Begriffen zur Situationsbeschreibung, sondern zugleich auch die Unangemessenheit anderer Begriffe hierzu.

Da die Stoiker sich in ihrer Urteilslehre (genauer: Ausdrucks- und Urteilslehre) so intensiv mit den Definitionen der Junktoren befaßt haben, muß bei ihrer Schlußlehre zunächst auffallen, daß die hier wesentlich verwendeten Partikel "nun" und "also" überhaupt nicht definiert werden. Man hat auch nie nach einer solchen Definition gefragt. Und offenbar deswegen, weil man sie für nur sprachlich variierte Floskeln für eine (wiederholte) Implikation (wenn...dann) hielt. Wenn das aber so wäre, so müßte der eigentliche Schluß ohnehin mit der Prämisse identisch sein. Das ist aber kaum anzunehmen. Wir erklären den Sachverhalt so, daß sie in den Prämissen einen verkappten sprachlichen Konjunktiv (in dem alle Vermutungen und "Hypothesen" sprachlich zu formulieren sind) voraussetzten. Die erste Prämisse der ersten "Unanschaulichen" würde dann lauten: "Falls A wäre, so müßte auch B der Fall sein". Und so auch bei allen anderen. Erst die zweite Prämisse wird dann im Indikativ formuliert, und sie ist dann keine Wiederholung der ersten Prämisse: "Es gibt aber A". Erst dann folgt der Schluß im engeren Sinne: " Also gibt es B".

Dafür ist, wie man sich erinnert, die stoische Auffassung vom Universaldeterminismus im zeitlichen Zusammenhang der Geschehnisse bei Situationen grundlegend. Zu sagen, was hier und jetzt nicht der Fall ist, ist ebenso wahr, wie zu sagen, was tatsächlich der Fall ist. Und ebenso wahr sind daher für sie die Aussagen über das, was zeitlich vorausgehend der Fall gewesen ist oder was kausal notwendig bedingt in Zukunft der Fall sein wird, was aber eben deswegen in der unmittelbaren Gegenwart nicht der Fall ist. Prognose und Retrodiktion vom Jetztzustand aus gehören daher zum bevorzugten Spielmaterial der stoischen Urteilslehre.

Was sie darüber sagten, versteht sich einerseits aus der Ablehnung der aristotelischen These, daß man über Zukünftiges zum gegenwärtigen Zeitpunkt überhaupt keine wahren oder falschen Aussagen machen könne, andererseits in der Anknüpfung an die Thematik des "königlichen Arguments" von Diodoros Kronos aus der megarischen Schule, durch das eine wahre Prognose für Zukünftiges gesichert erschien. Das Problem, daß eine Prognose sich mit dem Eintreffen der prognostizierten Situation gleichsam erledigte (und nicht mehr als wahrer Satz angesehen werden konnte), lösten sie mit der Unterscheidung zwischen "vergänglichen" (phtartá) und "unvergänglichen" (aphtartá) Aussagen.

Was nun die *stoischen Schlüsse* in den Gestalten der fünf "Unanschaulichen" des Chrysipp betrifft, so sind sie, zusammen mit der stoischen Urteilslehre, noch immer so aktuell wie zur Zeit ihrer Erfindung. Und dies aus mehreren Gründen. Einerseits wurden sie in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts geradezu als Vorläufer, ja als Modell der modernen Aussagenlogik wiederentdeckt. Man meinte, daß darin die Anwendung der Junktoren auf zweiwertige (wahre oder falsche) Aussagen abschließend gelungen, und daß dadurch auch die logische Bedeutung der Junktoren ein für allemal definitorisch fest gestellt worden sei. Andererseits liegen speziell die "Unanschaulichen" noch immer dem faktischen Argumentieren, Erklären, Verifizieren und Falsifizieren im wissenschaftlichen Prozedere zugrunde.

Wir möchten jedoch ganz im Gegensatz zur herrschenden Meinung in der Logik behaupten, daß die "Wiederentdeckung" der stoischen Logik nur ein vergeblicher Versuch gewesen ist, eine inzwischen irrational gewordene Logik, deren Grundlagen nicht mehr durchschaubar waren, durch Berufung auf eine lange Tradition zu stützen. Die damit übernommene Voraussetzung, daß die "Unanschaulichen" tatsächlich unbeweisbar seien, und daß dies in der moderenen Logik für alle "axiomatischen" Grundlagen gelten sollte, zeugt gerade von dieser Einstellung.

Wir zeigten schon vorne bei der Behandlung der stoischen Begriffs- und Urteilslehre, daß sich der logische Notwendigkeitsformalismus der "Unanschaulichen" aus der stoischen Voraussetzung des kosmologischen Universaldeterminismus ergebe. Dieser verknüpft Ursachen und Wirkungen in "kausaler" und Wirkungen und Ursachen in "teleologischer" Perspektive. In der Empirie vom einen auf das andere zu "schließen" erklärt ihnen die Welt. Die logische Form dafür aber waren die allen Menschen "angeborenen Unanschaulichen".

Was auch immer die Stoiker empirisch für tatsächliche Ursachen und Wirkungen hielten (und manche Beispiele, vor allem die astrologischen, zeigen, daß sie dabei geradezu abenteuerliche Annahmen machten), so gingen sie doch davon aus, daß Ursachen niemals Ursachen von sich selbst sein könnten. Das zeigt sich darin, daß sie den reflexiven Gebrauch der Implikation (z. B. "Wenn es Tag ist, ist es Tag") für sinnlos hielten. Ebenso kann man vermuten, daß sie nicht einen allgemeinen Begriff für die Ursache eines inkludierten spezielleren hielten oder auch umgekehrt die spezielleren Begriffe nicht für die Ursache der allgemeineren, denn es finden sich keine Beispiele dafür. Und so bleibt für ihre logische Form der Kausalität bzw. der Teleologie nur das übrig, was wir als querverbindenden Korrelationsjunktor oder korrelierende Implikation dargestellt haben. Diese korrelierende Implikation aber jungiert definitionsgemäß zwei im (aristotelischen) Negationsverhältnis nebeneinanderstehende Arten einer dihäretischen Disjunktion. Das aber konnten die Stoiker nicht formal darstellen, da sie ja die platonische und aristotelische Dihärese bei der Begriffsbildung verschmähten. Die "Unanschaulichen" als Schlußformen mit nur zwei Begriffe erscheinen daher geradezu als Kompensation dieses Defizits ihrer Begriffslehre.

Auf diese Begriffslage angewandt, drücken die "Unanschaulichen" in der formalen Charakterisierung "Erstes" und "Zweites" nur aus, welche Verhältnisse zwischen dihäretischen Artbegriffen nach platonisch-aristotelischer Begriffslehre bestehen können. Wir können "logisch" formulieren:

1. Wenn Art dann Nebenart. Nun liegt ein Artbegriff vor, also auch eine Nebenart.
2. Wenn Art dann Nebenart. Nun keine Nebenart, also auch keine Art.
3. Nicht: Art und Nebenart zugleich. Nun (nur) Art, also keine Nebenart.
4. Entweder Art oder Nebenart. Nun (nur) Art, also keine Nebenart.
5. Entweder Art oder Nebenart. Nun keine Nebenart, also (nur) Art.

Diese Interpretation dürfte schon plausibel genug erscheinen, um alle möglichen Fälle des Verhältnisses von Ursachen und Wirkungen in der logischen Gestalt der Korrelation zweier Nebenarten darzustellen, wie wir das vorne bei Behandlung der stoischen Urteilslehre getan haben.

Warum diese Schlußformen "funktionieren", zeigt sich aber erst, wenn man die Funktion der logischen bestimmten Negation, die ebenfalls zwischen dihäeretischen Nebenarten spielt, mitbeachtet. Der in der 2. bis 5. "Unanschaulichen" negierte Artbegriff wird dadurch zum negativen Ausdruck für den anderen positiven Artbegriff. Die "Nicht-Wirkung" bedeutet dann ebenso "Ursache", wie etwa in dihäretischen Begriffslagen "Nicht-Pflanze" = "Tier" oder "Nicht-Frau" = "Mann" bedeutet. Drücken wir es genau so aus, dann lauten die "Unbeweisbaren":

1. Wenn Art, dann Nebenart. Nun Art, also (auch) Nebenart.
2. Wenn Art dann Nebenart. Nun Nicht-Nebenart (= Art), also Nicht-Art (= Neben-Art)
3. Nicht: Art und Nebenart. Nun Art, also Nicht-Nebenart (= Art).
4. Entweder Art oder Nebenart. Nun Art, also Nicht-Nebenart (= Art).
5. Entweder Art oder Nebenart. Nun Nicht-Nebenart (= Art), also Art.

Diese Interpretation zeigt deutlich, worauf die logische Plausibilität der 2 bis 5. "Unanschaulichen" tatsächlich beruht. Nr. 2 ist nur die mit negativ formulierten Begriffspositionen ausgedrückte Nr. 1 und somit mit der korrelierenden Implikation identisch. Nr. 3 negiert nicht etwa die Existenz zweier Begriffe (sonst müßte es "Weder A noch B" heißen), sondern den Adjunktionsjunktor selbst. Man hätte dann für die Epiphora erwarten sollen: Was keine Adjunktion zwischen zwei Begriffen ist, das kann nur eine Alternative sein. Eine solche aber wäre, wie Nr. 4 uznd 5 zeigen, selber nur zur Prämisse geeignet. Also beschränkt sich die Epiphora auf die Feststellung, daß bei nichtvorliegender Adjunktion nur ein Begriff vorliegen kann, der andere aber nicht. Nr 4 und 5 erläutern dies auch explizit anhand der Alternative. Dieses aber sind selbst logische Voraussetzungen der Begriffs- und Ausdrucksbildung, die somit auch den "Unanschaulichen" zugrundeliegen.

Nun bleibt zu erklären, warum in der Aussagenlogik behauptet wird, die Stoiker hätten schon die klassischen Junktoren durchweg als Wahrheitswertbildner definiert, indem sie sie von der Wahrheit oder Falschheit eingesetzter "Elementarsätze" abhängig machten. Diese, wie wir meinen, falsche Meinung, beruht auf der oben schon angesprochenen modernen Voraussetzung eines vorgeblichen Meta-Verhältnisses zwischen Elementarsatzwahrheit (bzw. -Falschheit) und den Wahrheitswerten jungierter Sätze. Die Stoiker haben - mit - Recht keine logische Meta-Stufentheorie angenommen, und ihnen dies dennoch zu unterstellen, beruht auf einem Mißverständnis ihrer Beispiele für die Satzbildung.

Sie haben gewiß Wahrheit und Falschheit als Sachverhalte unterschieden und redeten über den Wahrheits- und den Falschheitsbegriff oder "das Wahre" und "das Falsche". Ihre immer wieder zitierten Sätze aber blieben selbst nur inhaltliche Beispiele, an denen sich die Wahrheit und/oder Falschheit darstellt. Über Wahrheit und Falschheit logisch zu reden, heißt daher auch für die Stoiker, "Wahrheit" und "Falschheit" als zwei Artbegriffe nebeneinanderzustellen und den logischen Formalismus der Ausdrucks- und Urteilsbildungen auf sie anzuwenden. Daher muß auch ihre Einsetzung in die "Unanschaulichen" dazu dienen, ihre logischen Verhältnisse pyramidal zu klären, was sie selber nach ihren Voraussetzungen, die keine Artunterscheidungen zuließen, nicht leisten konnten.

Daneben aber hielten sie, wie vorne schon gesagt, die Begriffe selbst für ihrer empirischen Herkunft oder ihrer Angeborenheit nach für wahr, so daß Falschheit erst durch die Kombination von Begriffen zu Ausdrücken - und das nannten sie eben auch "Aussagen" - zustande kommen konnte.

Wie man weiß, ist die Metastufentheorie (oder auch Sprachtypentheorie) von Bertrand Russell in den "Principia Mathematica" (1910-13) als Vorschlag eingeführt worden, um logische Paradoxien zum Verschwinden zu bringen. Sie ist inzwischen für die gesamte logische Methodologie kanonisch geworden. Wir halten sie indessen für irreführend, anlaßgebend für vielerlei Dunkelheiten und Mystifikationen in der modernen Logik und ihrer Natur nach für dialektisch.

Ihre Dialektik (Widersprüchlichkeit) besteht darin, daß sie einerseits einen und denselben identischen Wahrheits- bzw. Falschheitsbegriff in allen unterschiedenen Objekt- und Metastufen voraussetzt, andererseits jeder Stufe zugleich einen anderen vindiziert. Dadurch wird in allen Metatheorien der Wahrheits- bzw. der Falschheitsbegriff selbst doppeldeutig und widersprüchlich.

Die Metatheorien beruhen sämtlich auf einer Verallgemeinerung der sprachlich-semantischen Verhältnisse, die sich beim Umgang mit Zitaten zeigen. Nicht von ungefährt wird in den Metatheorien ständig von einfachen und mehrfachen Zitatzeichen Gebrauch gemacht, was in der Mathematik dem einfachen oder mehrfachen Klammergebrauch entspricht. Auch von diesem mathematischen Brauch ist ja festzustellen, daß der Inhalt einer Klammer solange nicht interessiert, als der gesamte Klammerausdruck nur als mathematische "Größe" behandelt wird.

Der Behauptungssinn eines behauptenden Urteils drückt zugleich den Wahrheitswert des jeweiligen Satzes aus. Wird der Satz aber zitiert, so muß er einerseits diesen Sinn und Wahrheitswert beibehalten, sonst könnte er nicht verstanden werden. Als zitierter Satz erhält er aber noch einen zusätzlichen Sinn, nämlich eben Zitat zu sein, für dessen Wahrheitswert der Zitierende sich in der Regel nicht verbürgt. Die darin liegende Dialektik zeigt sich beim üblichen Umgang mit Anmerkungen gelehrter Literatur. Wer zitiert, kann sich auf den Wahrheitswert des Zitierten berufen oder auch ganz von diesem absehen. Im ersten Falle behauptet er den zitierten Satz selber, im zweiten aber läßt er den Wahrheitswert des zitierten Satze und damit überhaupt seinen Sinn ganz außer acht. In diesem Falle aber wird der zitierte Satz logischerweise überhaupt seinen Satz- bzw. Urteilscharakter einbüßen. Er wird zu einem puren Faktum oder Datum ohne eigenen Wahrheitswert. Man kann dergleichen zwar ein "Textstück" nennen und damit vielleicht andeuten, daß es überhaupt einen sprachlichen Sinn besitze, aber dieser selbst interessiert dann nicht mehr.

Genau dieses - was ja schon in der scholastischen Suppositionslehre vielfältig festgestellt worden ist - gilt nun aber auch für den Übergang von Elementarsätzen zu komplexen "Aussagen" der Aussagenlogik. Für diese sind die Elementarsätze nur noch Zitate, die logisch als "Ausdrücke" oder "Zitatbegriffe" zu behandeln sind. Der definierte sogenannte Wahrheitswert der komplexen "Aussagen" wird dadurch unabhängig von den Wahrheitswerten der Elementarsätze, und er kann dann ganz beliebig festgesetzt werden. Und dies entgegen der Voraussetzung, daß er gerade von einem vorausgesetzten Wahrheitswert der Elementarsätze abhängig sein soll und deswegen keineswegs beliebig festgesetzt werden kann.

Fassen wir unsere Kritikpunkte an der sogenannten aussagenlogischen Definition der Wahrheitswerte der Junktoren zusammen, so ist zu sagen:

1. Sie unterscheidet nicht zwischen nur ausdrucksbildenden und urteilsbildenden Junktoren und legt somit den ersteren fälschlich einen Wahrheitswert zu.

2. Sie definiert die Wahrheitswerte der meistverwendeten urteilsbildenden Junktoren überhaupt nicht, nämlich Kopula und Existenzjunktor, und die Negation definiert sie nicht nach dem viergliedrigen tabellarischen Schema. Die einzig definierte urteilsbildende Implikation wird nur im philonischen Sinne definiert ("falsch" = "nur wenn das Vorderglied wahr und das Endglied falsch ist", sonst immer "wahr"). Und dafür gibt es keine Begründung außer der, daß sie bis auf Philon aus der megarischen Schule zurückreicht.

3. Sie spricht einerseits im gleichen Sinne von "Wahrheitswerten" der Elementarsätze und der komplexen Aussagen, unterscheidet aber zugleich metatheoretisch zwischen beiden, indem sie in Bezug auf erstere von Wahrheit und Falschheit, in Bezug auf letztere aber nur von "Gültigkeit" bzw. "Geltung" und "Nichtgültigkeit" spricht. Damit werden Wahrheit und Falschheit in einen Gegensatz zu Gültigkeit und Ungültigkeit gebracht, der sachlich nicht begründet werden kann.

4. Da sie in der Hauptsache ausdrucksbildende Junktoren definiert, bleiben auch die meisten komplexen aussagenlogischen Gebilde prinzipiell Ausdrücke, keineswegs aber können sie behauptende Urteilsverknüpfungen sein. Nur die Implikation und die Existenzbehauptung können als Behauptungsaussage behandelt werden. Ersichtlich wird deshalb in der Aussagenlogik auch nur die Implikation als Argumentationsbeispiel verwendet und der Existenzjunktor mit der Äquivalenz vereinigt.

5. Da die Aussagenlogik nur eine einzige Implikationsform kennt, ist sie gezwungen, ihr einen Falschheitswert zuzulegen. Wie wir bei den Junktoren gezeigt haben, kann dieser nur eine Art Durchschnitt der drei von uns unterschiedenen Implikationsformen mit ihren besonderen Falschheitswerten sein. Das führt bei Einsetzungen von Beispielen immer wieder zu Überraschungen. Erst recht verkennt die Aussagenlogik damit, daß es neben den drei Implikationsformen mit Falschheitswerten auch eine allgemeine Implikation geben muß, die keinen Falschheitswert annimmt.

6. Schließlich läßt die Aussagenlogik im Gegensatz zur stoischen Implikationsdefinition die "Selbstimplikation" als Wahrheitswert zu. Diese kann aber logisch nur zu Widersprüchen führen. Sie ist aber zugleich eine wesentliche Voraussetzung für die mathematische Logik geworden, deren Mengen- und Zahlentheorien ohne diese Selbstimplikation nicht explizierbar wäre. Und dies wiederum zeigt, daß der aussagenlogischen Begründung der Mathematik eine Dialektik zugrunde liegt.

Zeigen wir das an der für die ganze moderne semantische Wahrheitstheorie so grundlegend gewordenen metatheoretischen Wahrheitsdefinition Alfred Tarskis (vgl. A. Tarski, Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik, 1944, in: G. Skirbekk, Hg., Wahrheitstheorien. Eine Auswahl aus den Diskussionen über Wahrheit im 20. Jahrhundert, Frankfurt a. M. 1977, S. 140 - 188). Sie definiert "Wahrheit" als metasprachlichen "Namen" (bzw. Begriff) für das Verhältnis, das zwischen dem "Sachverhalt": Der Schnee ist weiß (das ist das Tygchanon) und der behauptenden Aussage: "Der Schnee ist weiß" besteht. Das ist ersichtlich eine stoische Definition des semantischen Korrespondenzbegriffs der Wahrheit. Tarski betont dabei: "Die Aussage 'der Schnee ist weiß' ist wahr genau dann, wenn der Schnee weiß ist".

Da nun Tarski nicht mit dem Finger auf weißen Schnee gezeigt und dabei geäußert hat "der Schnee ist weiß", sondern in seinem rein theoretischen Traktat denselben Satz vom Schnee einmal selbst als Aussage geäußert, das andere Mal als Zitat derselben Aussage (in Anführungszeichen) wiederholt hat, führt seine Wahrheitsdefinition zu einem dialektischen bzw. widersprüchlichen Wahrheitsbegriff. Wahrheit bedeutet einerseits die Identität des Sinnes eines Satzes mit dem Sinn desselben zitierten Satzes. Andererseits bedeutet Wahrheit den Unterschied und damit die Nicht-Identität zwischen Satz und Zitat desselben Satzes.

Folgt man Tarski weiter, so soll der zitierte "Satz" selber kein Satz, sondern ein "Name" für die Aussage über den Schnee sein. Damit behauptet er aber, daß das Zitat gar keine Aussage ist. Und das für ihn wesentliche semantische Korrespondenzverhältnis wird ein solches zwischen einem Namen (sagen wir logisch benevolent:) einem Begriff und einem Behauptungssatz, den er benennt. Das dürfte mit der stoischen Meinung übereinstimmen, daß (anschauliche) Situationsbeschreibungen in "Aussagen" be grifflichen (oder ausdruckshaften) Charakter besitzen. Damit stellt sich Tarski ganz im Gegensatz zu seiner eigenen Behauptung, die "Intentionen" der aristotelischen Wahrheitsbegriffs (vgl. Skirbekk, Wahrheitstheorien, S. 142.) zu definieren, auf den Standpunkt der Stoiker. Denn Aristoteles betont ja immer wieder, daß Begriffe nicht wahrheitswertfähig sein können.

Das bisher Gesagte dient dazu, den Unterschied zwischen "Objektsprache" und "Metasprache" herauszustellen: Was in der Objektsprache eine Aussage ist, wird in der Metasprache zu einem Begriff. Tarski erläutert das nochmals in der scholastischen terminologischen Unterscheidung von suppositio formalis und suppositio materialis. Sodann wird aber das Gegenteil behauptet, nämlich "daß jede Aussage, die in der Objektsprache vorkommt, auch in der Metasprache vorkommen muß. Mit anderen Worten: Die Metasprache muß die Objektsprache als einen Teil enthalten" (Skirbekk, S. 153). Die suppositio materialis der Metasprache wird also identisch mit der suppositio formalis der Objektsprache. Und um das zu zeigen, genüge es, "daß die Objektsprache in die Metasprache übersetzt werden kann" (ibid. S. 153). Man kann sicher auch Zitate übersetzen, aber man übersetzt sie nicht, wenn man nur ihren "Namen" in der Übersetzung nennt und das für genügend hält. Denn nach Tarski soll dafür gelten, "daß die Metasprache reichhaltig genug sein muß, um die Möglichkeit zu bieten, für jede Aussage der Objektsprache einen Namen zu konstruieren" (ibid. S. 153).

Nun macht sich Tarski im zweiten Teil seines Aufsatzes über andere Wahrheitstheorien lustig und gibt sich überzeugt: "ich kann mir nicht vorstellen, daß jemand zwingende Argumente dafür vorbringen könnte, daß die semantische Konzeption 'falsch' sei und vollständig verworfen werden könnte" (Skirbekk, S. 161).

Dazu ist zu sagen: Tarskis Wahrheitstheorie ist zunächst einmal keine logische, sondern eine ontologische Wahrheitstheorie, denn sie beruht auf der "Semantik", d. h. dem Bezeichnen von Sachverhalten durch sprachliche und logische Mittel. Das geht nicht ohne inhaltliches Reden über die Wirklichkeit, wie sein Beispiel vom weißen Schnee zeigt, und wie auch die stoischen Hinweise auf den Situationskontext der Aussagen zeigen. Was logische Wahrheit sein könnte, wird dabei nicht einmal thematisiert.

Auch als "realistische" Korrespondenztheorie der Wahrheit (und das ist eben das "Semantische" an ihr) ist sie wahr und falsch zugleich, d. h. widersprüchlich. Ihr wahrer Anteil liegt darin, daß man eben mit Aussagen wahr über die Wirklichkeit redet, wenn die Wirklichkeit so ist, wie es die Aussage behauptet. Der falsche Anteil der semantischen Korrespondenztheorie aber liegt darin, daß dasselbe "semantische" Verhältnis, das dann aber nicht mehr dasselbe sein kann, auf innersprachliche und rein logische Verhältnisse, nämlich zwischen Begriff und Urteil bzw. Aussage übertragen wird. Mit den Scholastikern zu reden: Die formale Supposition beim "objektsprachlichen" Urteil ist identisch und zugleich nichtidentisch mit der materialen Supposition des "metasprachlichen" Namens.

Ist der semantische Wahrheitsbegriff, wie er in der Metastufentheorie definiert wird, selber widersprüchlich, so muß er eine wahre und eine falsche Komponente enthalten. Die wahre Komponente liegt ersichtlich darin, daß in einer "Aussage" über etwas gesprochen wird, das ausweisbar dem entspricht, was behauptet wird. Die falsche Komponente aber muß dann darin liegen, daß vorausgesetzt wird, die Meta-Aussage über eine Aussage sei überhaupt noch eine Aussage, während sie doch keine Aussage sein kann.

Was die Tarskische Wahrheitstheorie tatsächlich expliziert hat, ist die These: Metasprachliche Sätze sind wahr, wenn sie Zitate wahrer objektsprachlicher Sätze sind. Daß sein objektsprachlicher Satz über den weißen Schnee wahr ist, hat er vorausgesetzt, aber selber nicht erwiesen. Und er hielt dies wohl für entbehrlich, da es sich dabei ja um einen analytischen Satz handelt (man kennt nur weißen Schnee!), den niemand in Frage stellen konnte.

9. Die platonische logische Begründung der Mathematik bei Euklid

Die Mathematik war als Rechen- und Meßkunst in der antiken Welt schon zu hoher Blüte gelangt, als die Philosophie und insbesondere die Logik noch in den Windeln lagen. Auch ihr haben die Vorsokratiker, besonders schon Thales und Pythagoras, wesentliche Hilfestellung bei der Theoretisierung ihrer Praxis geleistet. Platon hat ihr dann eine wesentliche propädeutische Funktion für die Philosophie und jede Wissenschaft eingeräumt und zumal jede Naturwissenschaft auf sie verpflichtet.

Aristoteles hat ihr zwar unter den theoretischen Wissenschaften, die um ihrer selbst willen zu pflegen sind, nach der Metaphysik den zweiten Rang eingeräumt, ihr jedoch keine methodologische Bedeutung für andere Wissenschaften zugemessen. Nach seiner Auffassung gewann sie ihre besonderen Gegenstände durch Abstraktion aus der sinnlichen Erfahrung: Zahlen und ihre Verhältnisse sowie die geometrischen Gebildeverhältnisse sind für ihn Eigenschaften sinnlicher Dinge, und zwar nur, soweit diese als unbewegte betrachtet werden, denn die Bewegung und Veränderung (als Gegenstände der Physik) seien nicht mathematisch zu erfassen. Da sie es mit einfachen und unveränderlichen Gegenständen zu tun habe, könne sie also nicht zur darstellenden Beschreibung und Erklärung der veränderlichen Weltverhältnisse dienen. Und dafür konnte er sich auf Zenon von Elea berufen, der ja paradigmatisch gezeigt hatte, wie die Anwendung der statischen quantitativen Denkformen auf qualitative Sachverhalte und insbesondere Bewegungen zu unauflöslichen Paradoxien führt. Nicht zuletzt dieser Überzeugung verdankt sich wohl auch der Eifer, den Aristoteles auf die Entwicklung der formalen Logik als einer konkurrierenden Theorie qualitativer Denkformen – der Begriffe und ihrer urteils- und schlußmäßigen Verbindung – verwendet hat.

Daß die Zahlen und geometrischen Gebilde "Ideen" seien, das hatte schon Platons Ideenlehre behauptet. Daraus ergab sich das Programm, die Mathematik insgesamt aus der Logik – als der Theorie der Ideenformen – abzuleiten. Dies bleibt ein Bemühen aller platonisch und neuplatonisch inspirierten Logik und Mathematiktheorie. Zuletzt ist sie im 19. Jahrhundert im Zeichen eines Neo-Neuplatonismus mathematischer Grundlagenforschung wieder verstärkt in Angriff genommen worden. Aber solche Bestrebungen stehen auch jetzt noch weit hinter den umgekehrten zurück, die Logik aus einer autonomen Mathematik zu begründen und herzuleiten, wenn dieses Anliegen auch hinter oftmals gegenteilig lautenden Absichtserklärungen nicht so leicht erkennbar ist.

Daß die Mathematik schon so früh in die Lage geraten ist, als Urbild und Vorbild einer abgeschlossenen Wissenschaft von höchster Stringenz, Kohärenz, d. h. eindeutiger Beweisbarkeit aller ihrer Sätze und Inhalte, zu gelten, hat sie *Euklid* zu verdanken. Von ihm ist bekannt, daß er um 300 v. Chr. unter Ptolemäus Soter in Alexandria ein mathematisches Institut gründete, welches nachmals gute tausend Jahre bestand. Aus ihm sind danach fast alle bedeutenden Mathematiker der antiken Welt hervorgegangen. Sein Werk, die "Elemente" (griech.: Stoicheiai Στευχειαι) ist das mathematische Lehrbuch des Abendlandes schlechthin geworden. (vgl. Euklid, Die Elemente, Buch I-XIII, hgg. u. ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer, Darmstadt 1962, 479 S. Wir zitieren im folgenden: Euklid's Elemente, 15 Bücher, aus dem Griech. übers. von Joh. Friedrich Lorenz, neu hgg. von Carl Brandan Mollweide, 5. Aufl. Halle 1824). Es faßte alle Errungenschaften der vorangegangenen griechischen Mathematik zusammen und verdrängte dadurch auch alle vorher bestehenden Werke, von denen wir fast nur die Verfasser, die Buchtitel und mehr oder weniger ausgedehnte Partien und Referenzen kennen. Es hat noch im 19. Jahrhundert dem Gymnasialunterricht als Lehr- und Textbuch gedient. Neben den "Elementen" sind von Euklid noch ein Werkchen erhalten, das den Titel "Data" trägt (vgl. Clemens Thaer, Hg.: Die Data von Euklid. Nach Menges Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben, mit 89 Figuren, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962, 73 S.), sowie eine in arabischer Bearbeitung überlieferte Schrift über Teilungen. (Vgl. zu Euklids mathematischen Leistungen und seine weiteren Schriften Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, 3. Aufl. Leipzig 1907, S. 258 - 294).

Das Werk "Elemente" ist sicher nicht ohne Kenntnis der aristotelischen und auch der stoischen Logik entstanden. Euklid und Chrysipp lebten zur selben Zeit in Alexandria. Ob sie sich je begegnet sind oder gar miteinander diskutiert haben, ist nicht bekannt. Auf Euklids Kenntnisse von anderen Schullehren deuten viele in den Elementen vorkommende Begriffe hin, insbesondere aber die Anlage des Werkes, die - wie Aristoteles für alle Wissenschaften fordert - die Prinzipien als Voraussetzungen der Disziplin streng von allem davon Abzuleitenden und von ihnen her zu Begründenden (als Theoreme) unterscheidet.

Aber der Haupthintergrund seines Werkes ist die Platonische Ideenlehre, obwohl dies an keiner Stelle explizit gesagt wird. Von ihr her müssen wir voraussetzen, daß die genuin geometrischen und arithmetischen Gegenstände als nur im Denken zu erfassende Gebilde aufgefaßt werden, die zwar durch sinnliche Symbolisierung "veranschaulicht", aber niemals gänzlich und rein darzustellen sind. Darüber hinaus zeichnet sich das Werk durch einige Züge aus, die den antiken Wissenschaftsbegriff nachhaltig bereicherten. Es ist ein Lehrbuch "praktischer Wissenschaft" (nicht im aristotelischen Sinne nur Theorie der Praxis!) und bringt ägyptisch-babylonische Meß- und Rechenkunst als Aufgaben- bzw. Problemsammlung für geometrische Konstruktionen so zur Geltung, daß jedermann den unmittelbaren Nutzen dieser Wissenschaft für das Leben, insbesondere für Handwerker und Architekten sehen konnte.

Wie der Philosoph bei Platon von der sinnlichen Anschauung ausgehend zur "Ideenschau" aufzusteigen hat, verwendet auch Euklid die sinnliche Anschauung als didaktischen Ausgang für sein Lehrbuch. Von daher versteht sich, daß die Geometrie mit ihren noch am leichtesten zu veranschaulichenden Gegenständen die Propädeutik alles weiter Behandelten darstellt, insbesondere auch der Arithmetik. In dieser Hinsicht, die als unanschaulich geltenden arithmetischen Verhältnisse aus anschaulichen geometrischen Verhältnissen zu demonstrieren, ist es für die Lehre der Mathematik im Abendland vorbildlich geblieben bis zur Renaissance, ja teilweise bis heute.

Ein besonderes Raffinement der Darstellungsweise bis in die Formulierungen des Textes besteht jedenfalls darin, dem Leser - und sogar dem unvorgebildeten Schüler - den Eindruck zu erwecken, diese Veranschaulichung genüge zum vollkommenen Verständnis des Gesagten. Eben darum hat es sich vor allem so lange als Textbuch gehalten. Was an stillschweigend vorausgesetzten platonischen Ideen und Lehrmeinungen darüber hinaus enthalten ist, erschließt sich gewöhnlich erst dem zweiten und dritten Blick - und manchem Leser überhaupt nicht, ohne daß dieser den Eindruck gewinnen müßte, er habe die Sachen bei sonst genügender Aufmerksamkeit und gutem Gedächtnis nicht vollständig verstanden.

Der umgekehrte Weg, die Geometrie aus der Arithmetik herzuleiten und zu begründen und damit die sinnliche Anschauung zugunsten des "reinen Denkens" in Zahlenverhältnissen und arithmetischen Strukturen gänzlich aus der Mathematik zu eliminieren, war vordem von den Pythagoräern schon versucht worden, aber er hatte sich mit ihren "rationalen" Zahlbegriffen als nicht gangbar erwiesen. Schon die arithmetische Berechnung der Länge der Diagonale im Quadrat und des Kreisumfanges im Verhältnis zum Kreisdurchmesser hatte sie auf die "Irrationalzahlen" geführt, bei denen die Frage, ob es sich bei ihnen überhaupt um Zahlen handeln konnte, in der Antike immer umstritten blieb. Und die Benennung dieser Zahlen als "alogoi" (αλογοι, eigentlich: "kein Verhältnis aufweisend") zeigt noch, daß sie dies als vernichtende Niederlage des rationalen arithmetischen Denkens gegenüber den Phänomenen der geometrischen sinnlichen Anschauung empfanden, in der ja auch irrationale Verhältnisse, wie z. B. ein Kreis mit seinem Durchmesser, leicht darstellbar sind. Euklid definiert im 10. Buch, was rational (griechisch: rheton ϱητον) und irrational (griechisch: alogon αλογον) bedeutet, auf der Grundlage von Kommensurabilität und Inkommensurabilität von geometrischen Strecken. Derart entmutigt, wurde der Versuch, Geometrie von der Arithmetik her zu begründen, auch erst durch Descartes im 17. Jahrhundert wieder aufgenommen (im Programm seiner "analytischen Geometrie"), nämlich als man sich im Abendland daran gewöhnt hatte, das Irrationale im Rationalen selbst zu verankern.

Der Aufbau des Werkes "Elemente" zeigt überall die glückliche Verbindung von Theorie und Praxis. Seine dreizehn Bücher (denen zwei weitere aus der Schule beigesellt sind) beginnen fast alle mit einem "faktenkundlichen" Teil, der in der Gestalt von Definitionen die Grundlagen der ganzen Disziplin liefert. Daran schließt sich jeweils ein Hauptteil mit "Problemen" als Konstruktionsaufgaben an, zu deren Lösung aus den theoretischen Grundlagen zu folgernde "Lehrsätze" (Theoreme) gleichsam als intellektuelles Handwerkszeug mitgegeben werden. In diesen "Problemen" und "Lehrsätzen" stellt sich nun der ganze Reichtum mathematischen (geometrischen wie arithmetischen) Wissens dar, den man - nach aristotelischer Wissenschaftslehre - als den eigentlich theoretisch-erklärenden Teil der Mathematik ansehen kann.

Die meisten der Bücher (bzw. Kapitel) beginnen mit "Hypothesen" (wörtlich: Unterstellungen, Voraussetzungen, in lateinischen Ausgaben als "Definitiones" übersetzt). Sie benennen und definieren (im 1. bis 4. und 11. bis 13. Buch) die geometrischen und (im 5. bis 10. Buch) die arithmetischen Gebilde. Darin darf man gewiß den nach Aristoteles zu fordernden faktenkundlichen Teil dieser Wissenschaft sehen. Nur handelt es sich dabei um Fakten, Elemente, Gebilde, die - anders als die aristotelischen sinnlich-empirisch zu beschreibenden Substanzen - gerade nicht sinnlich-anschaulich gegeben, sondern im Denken zu erfassen sind. Wir betonen, daß dies auch für die so anschaulich erscheinenden geometrischen Gebilde gilt. Auch für diese, erst recht aber für die arithmetischen Gebilde, ist der Ausgang von der Anschauung zwar "didaktisch" notwendig, aber nicht ausreichend.

Man hat später oft und in der Moderne ganz besonders die angeblich allzu schlichten, ja ungenügenden und irreführenden "Definitionen" bespöttelt und sie durch "Beliebiges" (wie David Hilbert in seiner Axiomatik) ersetzen wollen. Und dies vor allem in Verkennung eben dieser Voraussetzung, daß sie keineswegs "anschauliche" Gegebenheiten beschreiben, sondern Hinweise für ihr über die Anschauung hinausgehendes denkerisches Erfassen geben sollten. Man hat sich hier wieder an die durch Platon von Demokrit übernommene Lehre vom Denken in Modellen zu erinnern, die auch hierbei zum Tragen kommt: Das Modell gibt den sinnlichen Ausgang, aber das eigentlich zu Denkende ist gerade nicht im Modell darstellbar. Wie dies eigentliche Denken dabei funktioniert, ist freilich immer das große Geheimnis der Platoniker - und auch der "überanschaulich denkenden" Mathematiker - geblieben. Wir können dazu nur weiter unten einen Erklärungsvorschlag machen. Betrachten wir das an geometrischen und arithmetischen Beispielen etwas ausführlicher..

Das erste Buch beginnt mit seinen "Definitionen" bzw. "Hypothesen" so:

> “1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat. 2. Eine Linie aber ist eine Länge ohne Breite. 3. Das Äußerste einer Linie sind Punkte. 4. Eine gerade Linie (Strecke) ist, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt. 5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat. 6. Die Enden einer Fläche sind Linien. 7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt. 8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen. (9. - 12. definieren verschiedene Winkel.) 13. Grenze heißt, was das Äußerste eines Dinges ist. 14. Figur, was von einer oder mehreren Grenzen eingeschlossen wird..” usw. über Kreis, Dreieck, Polygone bis zum berühmten Satz über Parallelen: “35. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, und, soweit sie auch an beiden Seiten verlängert werden, doch an keiner Seite zusammentreffen”.

Im 11. Buch definiert Euklid auf die gleiche Weise (und unter anderem) die geometrischen “Körper” als das “was Länge, Breite und Tiefe hat”. Darunter kommt auch die “Kugel” (Sphaera σφαιϱα) vor, von der es heißt (Nr. 14:) “Eine Kugel ist der Körper, welchen ein Halbkreis beschreibt, der sich um seinen unverrückten Durchmesser einmal ganz herumdreht”.

Entsprechend heißt es im 7. Buch über die Zahlen und ihre Verhältnisse:

> “1. Die Einheit ist, nach welcher jedes Ding eins heißt. 2. Eine Zahl aber eine aus Einheiten bestehende Menge. 3. Ein Teil ist die kleinere Zahl von der größeren, wenn sie die größere genau mißt. 4. Ein Bruch aber, wenn sie, ohne die größere genau zu messen, Teile der größeren enthält. 5. Ein Vielfaches ist die größere Zahl von der kleineren, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird. 6. Eine gerade Zahl ist, welche halbiert werden kann. 7. Eine ungerade Zahl aber, welche nicht halbiert werden kann. 8. Gerademal gerade ist die Zahl, welche von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl gemessen wird. 9. Gerademal ungerade aber, welche von einer geraden Zahl nach einer ungeraden Zahl gemessen wird. 10. Ungerademal ungerade ist die Zahl, welche von einer ungeraden Zahl nach einer ungeraden Zahl gemessen wird. 11. Eine Primzahl ist, welche nur von der Einheit gemessen wird. 12. Primzahlen zueinander sind Zahlen, welche nur die Einheit zum gemeinsamen Maße haben. 13. Eine zusammengesetzte Zahl ist, welche von irgend einer von ihr verschiedenen Zahl gemessen wird. 14. Zusammengesetzte Zahlen zu einander sind, welche irgend eine Zahl zum gemeinsamen Maße haben. 15. Eine Zahl vervielfältigt eine andere, wenn letztere so oft, als erstere Einheiten hat, zusammengenommen, eine Zahl (Produkt) hervorbringt. 16. Wenn zwei Zahlen einander vervielfältigen, so nennt man das Produkt aus denselben eine Flächenzahl, und Seiten (Faktoren) derselben die Zahlen, welche einander vervielfältigen. 17. Wenn drei Zahlen einander vervielfältigen, so nennt man das Produkt aus denselben eine Körperzahl, und Seiten (Faktoren) derselben die Zahlen, welche einander vervielfältigen. 18. Eine Quadratzahl ist das Produkt aus zwei gleichen Zahlen, oder unter zwei gleichen Zahlen enthalten. 19. Eine Kubikzahl aber ist das Produkt aus drei gleichen Zahlen, oder unter drei gleichen Zahlen enthalten. 20. Proportioniert sind Zahlen, wenn die erste von der zweiten und die dritte von der vierten entweder einerlei Vielfaches, oder einerlei Teil, oder einerlei Bruch ist. 21. Ähnlich sind Flächen-, auch Körperzahlen, welche proportionierte Seiten haben. 22. Eine vollständige (vollkommene) Zahl ist, welche allen ihren Teilen zusammen gleich ist."

Kommt man beim Versuch, sich die hier definierten mathematischen Gebilde vorzustellen, weder mit der empirischen Anschauung noch mit dem "nicht-anschaulichen" mathematischen Denken zu befriedigenden Ergebnissen, so dürfte eine Erinnerung an die eingangs erwähnten herakliteischen Logoi hilfreich sein. Es zeigt sich dann nämlich, daß die meisten - wenn auch nicht alle - mathematischen Gebilde in dieser herakliteisch zu nennenden Begriffsstruktur definiert werden.

Diese hatten wir als begriffliche "contradictio in adiecto" charakterisiert und schon darauf hingewiesen, daß sie eine, wenn auch oft unerkannte und apokryphe Wirkungsgeschichte im "dialektischen" Denken besäße. Aristoteles hat nach ihrem Vorbild die Möglichkeitsbegriffe konstruiert, freilich ohne zu durchschauen, auf was er sich damit einließ. Es handelt sich um Begriffe, von deren spezifischen Merkmalen mindestens eines in positiver und zugleich negierter Weise angegeben wird. Auf letzteres weist die häufig explizite negative Formulierung hin, die offenbar Spinoza später angeregt hat, jede Definition als Negation anzusehen. Und wir sagten weiter von ihnen, daß solchen Begriffen nichts in der Wirklichkeit entspreche (sie haben keine eigene Extension), wohl aber entspricht ihren Komponenten, nämlich getrennt den positiven wie auch den negativen, etwas in der Wirklichkeit. Hier kommen sie nun als Gegenstände des platonistischen "dialektischen" Denkens wieder zur Geltung.

Platon hat sich zur Ideenschau (mit einem "geistigen Auge") der Veranschaulichung des Unanschaulichen durch sinnliche Modelle, Gleichnisse und "Mythen" bedient. Euklid bedient sich dazu der Phantasie, die auch seither das kreative Instrument mathematischen Denkens geblieben ist. Das platonische "Unanschauliche" wird dadurch zu etwas, was in seinen einzelnen Bestandteilen durchaus sinnlich angeschaut und erfahren werden kann, aber eben nicht in der simultanen Kombination anschaulicher Elemente, die nur die Phantasie zustande bringt. Wir haben vorne schon an den Dispositionsbegriffen gezeigt, wie es funktioniert. Pferde und Vögel sind durchaus anschauliche Erfahrungsgegenstände. Aber der Pegasus ist kein Erfahrungsgegenstand und deshalb "unanschaulich". Wohl aber kann ihn die Phantasie zur Anschauung bringen, indem sie dem Pferd die Flügel des Vogels andichtet und das geflügelte Pferd in die Lüfte steigen läßt. Nicht anders verhält es sich offenbar mit dem, was der Mathematiker tut, wenn er die Elemente seiner praktischen Zeichen- und Meßkunst zu Gebilden kombiniert, die in dieser Kombination niemals angeschaut werden können, mit denen er sich aber seinerseits in die höheren Sphären kreativer Imagination aufschwingt. Zeigen wir das an den Definitionen, die uns in Euklids Werk vorgetragen werden.

1. Ein "Punkt" sei also ein Etwas. Dieses (als Gattung) wird gar nicht erst benannt, es sei denn, man verstehe, wie es meistens geschieht, das "ist" schon als Existenzanzeige dieses Etwas. Logisch ist dieses "ist" aber als Äquivalenzjunktor, also als Definitionszeichen zu lesen. Diese Formulierung wurde vermutlich gewählt, weil Euklid sich sonst hätte entscheiden müssen, ob er platonische oder aristotelische Farbe bekennen sollte: Ob es sich nämlich um ideelle Eigenschaften oder materielle Substanzen handele. Beides konnte in der Mathematik später darunter verstanden werden. Jeder kennt solche "Etwase" schon und hat Punkte gesehen, nämlich als "Schnittpunkte" von Linien, wie sie auch heute noch graphisch "veranschaulicht" werden. Und wenn sie einer gesehen hat, so haben sie naturgemäß Teile auf einer Fläche (und seien sie auch winzig). Dies sehr anschauliche Merkmal wird in der Definition nun zugleich negiert. Das teilbar-ausgedehnte Etwas hat zugleich "keine Teile". Darin liegt der Widerspruch im Terminus. Was aber "keine Teile" hat ist sehr wohl auch ein Etwas, das man sinnlich-anschaulich demonstrieren kann, nur eben nicht am Punkt. Nämlich an jedem Ganzen, das durch Teilung zerstört und vernichtet wird. So wird ersichtlich der Kreis durch Halbteilung zerstört und vernichtet, denn die Halbkreise sind keine Kreise mehr. Beide anschaulichen Sachverhalte, die in der empirischen Erfahrung gerade nicht zusammen an einem und demselben Gegenstand vorkommen, sind nun im geometrischen Begriff des Punktes zusammengeführt und machen seinen dialektisch-widerspruchsvollen Charakter aus. Dasselbe Verfahren der kontradiktorischen Begriffsbildung kommt nun auch bei den meisten übrigen Definitionen zum Tragen. Konzentrieren wir uns bei den übrigen Gebilden aufs Wesentliche:

2. Die "Linie" hat als "breitenlose Länge" sowohl Breite - um als gezeichneter Strich oder gespannte Schnur gesehen zu werden - als auch Nicht-Breite - um als Strich zwar veranschaulicht, aber nicht eigentlich dargestellt zu werden. Was Nicht-Breite anschaulich bedeuten kann, sieht man an flachen Dingen wie Blättern und Häuten, wenn man sie von der Seite betrachtet, aber nicht an Linien.

3. "Endpunkte" von Linien haben als Teile der Linie Längenausdehnung, als Punkte zugleich auch nicht.

4. Die "Geradheit" einer Linie ist ein "Gleichmaß" der Längen-Erstreckung zwischen allen Punkten in ihr. Die Linie enthält also interne "Punkte" und zugleich auch nicht. Was "Gleichmaß" ist, wird gerade nicht definiert. Ersichtlich gilt diese Definition von "Geradheit" auch für gleichmäßig gekrümmte Linien, etwa eine Kreislinie, die zu allen Punkten auf ihr "gleichmäßig liegt". Es ist daher ein falsches Argument der sog. nichteuklidischen Geometrien gegen dem "Euklidizismus", dieser habe die "Geradheit" als "Nichtkrümmung" vorausgesetzt. Gerade die Dialektik der euklidischen Definition von Geradheit erlaubt es - und hätte es auch den antiken Geometern schon erlaubt - die "Geradheit einer Linie" als

"stetige Krümmung" zu verstehen. Und daß Bolyai, Lobatschewski, Gauß und Riemann gerade dieses Krümmungs-Verständnis der Geraden als Erweiterung und Verallgemeinerung der Geometrie als Wissenschaft entwickelten, erweist die Fruchtbarkeit des Euklidischen Verfahrens der dialektischen Definitionen und seine in der Mathematik fortwirkende Aktualität. (Verf. bemerkt erfreut, daß diese Einsicht allmählich auch in der mathematischen Grundlagenforschung aufkommt. Vgl. dazu M. Schmitz, Euklids Parallelenlehre als einzig wahre Geometrie der Ebene vor dem Hintergrund der Mathematikphilosophie des Proklos, in: La philosophie des mathématiques de l' Antiquité tardive. Actes du Colloque international Fribourg, 24 - 26 septembre 1998, hg. von G. Bechtle und D. J. O'Meara, Fribourg 1999).

5. Eine "Fläche" sieht man an jedem flachen Gegenstand von vorn und hinten Daß sie "nur" Breite und Länge, d. h. "keine Tiefe" hat, sieht man nicht, wenn und solange man die Fläche betrachtet, wohl aber sieht man, was gemeint sein kann, wenn man den flachen Gegenstand von der Seite betrachtet. Dann aber sieht man eben die Fläche nicht. Zusammen kann es nur imaginierend "gedacht" werden.

6. Die Begrenzung einer Fläche gehört als Linie sowohl zur Fläche als auch nicht, denn als Flächenbegrenzungslinie hat sie sowohl Breite (als zur Fläche gehörend) als auch nicht (als nicht zur Fläche gehörend).

7. Die ebene Fläche enthält zugleich Linien (und damit auch Punkte) als auch nicht. "Gleichmäßig liegen" (der Linien) wird aber wie im Falle der Geraden gar nicht definiert und gilt daher auch für sog. nichteuklidische Flächen (die daher ebenfalls auf den euklidischen Begriff der Flächen rückführbar sind).

8. - 12. Für die Winkeldefinition wird nur auf das Verhältnis ("Neigung") sich schneidender Linien abgestellt, nicht aber auf die sich zwischen den Schenkeln erstreckende Fläche, die zwar jedermann sehen kann und als zum Winkel zugehörig voraussetzt. Sie wird aber nicht genannt und auch später nicht definiert. Man muß sie "hinzudenken". Bei der Bestimmung der Winkelgröße (rechter Winkel, stumpfer und spitzer Winkel) ist es umgekehrt. Schenkelneigung und die eingeschlossene Fläche - wohlgemerkt, sie wird nicht definiert und muß doch vorausgesetzt werden, denn ohne sie kann nicht von Winkelgrößen die Rede sein - können nur getrennt gesehen, müssen aber als Einheit gedacht werden.

13. "Grenze" - ein schon vorsokratischer Begriff ("Peras" περας) mit weit über die Mathematik hinausreichender Bedeutung - gehört als das, "worin etwas endet" zugleich der begrenzten Sache an und auch nicht, wie schon bei den Endpunkten der Linie und den Begrenzungslinien der Flächen gesagt wurde.

14. Umgekehrt ist daher auch jede "Figur" das von ihrer Grenze Umschlossene und zugleich auch nicht, da die Grenze zur Figur gehört.

Der Leser mag die übrigen geometrischen Figuren auf ihre Dialektik hin selbst überprüfen. Sie spielt vor allem damit, daß die bisher definierten Begriffe wiederum als Merkmalsbestände in diesen verwendet werden. Nehmen wir zuletzt aber auch noch die berühmte Parallelendefinition (Nr. 35). Abgesehen von der Unklarheit der Merkmale "gerade" und "in derselben Ebene liegen", was ja auch für die sog. nichteuklidischen "geodätischen Linien" und Ebenen paßt, wird das "nicht einander Treffen, soweit sie auch an beiden Seiten verlängert werden" als spezifisches Merkmal der Parallelen ausgewiesen. Was "gleicher Abstand zwischen geraden Linien" bedeutet, sieht man ohne weiteres in der Nähe (etwa an geraden Gleisen). "Verlängern" lassen sich solche Linien auf dem Papier oder auf einer Landebene, soweit es eben praktisch geht. Aber was man auf einige Entfernung an solchen Verlängerungen sinnlich wahrnimmt, ist, daß sie je weiter entfernt desto mehr zusammenlaufen. Das "in der Verlängerung" gerade nicht Wahrzunehmende (daß die Parallelen gleichen Abstand bewahren) ist also so zu denken, wie es in der Nähe gesehen wird und nicht, wie es in der Ferne gesehen wird. Der spekulative Witz bei der späteren Diskussion des Parallelenbegriffs liegt nun gerade darin, daß die weitere Entwicklung dies "Nichttreffen" im unendlich Entfernten genau nach der sinnlichen Erfahrung des "Treffens im entfernt Wahrnehmbaren" behandelt: Die Parallelen, die sich im Endlichen nicht treffen, treffen sich gerade und nur im Unendlichen!

Daß hier die geometrischen Grundsachverhalte "dialektisch" definiert werden, kann nur aus der Voraussetzung der platonischen These erklärt werden, daß durch die partiellen und sich ausschließenden Veranschaulichungen gerade nicht das ideelle "ganze" Wesen dieser Gebilde darstellbar sei. Denn es liegt ja auf der Hand, daß etwa die aristotelische oder stoische Sicht dieser Gebilde ausschließlich auf ihre schlichte Anschaulichkeit verweisen würde und sie durchweg "nicht-dialektisch" definiert hätte. Es wären Definitionen dabei herausgekommen, die George Berkeley später für die Geometrie mittels seines "Minimum sensibile" vorgenommen hat, und die durchaus für die Praxis genügen und dem Verständnis nach herkömmlicher undialektisch-regulärer Begriffsbildung entsprechen. Dann ist nämlich der Punkt eben das gerade noch Sichtbare einer minimalen Fläche, was jedermann als den berühmten Fliegendreck kennt, und die Linie ist eine kontinuierliche Punktreihe, die Fläche selbst aber das, was man von einem bestimmten Standpunkt aus an Körpern sieht, während Körper ihrerseits überhaupt nicht als solche gesehen werden, sondern ertastete Erfahrungsgebilde sind.

Die epochale Erfolgswirkung der euklidisch-platonischen Definitionen besteht aber gerade darin, daß sie diese direkt anschaulichen Merkmale eben mitenthalten und durch sie an die Anschauung (und Betastung) des Praktikers appellieren und sich ihr verständlich machen können, während sie dem eingeweihten "Denker" noch viel mehr und zum einen oder anderen gerade das Gegenteilige vorzustellen bzw. zu denken aufgibt.

Dies zu bemerken ist schon deshalb wichtig, weil die herrschende Meinung der Mathematiker spätestens seit der Neuzeit mathematische Definitionen grundsätzlich für widerspruchslos hält und deshalb auch im Rückblick bei den euklidischen Definitionen allenfalls Schlichtheit, Fahrlässigkeit, Adaptation an das Verständnis von Anfängern und alles mögliche andere eher annimmt als explizite Widersprüchlichkeit. Und da man nicht damit rechnet, setzt man eben auch die Nichtwidersprüchlichkeit der mathematischen Begriffe in Euklids Elementen voraus und hat sich längst daran gewöhnt, mit ihnen so umzugehen, als ob sie tatsächlich widerspruchslos seien. Tauchen dann bei ihrer Verwendung in Theorien und Theoremen Widersprüche auf - und sie sind in allen Teilen der Mathematik eine immer wieder auftretende Herausforderung - so wird das nicht auf die Dialektik der Begriffe, sondern auf ihre angebliche Unklarheit oder falsche deduktive Satzbildung u. ä. zurückgeführt oder überhaupt zum Forschungsgegenstand stilisert.

Kommen wir nun zu den arithmetischen Gebilden und weisen ihre "Dialektik" bzw. ihren kontradiktorischen Charakter nach, der sie eben auch von den regulären logischen Begriffen unterscheidet und zu reinen "Denkgebilden" macht. Und bemerken wir hier, daß das anschauliche Moment an diesen Gebilden durch Euklid grundsätzlich an den Sachverhalten der Geometrie verdeutlicht wird: Die Zahlen und Zahlverhältnisse wurden (und werden bis heute) an sichtbaren Gegenständen demonstriert und gelernt (die Psephoi, Rechensteine der Griechen, die Knöpfe auf dem Abacus, die Augen auf einem Würfel, die zehn Finger etc.).

Die Einheit wird als Punkt dargestellt, die Größe einer Zahl durch eine kürzere oder längere Punktreihe, die Anordnung von Punkten auf einer Fläche oder auf den Flächen eines Kubus führt zu bestimmten Zahlarten. Proportionen, Gleichungen, Ungleichungen werden anhand geometrischer Proportionen, "Deckungen" und Nicht-Deckungen versinnlicht. Aber der platonistische Denker weiß, daß dies das ideelle Wesen der Zahlgebilde nicht darstellt, sondern nur zu ihrem Denken hinführt. Dieses aber besteht - nach unserem Interpretationsvorschlag - keineswegs darin, sich etwas mystisch Unbestimmtes zu "denken" (was kein Denken wäre), sondern solche Anschauung gerade festzuhalten und mit einem Anschauen von etwas dazu Gegenteiligem zu verknüpfen.

1. "Einheit" ist die Bedeutung von "ein". Letzteres wird als sprachliches Partikel benutzt und wurde von Aristoteles als Quantifikationsjunktor ("Individualisator") in die Logik übernommen. Man unterstellt damit einen beliebigen Gegenstand (ein Einzelnes, das dann logisch prägnant auch eine "Einheit" genannt wird) einem allgemeinen Begriff, in dessen Umfang es neben vielerlei anderen "einen" (oder "Einheiten") zu stehen kommt: "ein Hund", "ein Tier", "ein Lebewesen".

Logisch handelt es sich also um die extensionale Benennung der untersten thematisierbaren Unterart bzw. eines Individuums eines allgemeinen Begriffs. Was als "ein" bezeichnet werden kann, ist daher logisch "nicht einiges" und auch "nicht alles". Und wer "logisch denkt" wird nicht das "eine Exemplar" mit "einigen Exemplaren "oder gar "allen Exemplaren", die unter einen Begriff fallen, verwechseln, und dies auch nicht beim Abzählen ("ein Hund" und noch "ein Hund" usw.). Nun lassen sich - wie es die Definition verlangt - auch logische "Allheiten" als "eine" bezeichnen, sprachlich z. B. durch den Plural ("die Tiere" = "alle Tiere") oder durch das sprachlich homonym gebrauchte Wort "Einheit" (im Sinne von "Gesamtheit"). Dies ist und bleibt aber logisch das Gegenteil von "ein" im Sinne der logischen Individualisierung "ein" (= "nicht alle").

Beide logisch sich ausschließenden Merkmale gehen in den mathematischen Begriff der Einheit ein und machen seine Dialektik aus: Die mathematische Einheit ist logisch zugleich "ein = nicht alle" und "alle = nicht ein". Die so schlicht klingende Definition des Euklid: "Die Einheit ist, nach welcher jedes Ding Eins heißt", macht sich also die sprachliche Homonymität des Wortes "Einheit" zunutze, hinter der sich die beiden im Negationsverhältnis stehenden Begriffe "Einzelheit" und "Gesamtheit" verbergen. Und darum kann jede mathematische Einheit sowohl Element wie auch Menge, Einfaches wie auch

Komplexes bedeuten und zugleich aus diesen zusammengesetzt und in diese zerlegbar sein. Was dabei zu denken ist, ist wiederum ein Anschauliches aus getrennten Sphären: Entweder das Einzelne oder das Ganze kann wahrgenommen werden, und wenn und solange man auf das Einzelne sieht, kann man nicht das Ganze beachten und umgekehrt. Im mathematischen Einheitsbegriff aber soll es zusammen "gedacht" werden.

2. Die Definition der "Zahl" benutzt den schon vorher definierten Einheitsbegriff, unterscheidet ihn aber von der "Menge" und bezieht beide aufeinander. Das entspricht der logischen Unterscheidung der individualisierenden und partikulären Quantifikation: "einige" (= Menge) sind nicht "ein" und umgekehrt. Die kontradiktorischen Merkmale der "Einheit" bringen aber die Dialektik auch in den Zahlbegriff. Denn die "Menge" ist hier einerseits zusammengesetzt aus "Einheiten" und insofern nicht selbst "Einheit", sie ist aber zugleich selbst auch "Einheit" (logisch im Sinne der Gesamtheit von Einheiten). Somit ist jede (mathematische) Zahl sowohl Einheit als auch nicht Einheit (in beiden Hinsichten).

Betonen wir besonders, daß Euklid die "Einheit" selbst nicht unter die "Zahlen" aufnimmt, da er ja die Zahlen aus Einheiten zusammensetzt sein läßt. Da aber die griechische Mathematik und mit ihr Euklid die sog. Eins sehr wohl als Zahl behandelt, ist auch diese zugleich Einheit und Nicht-Einheit. Ersteres zeigt sich darin, daß die später als "natürlich" bezeichneten Zahlen aus Einsen zusammengesetzt werden können (aber auch aus anderen Zahlen!), letzteres darin, daß die Eins sich auch in Bruchzahlen zerlegen läßt. Daß Euklid offenbar großen Wert auf die Unterscheidung zwischen der Zahl Eins und der Einheit legt, dürfte eine Reaktion auf das Problem der inkommensurablen Größen sein, dem ja gerade der Unterschied verschiedener Einheiten zugrunde liegt. Für die didaktisch-anschauliche Lehre aber suggeriert die Formulierung zunächst einmal, die Eins sei nur und ausschließlich diejenige Einheit, aus der sich alle Zahlen (die danach also mit der Zwei beginnen müßten) als Mengen von Einsen zusammensetzen. Und das liest man so auch in den meisten Einführungen in die Zahlentheorien, die mit den "natürlichen Zahlen" beginnen.

Auch beim mathematischen Zahlbegriff ist also dasjenige zu "denken", was sinnlich-anschaulich nur getrennt zu beobachten ist: entweder die Vielheit oder die Einzelheit, die als Zahlgebilde zur Einheit der Vielheit und zur Vielheit der Einheiten verschmolzen werden. Bemerken wir an dieser Stelle, daß der Leser, der die Zahlnamen und das Abzählen gelernt hat, sich leicht einzelne Zahlen herausgreifen und an ihnen überprüfen kann, daß die Definitionsmerkmale von "Zahl" darauf passen. Und halten wir dabei fest, daß die Zahlnamen so gebildet sind und gelernt werden, daß bei jeder einzelnen Zahl zugleich - an den Fingern oder an Gegenständen als "Einheiten" - gesehen und erinnert werden kann, aus wievielen Einheiten die jeweilige Zahl besteht.

Dies ist keineswegs trivial, denn im Folgenden werden Zahlarten definiert, von denen man zwar den Begriff, aber keineswegs sogleich auch individuelle Beispiele in der Weise der Angabe von bestimmten Zahlen hat, auf die die jeweilige Definition zutrifft. Diese Definitionen werden dadurch zugleich zu Formeln für Aufgaben- und Problemstellungen der Zahlenlehre, nämlich herauszufinden, um welche einzelnen aus Einsen gebildete (natürlichen) Zahlen es sich dabei handelt (und diese Aufgabe ist bekanntlich eine unendliche und wird heute mit Großcomputern immer weiterbetrieben). Weder die griechische noch die heutige Mathematik hat es aber als ihre Forschungsaufgabe angesehen, diese Definitionen in dem Sinne genauer zu machen, daß sich aus ihnen zugleich auch der Anwendungsbereich auf bestimmte Zahlen entnehmen läßt.

3. Daß (gewisse) Zahlen nicht nur ihre Einheiten, aus denen sie gebildet werden, als Teile hat, sondern auch andere Teile besitzen kann, wobei alle Teile des Gesamts "kleiner" als diese Zahl und sie selbst "größer" als jeder Teil ist, das dürfte leicht anschaulich zu machen sein, und daran appelliert die Definition zunächst einmal. Jede Gesellschaft besteht aus Menschen als Einheiten, aber sie läßt sich auch in Familien oder Vereine einteilen (die ihrerseits aus Menschen bestehen). Ein Teil als "kleinere Zahl von der größeren" ist immer noch verständlich, wie man ja auch den Verein als "kleinere Gesellschaft" gegenüber der Gesamtgesellschaft auffassen kann. Die Dialektik - und es ist eine neue zusätzlich zur Dialektik des Zahlbegriffs selber - beruht hier auf dem zur Definition dieser Zahlart benutzten "genau messen".

Messen heißt Einheiten solange abzählen, bis ein Gesamt vollständig erfaßt ist. Daß die Zahlen selber messen oder zählen, kann allenfalls metaphorisch gesprochen sein und ist sicher nicht anschaulich zu machen, wohl aber, daß der Mathematiker mißt und zählt. Man beachte, daß dies neben dem Lernen der Zahlnamen in jeder Kultur (außer vielleicht der heutigen westlichen) mit dem kleinen und großen Einmaleins ebenfalls gelernt wurde, so daß jeder Rechenkünstler für jede nicht zu große Zahl dieser

Zahlart zugleich auch "wußte", welches ihre Teilzahlen sind und wie oft sie "gezählt" werden müssen, um aus ihnen als anderen "Einheiten" die entsprechende Zahl zu bilden. Was übrigens dies hier und in den folgenden Definitionen vorkommende "genau messen" bedeutet, versteht sich einerseits vom "nicht genau messen" inkommensurabler Größenverhältnisse her (z. B. die Einheiten des Kreisdurchmessers messen nicht genau die Kreisumfangslänge). Und dies wiederum beschränkt die Euklidischen Definitionen der arithmetischen Größen auf "rationale" Verhältnisse. Andererseits bedeutet es aber auch schlicht das, was später "größer als..." und "kleiner als..." genannt wird und in den Funktionentheorien (der Gleichungen und Ungleichungen) eine große Rolle spielen wird.

4. Der Bruch wird als eine Zahl definiert, die aus Teilen einer größeren als Einheiten gebildet wird, und die dabei kleiner als jene bleibt. Bezieht man das auf die Zahl eins als Einheit, so ist natürlich jede kleinere Zahl ein Bruch jeder größeren Zahl, z. B. 6 ist ein Bruch von 7, usw. Neben diesem trivialen Fall aber sind die Fälle interessant, die wir heute im eigentlichen Sinne als "Bruch" verstehen, wo nämlich gerade nicht die Eins als Einheit fungiert, sondern wo die Teile eine größere Zahl zwar genau messen und insofern auch ihre Einheiten sind, diese Einheiten sich aber selbst nicht als Vielfache von Einsen bilden lassen, z. B. ein Dritteil von 10. Wir sind gewöhnt, die 10 in drei Teile zu zerlegen, und einer oder zwei dieser Teile (1/3, 2/3 von 10) sind Brüche von 10. Aber sie lassen sich nicht im Sinne der bisher definierten Zahlen denken, da sie keine gemeinsame Einheit mit der Eins haben. Durch den Bruch führt Euklid damit ein Denkgebilde ein, daß in Beispielen manchmal als Zahl, manchmal aber auch nicht als Zahl vorstellbar ist. Z. B. ist 1/3 von 9 eben 3 und erfüllt die Definitionskriterien einer Zahl. 1/3 von 10, d. h. das, was man in der dezimalen Arithmetik als "3,333..." oder ähnlich mit Pünktchen darzustellen gewohnt ist, erfüllt dieses Kriterium aber nicht. In der benutzten Notation sehen die Ziffern wie ein Zahlausdruck aus, aber die Pünktchen, die notwendig zur Darstellung gehören, strafen dies Lügen. Was sie selber in der arithmetischen Notation bedeuten, wird meistens nicht einmal gesagt, weil man voraussetzt, es sei wie das sprachliche "und so weiter" selbstverständlich. Eine angebliche Zahl, die man aber nicht wie die bisher behandelten, vollständig aufschreiben kann, ist eigentlich nicht Zahl zu nennen. Und so liegt die Dialektik schon der (z. B. periodischen) "Bruchzahlen" darin, daß sie zugleich Zahlen und auch Nichtzahlen (nämlich in dem durch die Punkte angedeuteten Teil, und das kann man ganz wörtlich nehmen) sind.

5. Beim "Vielfachen" geht die Dialektik von Nr. 4 ins Definitionskriterium ein. Sind bei der größeren und der kleineren Zahl die Einheiten Einsen, so werden dadurch Produktzahlen definiert. Aber das Vielfache eines nichttrivialen Bruches von 10 ergibt dann wiederum ein dialektisches Gebilde von Zahl und Nichtzahl (z. B. 4 mal 1/3 von 10, d. h. 13,333...).

6. - 10. handeln vom Halbieren als Beispiel des Teilens und vom Vervielfachen von Zahlen und definieren damit arithmetische Rechenoperationen. "Halbieren" und "Vervielfachen" sind zunächst einmal Ausdrücke, die jeder Praktiker versteht. Mit ihrer wiederholten Anwendung auch großzahlige Divisionen und Multiplikationen auszuführen, war in Ägypten üblich und galt in Griechenland als "ägyptische Methode" des Rechnens. Man demonstriert es anschaulich an Mengen von Gegenständen, die in Gruppen eingeteilt oder um weitere Gegenstände vermehrt werden. Halbieren heißt aber durch Zwei teilen, und Vervielfältigen heißt gemäß einer Zahl multiplizieren. Damit kommt aber das mathematische Verfahren der Rekursivität ins Spiel: die Anwendung von Zahlbegriffen auf Zahlbegriffe selbst. Division und Multiplikation sind ihrerseits mathematische Junktoren (wie wir vorne gezeigt haben), die Quotienten und Produkte als Zahlausdrücke bilden. Ihre Dialektik besteht darin, daß sie ein Verhältnis zwischen Zahlen ausdrücken, das selber zugleich Zahl sein soll, und damit wiederum zugleich Zahl (als Zahlenwert) und Nicht-Zahl (als Verhältnis) ist. Daß dies von allen Rechenarten gilt, die man somit als mathematische Junktoren für komplexe mathematische Ausdrücke ansehen kann, wurde ebenfalls schon gezeigt.

11. und 12. geben die Definition der Primzahl als einer solchen, "welche nur von der Einheit gemessen wird", und die im Verhältnis zu anderen Primzahlen nur die Eins als gemeinsame Teilungseinheit hat. Diese Definition schließt die 2 ein, aber sie sollte keineswegs die 1 selbst ausschließen, wie es seither üblich geworden ist, denn auch für die 1 gilt, daß sie von der "Einheit gemessen wird", sobald sie als Zahl behandelt wird.

Die 2 als Primzahl ist aber schon immer als die einzige gerade und halbierbare Zahl unter den bekannten, sonst durchweg ungeraden Primzahlen aufgefallen. Das hätte eigentlich schon immer Anlaß sein müssen zu prüfen, ob diese Irregularität nicht auf einer zu weiten Definition der Primzahlen des Euklid beruht (Nikomachos, ein Neupythagoreer, hat sie vor Euklid nicht zu den Primzahlen gerechnet, vgl. Cl. Thaer, Euklid, Anm zu Buch VII, Def. 11, S. 439; und auch der Neuplatoniker Jamblichos tadelt

Euklid deswegen unter Berufung auf Nikomachos, vgl. Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3. Aufl. Leipzig 1907, S. 461).

In der Tat spricht einiges dafür, daß Euklid ebenfalls die 2 nicht zu den Primzahlen rechnete. Und zwar die Tatsache, daß er die "Halbierbarkeit" als Definitionsmerkmal der geraden Zahlen besonders hervorhebt und die ungeraden Zahlen als nicht halbierbar definiert. Damit unterscheidet er offensichtlich zwischen den beiden Arten des Teilens, nämlich dem Halbieren und dem Teilen durch ungerade Zahlen. Er hätte freilich deutlicher sagen können, daß die Primzahlen "nicht durch Halbierung" auf ihre Einheiten gebracht werden dürften (was für alle anderen einschließlich der Eins, aber nicht für die 2 gilt, die eben nur durch die Halbierung auf ihre Einheiten gebracht wird), um die 2 deutlich aus den Primzahlen auszuschließen. Die 2 ist diejenige Irregularität unter den euklidisch definierten Primzahlen geblieben, die es bisher verhindert hat, die Primzahlen überhaupt durch einen Algorithmus berechenbar zu machen. Eliminiert man sie und zählt dafür die eins zu den Primzahlen, so läßt sich ein solcher Berechnungsalgorithmus für die Primzahlen angeben (Vgl. meine Logik, S. 151 ff. und vorn bei der Definition des Zahlbegriffs).

13. - 19. sind Präzisierungen der Definitionen der durch Teilungen und Vervielfältigungen gewonnenen Zahlen. Da hier nicht mehr auf den Unterschied von Halbieren und Teilen durch ungerade Zahlen Bezug genommen wird, wurden diese Definitionen wohl zum Ausgangspunkt des dann herrschenden einheitlichen mathematischen Teilungsbegriffs, der die Halbierung einschließt. Erst so konnte es als Forschungsfrage aufkommen, ob sich unter (bisher nicht entdeckten "großen") Primzahlen evtl. auch gerade Zahlen finden könnten.

2o. definiert die Proportion zwischen Zahlen im Verhältnis von Teilen und Vielfachen, die man erst sehr viel später als Quotienten darstellte. Es handelt es sich ersichtlich um die Definition der Gleichung als logische Äquivalenz. Sie ist das paradigmatische platonische "Denkmittel", indem sie bestimmte Zahlausdrücke (Quotienten, Brüche, Produkte und Summen) sichtbar und ausdrücklich nebeneinander notiert und zugleich ihre nicht notierte und damit nicht sichbare Identität (als Zahlenwerte) zu denken gibt (vgl. die Unterscheidung Freges von "Sinn" der notierten sichtbaren Zeichen und "Bedeutung" des (unsichtbaren) gemeinten identischen "Wertes" in den Gleichungen).

21. definiert dagegen die "Ähnlichkeit" mittels der Proportion der Faktoren von Produkten und Potenzzahlen. Hier handelt es sich um eine Definition eines Junktors, den man mit "gleich und ungleich" umschreiben müßte. Möglicherweise wurde diese Definition der Ausgang für spätere "gleich, größer, kleiner" Notation. Z. B. gilt "$3 \times 4 \neq 6 \times 8$", aber zugleich gilt die Proportion der Faktoren "3 zu 4 = 6 zu 8". Entsprechende Flächen sind gleich hinsichtlich ihrer Gestalt, aber ungleich hinsichtlich ihrer Größe. Er ist ein paradigmatischer dialektischer Junktor, der gleichsam "alle Möglichkeiten offen" läßt. In ihm ist die demokriteische Modelldenkweise auf den Begriff gebracht, die man dann auch als "Analogiedenken" ausgebaut hat.

22. schließlich definiert die "vollständige (auch: vollkommene) Zahl" als eine solche, die der Summe aller ihrer ("allen ihren") Teile(n, d. h. Einheiten, z. B. 10 hinsichtlich der Teile 1, 2, 3 und 4, die von den Pythagoreern besonders ausgezeichnete Zahl) gleich ist. Man beachte, daß hier die "Summe" durch "alle Teile zusammen" bezeichnet wird, die Gleichung aber durch "gleich sein".

An diese Definitionen der arithmetischen Elemente und Verhältnisse, von denen der Zahlbegriff selbst nur der geringste Teil ist, lassen sich einige logische Erwägungen anschließen, die Mathematiker gewöhnlich nicht anstellen. Diese gehen davon aus, wie die Kommentare zu Euklid zeigen, daß eine regelrechte Definition die "Existenz" der definierten Sache anzuzeigen habe, und geben es meist als selbstverständlich vor, was in diesem Bereich Existenz bedeutet. Dies umso mehr, als sie bei der Geometrie ebenfalls voraussetzen, die Existenz der geometrischen Gebilde ergebe sich aus ihrer Konstruierbarkeit auf dem Papier. Das kann man aber nur eine halbe Wahrheit nennen, wie sich ja aus der platonischen Voraussetzung ergibt, daß die sinnlichen Phänomene die "Idee" selbst nicht vollständig darzustellen vermögen.

Wenn es in diesem Bereich um Definitionen geht, so handelt es sich um das Aufzeigen der intensionalen und extensionalen Komponenten eines Begriffs, der nur "zu denken" ist und allenfalls in diesem Gedachtwerden so etwas wie Existenz besitzt. Man sollte nun davon ausgehen, daß damit auch alle Zahlen, die auf solche Weise definiert worden sind, auch bekannt sind und angegeben werden können. Das ist bekanntlich nicht der Fall, wie man beispielsweise schon an den Primzahlen und den vollkommenen Zahlen sehen kann. Man kennt einige und hat sie ausprobierend errechnet, aber man kennt auf keinen Fall alle und schließt eine solche Kenntnis auch durch den Begriff des Infiniten aus. Und natürlich gilt das grundsätzlich von allen bisher "größten" und "kleinsten" Zahlen, zu denen man "unendlich" weiterzählend Einheiten hinzufügen kann, um noch größere und kleinere zu erzeugen.

Die Tatsache, daß man bei vorliegenden Definitionen bestimmter Zahlarten einige davon kennt und einige nicht, hat immer einen Grund dafür abgegeben, daß die Mathematiker dieses Nichtwissen durch mathematische "Forschung" in bestimmtes Wissen um immer mehr und größere (oder kleinere) Zahlen umzuwandeln suchten. Dann wird natürlich gerechnet und "ausprobiert", und die Resultate an Wissen über noch mehr einzelne Zahlen, die die Definitionen "erfüllen", gilt ihnen dann als "Entdeckung" und "Auffindung".

Diese Meinung beruht aber auf der - gewiß nicht von Euklid gemachten - Voraussetzung, daß man die Zahlen schlechthin schon kenne und um sie wisse, wenn man weiß, daß und wie sie durch Summation von Einsen und ihre rekursive Anordnung im Dezimalsystem gewonnen werden können. Auf diese Weise gewußte und gedachte Zahlen hat man später "natürliche" genannt. Weil man nach allgemeiner Erfahrung mit ihnen und im Dezimalsystem am einfachsten gleichsam mechanisch rechnen kann, erst recht aber im computergerechten dualen Zahlsystem, kam die Vorstellung auf, ihre Definition sei zugleich die grundlegende für Zahlen schlechthin. Leopold Kronecker (1823-1891) hat bekanntlich gesagt, "Die (positiven) ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" - was nur einen starken Glauben an das Dezimalsystem und ein Verkennen der platonischen Methode des mathematischen "Denkens" verrät.

Eine Zahl ist nach diesem platonischen Verständnis nämlich nur dann bekannt und denkbar, wenn man alle ihre definierten Eigenschaften kennt, und das heißt eben, wie sie überhaupt aus Einheiten (nicht nur Einsen) zusammengesetzt ist. Unser obiger Hinweis auf die Lernart mittels des großen Einmaleins verleiht unmittelbar die Kenntnis ihres Zusammengesetztseins aus solchen Einheiten ohne Rekurs auf die Dezimalkomposition. Und kennt man Zahlen auf diese Weise, so weiß man im Bereich ihrer Größen auch durch pure Aufmerksamkeit auf die sich ergebenden Lücken, welches dann die Primzahlen unter ihnen sein müssen. Was aber dann die sog. großen Zahlen angeht, die man nach Belieben auch durch rekursive Dezimalbenennungen angibt, so täuschen sie also nur vor, bekannt zu sein, während sie es in der Tat nicht sind, weil man eben nicht sämtliche Eigenschaften von ihnen kennt. Und auch dies kann man eine Folge der Dialektik des arithmetischen Denkens nennen.

Die logische Form der Definition ist in diesen Verhältnissen überall der Äquivalenzjunktor, den man sprachlich durch "das heißt" wiedergeben kann, keineswegs aber durch die Kopula "ist". In neuerer Ausdrucksweise stellt man die Äquivalenz auch als doppelte Implikation "genau dann, wenn..." dar. Die Definition erklärt ein Wort oder einen Ausdruck durch einen intensional-extensional strukturierten Begriff oder einen durch nicht-satzbildende Junktoren gebildeten anderen Ausdruck. Und bekanntlich ist man dabei frei, den Wörtern oder Ausdrücken recht beliebige Begriffe definitorisch zuzuordnen bzw. umgekehrt (da es ja um umkehrbare Verhältnisse geht, wie die Gleichung es zeigt), die Begriffe beliebig mit Worten zu benennen bzw. ihnen Termini beizulegen.

Die mathematische Gleichung ist ihrem Sinne nach selbst ein logischer Äquivalenzjunktor, was bedeutet, daß alle richtigen Gleichungen nur logische Definitionen sein können. Die Frage ist nun, ob diese logische Bestimmung der Definition auch für die mathematische Definition bzw. die Gleichung gilt. Dies möchen wir nun gerade behaupten und damit auch zugleich behaupten, *daß alles, was in mathematischen Gleichungen ausgedrückt werden kann, keinen behauptenden Charakter haben und damit auch nicht wahrheits/falschheitsfähig sein kann.* Was auch immer links oder rechts in einer Gleichung steht, definiert sich gegenseitig und liefert so nur Ausdrücke, keineswegs Urteile bzw. Sätze.

Insofern wird man auch davon ausgehen müssen, daß die euklidischen Definitionen nur das Begriffs- und Ausdrucksmaterial liefern, das für die Geometrie und Arithmetik gebraucht wird. Und dies gilt nun auch für das Verhältnis von dezimalsystematisch oder dualsystematisch (oder nach noch anderen üblichen Darstellungssystemen darstellbaren) bekannten und benannten Zahlen, die eine Definition der natürlichen Zahlen nur vortäuschen, in Wirklichkeit aber reine Benennungen sind, und es gilt auch für diejenigen Zahldefinitionen, die auf andere Weise bestimmte Zahlarten definieren.

Bemerken wir zusätzlich, daß die von Euklid benutzte Notation für Zahlengrößen, in der sie - wohl nach dem Vorbild der aristotelischen Notation der Begriffe durch Buchstaben - durch Buchstaben "allgemein" dargestellt werden (die man in der Neuzeit F. Vieta als neue Erfindung zuschrieb), sehr dazu angetan war, diesen Unterschied von Wissen und Nichtwissen um die einzelnen Zahlen und ihre Definitionen unsichtbar zu machen. Die Ausdrücke "die Zahl A" oder "die Zahl B" suggerieren als "formale" Notation, daß die dadurch vertretenen Zahlen insgesamt bekannt seien oder bekannt sein könnten. Und die Verwendung dieser Ausdrucksnotation in Gleichungen verstärkt noch diese Sug gestion, da man dann voraussetzt, sie definierten sich gegenseitig. Erst recht gelten dann die auflösbaren Gleichungen, in denen einem solchen formalen Zahlausdruck ein oder einige bestimmte Zahlenwerte zugeordnet werden, als Bestätigung dieser Voraussetzung. Aber die unauflösbaren Gleichungen, wie etwa "A = Wurzel aus 2", definieren "Zahlen", die gänzlich unbekannt sind (sofern man die sog. Irrationalzahlen überhaupt für Zahlen hält) oder die eben überhaupt keine Zahlen sind.

Die mathematische Rechenpraxis ersetzt solche Gebilde durch Näherungswerte, d. h. durch bekannte Zahlen, während die mathematische Theorie ihre vermeintlichen "Zahlbegriffe" um immer neue "Zahlarten" erweitert, von denen man logisch nur feststellen kann, daß sie sowohl Zahlen als auch Nicht-Zahlen sind. Und auch dies zeigt von dieser Seite her die Dialektik des mathematischen Denkstils.

Die nächste Gruppe von faktenkundlichen Voraussetzungen für die Mathematik bilden die sog. "*Postulate*" (Forderungen, Aitemata αιτεματα), die sich im ersten Buch an die geometrischen Hypothesen anschließen. Es sind nur drei Forderungen sinnlich ausweisbarer Handlungen:

> "1. Es sei ein für allemal gefordert, von jedem Punkt nach jedem anderen eine gerade Linie zu ziehen; 2. desgleichen eine begrenzte gerade Linie stetig geradefort zu verlängern; 3. desgleichen, aus jedem Mittelpunkt und in jedem Abstand einen Kreis zu beschreiben".

Dies ist dasjenige, was der Handwerker und Baumeister und auch der Landvermesser ausführen können muß, erst recht natürlich der Mathematiker auf seinem Zettel. Und dies zu betonen ist deshalb wichtig, weil es auf diesem sinnlichen Boden ganz unmöglich gewesen wäre, solche Handlungen ins Unendliche zu erweitern und sich Gedanken zu machen, ob oder ob nicht parallele Linien sich in unendlicher Ferne treffen oder der Umfang eines unendlich großen Kreises eine gerade Linie wird. Im Sinnlichen und damit Endlichen ist dergleichen ohne weiteres zu "sehen" (die parallelen Eisenbahnschienen laufen in der Ferne geradewegs aufeinander zu; der Meereshorizont, der doch ein endlicher Kreisumfangsausschnitt ist, erscheint gerade), aber dies ist durch keine endliche Praxis zu demonstrieren.

Die Kontrolle des Auges durch die Hand verhindert in der Praxis das Auftreten zenonischer Paradoxien, nach denen das Unterschiedene auch als dasselbe (der Kreis wird zur Geraden, die Parallelen schneiden sich in der Ferne) und umgekehrt hätte "gedacht" werden müssen. Aber gerade dies wird wiederum im platonischen Verständnis dieser Postulate gefordert und macht darum die "ins Unendliche erweiterte" Anwendung dieser Postulate dialektisch.

Logisch gesehen können auch die sog. Postulate der Geometrie nichts anderes als Definitionen sein, und zwar Definitionen von Handlungen. Sie haben denselben dialektisch-kontradiktorischen Charakter wie die übrigen genannten Definitionen, der freilich dem auf Machbares beschränkten Praktiker verborgen bleibt. Der platonische Mathematiker aber weiß, daß es sich um zugleich ausführbare und auch nicht ausführbare Handlungen handelt, wobei die ersichtlich nichtausführbaren eben so zu denken sind, wie die ausführbaren. Aristoteles hat dergleich mit ebenso dialektischer Bestimmung als "potentielle" Handlung definiert.

An die Definitionen und Postulate schließen sich im ersten Buch noch die berühmten "*Axiome*" an. Im überlieferten Text des Euklid steht dafür der stoische Begriff Koine ennoia (Κοινη εννοια, lateinisch: notio communis,•"gemeinsame Vernunfteinsicht") was üblicherweise als "evidenter Begriff" verstanden wird. Man deutet sie als Beweisgrundsätze und letzte Voraussetzungen für mathematisches Tun, die eigentlichen Archai für diesen Bereich, die im Rahmen dieser Mathematik selber nicht weiter zu begründen und abzuleiten, sondern hinzunehmen seien. Es sind 12 Axiome, welche lauten:

> " 1. Was einem und demselben gleich ist, ist einander gleich. 2. Gleiches Gleichem zugesetzt, bringt Gleiches. 3. Von Gleichem Gleiches weggenommen, läßt Gleiches. 4. Ungleichem Gleiches zugesetzt, bringt Ungleiches. 5. Von Ungleichem Gleiches weggenommen, läßt Ungleiches. 6. Gleiches verdoppelt, gibt Gleiches. 7. Gleiches halbiert, gibt Gleiches. 8. Was einander deckt, ist einander gleich. 9. Das Ganze ist größer als sein Teil. 10. Alle rechten Winkel sind einander gleich. 11. Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden innern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen. 12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein".

Auch bei diesen "Axiomen" muß logisch festgestellt werden, daß es sich keineswegs um "Grundsätze" im Sinne allgemeinster wahrer Urteile handelt, sondern um etwas kompliziertere Definitionen. Sind aber auch die sog. Axiome Definitionen, so ist die Frage, was durch sie definiert wird. Bemerken wir zuerst, daß sie im 1. Buch gleich nach den geometrischen Definitionen und Postulaten stehen und deswegen gewöhnlich als geometrische Axiome aufgefaßt werden. Das trifft aber nur auf einen Teil von ihnen zu. Der andere Teil ist so formuliert, daß man ihn sowohl auf geometrische wie auf arithmetische Gebilde beziehen kann. Und da sie offensichtlich auch für die Zahlverhältnisse gelten sollen, scheinen sie überhaupt von den Definitionen und Postulaten abgetrennt worden zu sein.

Bemerken wir sodann, daß in Nr. 1 - 8 und in Nr. 10 immer von "Gleichheit" die Rede ist, in Nr. 4, 5, 9 und 11 aber (auch) von Ungleichheit. Nur die Nr. 12 fällt aus dem Rahmen. Daraus können wir entnehmen, daß es sich hier überhaupt um die Definition der mathematischen Hauptjunktoren handelt, nämlich der Gleichung als Äquivalenz und der Ungleichung (die logisch nur eine negierte Äquivalenz sein kann). Die nächste Frage muß dann sein, ob auch an diesen "axiomatischen" Definitionen eine Dialektik bzw. Kontradiktorik auszuweisen ist. Und das ist offenbar der Fall und kann in einer platonischen Mathematik auch nicht anders sein. Zeigen wir dies an den einzelnen Definitionen.

Nr. 1 definiert die Gleichung selbst. Klarer formuliert könnte diese Definition lauten: Eine Gleichung besteht zwischen zwei Gegebenheiten, die beide einer dritten Gegebenheit gleich sind. Die Dialektik liegt dabei im hier benutzten und vorausgesetzten Begriff der Gleichheit. Diese ist logisch gesehen eine Denkform, die etwas Identisches und etwas Verschiedenes zugleich zu denken vorgibt. Was das jeweils bei geometrischen und arithmetischen Verhältnissen ist, bleibt in der Definition unerwähnt (wohl deshalb, damit der dialektische bzw. kontradiktorische Charakter der Definition verschleiert wird). Aber es läßt sich genau angeben. Bei der arithmetischen Gleichung besteht die Identität im Zahlenwert der Ausdrücke links und rechts in der Gleichung, der Unterschied aber in der Ausdrucksgestalt dieses Wertes (G. Frege hat eben diesen Unterschied als identische "Bedeutung" und verschiedenen "Sinn" bei der Gleichungsdarstellung bezeichnet).

Bei geometrischen Beispielen besteht die Identität in der Form und gegebenenfalles in der Größe der verglichenen Gebilde, der Unterschied aber in der örtlichen Festlegung bzw. Orientierung bzw. in der numerischen Unterscheidung der Gebilde. Identität und Unterschied werden aber beide zusammen "Gleichheit" genannt, und nur deshalb können zwei verschiedene Gebilde überhaupt verglichen werden, eben weil sie eine - als Drittes ausweisbare - identische Eigenschaft aufweisen.

Nr. 2 definiert mit Hilfe der Gleichung das Vergrößern von geometrischen Gebilden bzw. die Addition (Summenbildung) bei Zahlen. Nimmt man die Definition wörtlich, so gilt sie anschaulich - z. B. für den kaufmännischen Praktiker - für die Verhältnisse an einer Balkenwaage. Nur hier kann man an beiden Enden der Balken (im gleichen Abstand von der Mitte) Gleiches zusetzen, so daß Gleiches (wie der Ausgangszustand eines balancierten Gleichstandes) sich ergibt. Der platonische Mathematiker aber denkt und weiß natürlich, daß das "bringt Gleiches" gerade ein anderes Gleiches als die Gleichheit der Ausgangsverhältnisse meint - und damit eben ein "ungleiches Gleiches". Die Dialektik der Addition in der Gleichung liegt also darin, daß dadurch die Gleichung als identische erhalten bleibt, aber die Glieder der Gleichung sich "gleichmäßig" verändern und somit nicht gleich bleiben.

Nr. 3 definiert genau entsprechend das Vermindern oder Verkleinern geometrischer Gebilde bzw. die numerische Subtraktion in der Gleichung. Bemerken wir hierzu, daß Euklid noch nicht von "negativen Zahlen" spricht und deshalb auch nicht von einer Subtraktion einer größeren von einer kleineren Zahl. Dann gilt das oben Gesagte wiederum von der Identität der Gleichung selbst und der Verschiedenheit der sich ergebenden Zahlenwerte. Die unbeschränkte Subtraktion, von der Euklid freilich nicht spricht, erzeugt dann das weitere dialektische Problem der negativen Zahlen, die logisch gesehen Zahlen sind, aber zugleich ganz andere als die bisher definierten, mit denen man dann auch ganz anders rechnen muß als den hier definierten.

Nr. 4 und 5 definieren die Ungleichung so, daß sie durch die in 2 und 3 definierten mathematischen Operationen nicht verändert, sondern erhalten bleiben. Hier wird zwar auch an das Waagemodell mit Ungleichgewicht appelliert, aber es veranschaulicht die Sache allenfalls in engsten Grenzen.

Nr. 6 definiert am Beispiel der Verdopplung und Halbierung, die ja gerade in der Geometrie besonders wichtige Operationen sind, auch die numerische Multiplikation in der Gleichung. Auch davon gilt die dialektische Festellung, das das Resultat der Operationen ein "anderes Gleiches" als das Ausgangsgleiche ist. Die "Verdopplung" in der Gleichung läßt sich ohne weiteres als Beispiel für alle arithmetischen Vervielfachungen verstehen, nicht aber für alle geometrischen Vervielfachungen. Jedenfalls scheint die Formulierung des Axioms die Grundlage für die Anwendung der Multiplikationsregel in Gleichungen geworden zu sein.

Nr. 7 sieht nun so aus, als werde parallel dazu eine allgemeine Divisionsregel (am Beispiel der Halbierung) formuliert. Und sie ist auch in der Rechenpraxis kanonisch geworden. Die Halbierung zweier gleicher Größen führt gewiß zu zwei Hälften dieser Größen, die gleich bleiben. Nun werden aber in der späteren Rechenpraxis die Teilungen (einschließlich der Halbierungen) keineswegs in Proportionsgleichungen notiert (etwa: $(3 + 3) / 2 = 6 / 2$), sondern das Rechenergebnis einer Division wird mit nur *einem* Teil der erhaltenen Teile gleichgesetzt (also: $6 / 2 = 3$). Für diese kann das formulierte Halbierungsaxiom und damit auch eine entsprechende allgemeine Divisionsregel nicht gelten.

Es bedarf freilich bei der langen Gewohnheit, Divisionsrechnungen in Gleichungsform zu notieren, eines gewissen Umdenkens, um zu bemerken, daß allgemein die Teilung einer Größe in gleiche Teile eben eine bestimmte Anzahl von Teilen ergibt, keineswegs aber nur "einen" Teil von diesen. Wer "einen" ganzen Kuchen halbiert, erhält dadurch zwei Hälften, also nicht nur einen halben Kuchen. Die "Gleichung" $6 / 2 = 3$ muß daher in der Tat eine Ungleichung sein, denn als echte Gleichung könnte sie nur lauten: $6 / 2 = 2$ mal 3.

Wir finden wenigstens eine Andeutung dieser Sicht der Division in Platons Überlegungen zur Idealzahl, die der weise Gesetzgeber kennen muß, um das Ganze des Gemeinwesens proportionierlich "einzuteilen". Nach Jakob Friedrich Fries' Interpretation handelt es sich um die Zahl 5040, von der Platon in den "Nomoi" explizit (737 a) spricht (vgl. J. F. Fries, Platons Zahl, De Republica L. 8.p. 546 Steph. Eine Vermutung, Heidelberg 1823, neu in: J. F. Fries, Sämtliche Schriften, Band 20, Aalen 1969, S. 356 - 384). Platons Text lautet: "Jetzt wollen wir nur als Beispiel und Muster eine Zahl annehmen. Es sei also, um eine bequeme Zahl zu nehmen, die Summe der Teilhaber und Verteidiger des Landes 5040. In so viele Teile werde dann auch das Land und die Wohnplätze verteilt, so daß der Köpfe und Teile gleich viel sei. Man teile hernach die ganze Summe in zwei, dann in drei. Sie läßt sich aber auch in 4, in 5 und so weiter bis auf 10 Teile verteilen (insgesamt aber...) durch 59 Zahlen". Platon spricht hier und in weiteren Ausführungen davon, daß bei all diesen Teilungen immer die "ganze" Ausgangszahl mit der Summe oder den Produkten der Divisoren "gleich" bleibe, "in wieviele bequeme Teile sich jene Zahl 5040 (auch) teilen lasse". Und das kann nur heißen, daß er die "Gleichheit" nicht auf das Verhältnis des Divisors zum Einzelteil bezog.

Wir können auf diesen logischen Sachverhalt hier nur hinweisen. Er bedeutet, daß die mathematische Division in Gleichungsformulierung die Gleichung selbst zur contradictio in terminis macht. Und das erklärt uns, warum die mathematische Logik niemals einen logisch äquivalenten Junktor zum Divisionsjunktor hat aufspüren können. Denn er könnte nur lauten: "... ist äquivalent/nicht äquivalent mit...." Das aber bleibt dem mathematischen Junktor "... größer/gleich/keiner..." bzw. "≅ (gleich/ungleich)" vorbehalten, der in den sogenannten Funktionsgleichungen die Hauptrolle spielt.

Nr. 8 ist eine speziell geometrische Definition der Deckungsgleichheit. Was hierbei "decken" bzw. "zur Deckung bringen" heißt, ist praktische Routine beim Darüberschieben gleicher Figuren in der Ebene, aber auch beim Überklappen von spiegelbildlichen Figuren im Raume (z. B. beim Händeklatschen oder wie es zusammengeklappte Schmetterlingsflügel zeigen). Nun mag man logisch entweder die dazu geeigneten übereinandergeschobenen Figuren gleich nennen, oder aber die spiegelbildlichen. Es geht jedenfalls ohne Widerspruch nicht an, sie beide zugleich "gleich" zu nennen, denn sie sind - die einen am anderen gemessen - gerade ungleich. Und gerade darin liegt nun die Widersprüchlichkeit dieser Definition, daß sie die Deckungsgleichheit sowohl auf gleiche wie ungleiche Figuren bezieht.

Der platonische Mathematiker erhebt sich über die sinnliche Anschauung des einen oder des anderen, indem er das sich deckende Gleiche sowohl von der einen wie von der anderen Seite zugleich sieht, gleichsam von außen (wie auf dem Blatt vor ihm) und von innen (zwischen den Blättern). Dies betrifft aber nur die Spezialdialektik der Deckungsgleichheit. Die tieferliegende besteht in der Verschmelzung von Identität und Unterschied in diesem Begriff von "Deckung" Denn was sich wirklich deckt, wird in aller sinnlichen Anschauung eines und identisch dasselbe und ist nicht mehr unterscheidbar. Da es aber nur "gleich" sein soll, so wird es gerade unterscheidbar und unterschieden sein.

Nr 9 macht von der Definition der Ungleichheit Gebrauch und spezifiziert sie als das Verhältnis von "größer ... kleiner". Dieses hat in der Arithmetik als eigener Junktor " > " ("größer als...", und spiegelbildlich dazu "<" "kleiner als...") eine bedeutende Anwendung, ebenso aber auch in der Geometrie im Verhältnis von Figuren und Teilfiguren (z. B. Kreis - Halbkreis). Die Verwendung der Wörter "Ganzes" und "Teil" wendet sich zweifellos wieder an den Praktiker, der nicht im Zweifel sein kann, was dies anschaulich bedeutet. Der Arithmetiker wird sich das Verhältnis von Ganzem zu seinen Teilen zunächst etwa an den Summen im Verhältnis zu ihren Summanden verständlich machen, die größer sind als diese. Bei den Definitionen der arithmetischen Verhältnisse im 5. Buch (Def. 1 und 2) und im 7. Buch (Def. 3) ist auch explizit von größeren Zahlen und kleineren als deren Teile die Rede, nicht aber vom Ganzen.

Der platonische Mathematiker muß hier aber das Ganze wiederum als ein dialektisches Gebilde denken. Es enthält einerseits kleinere Teile und ist deshalb größer als jeder dieser Teile. Andererseits enthält es sich selbst als seinen Teil und muß damit zugleich auch größer als es selbst sein. Man kann vermuten, daß diese - von Euklid freilich nicht ausgesprochene - Implikation Grundlage des traditionellen Spruches geworden ist: "Das Ganze ist mehr als seine Teile (gemeint ist: die Summe seiner Teile)". Diese Denkform ist später in der mengentheoretischen Mathematikbegründung weidlich ausgebeutet worden und hat ihren kontradiktorischen Charakter in den mengentheoretischen Antinomien offen gezeigt.

Nr 10 klingt wie eine Tautologie und ist deshalb in manchen Euklidausgaben an dieser Stelle weggelassen worden. Man unterstellt dann, daß der Begriff "rechter Winkel" schon selbst die Bedeutung hat, daß "alle gleich" seien. Und das wäre ganz richtig, wenn es in dieser Definition nur auf den Begriff vom rechten Winkel ankäme, dessen einzelne Beispiele wohlunterschieden und somit "gleich" sein können. Erinnern wir uns aber, daß die mathematische Gleichheit eine Äquivalenz bedeutet, in der ein Identisches und ein Unterschiedliches zugleich ausgedrückt wird, nicht aber nur eine intensionale Identität des generischen Merkmals in allen unter das Genus fallenden Instanzen. Die Gleichheit unter den rechten Winkeln meint also zugleich die Identität hinsichtlich der gemeinsamen Eigenschaft "rechte" zu sein als auch die Unterschiedlichkeit ihrer Lage und Stellung in den geometrischen Gebilden. Und dies läßt sich nur in Gleichungen darstellen.

Nr. 11 wird gewöhnlich als "negative" Präzisierung der Parallelendefinition verstanden und deswegen in neueren Euklidausgaben an dieser Stelle weggelassen. Gleichwohl scheint die Definition der Nicht-Parallelen an dieser Stelle nicht überflüssig zu sein, da sie ja ein häufig auftretendes praktisches Problem betrifft, nämlich Parallelen von Nichtparallelen und die entsprechenden Winkelverhältnisse bei den Schnitten zu unterscheiden. Die Dialektik der Nicht-Parallelendefinition liegt in der Bedeutung des Ausdrucks "genugsam verlängern". In der Praxis wird dies immer ein Schnittpunkt der Nicht-Parallelen in endlichem Abstand sein. Aber es wird durch die Formulierung (und das sog. Postulat Nr. 2) nicht ausgeschlossen, daß er im Unendlichen liegen könnte, und dann sind die Nicht-Parallelen zugleich auch Parallelen und die nicht-rechten Winkel sind zugleich rechte.

Nr 12 besagt wörtlich, daß "zwei gerade Linien keinen Raum einschließen". Neuere Übersetzungen geben hier statt "Raum" "Flächenraum". Angesichts der Tatsache, daß zwei winkelbildende Geraden auch bei Euklid eine Fläche einschließen (was, wie oben gesagt, vorausgesetzt werden muß, aber nicht definiert wird), muß man die Definition als "Flächenraum" geradezu für "falsch" halten. Falschheit ist aber bei Definitionen (als Äquivalenzen) auszuschließen und auch dem Euklid nicht zu unterstellen. Also wird doch wohl gemeint sein, daß sich durch zwei gerade Linien kein Raumgebilde einschließen läßt. Man braucht - entsprechend den Winkelschenkeln des Dreiecks in der Fläche - mindestens drei gerade Linien im Raume dazu. Descartes hat die zwei Linien im "Flächenraum" zur Grundlage seines nach ihm benannten Koordinatensystems gemacht, und die drei Linien sind seither gerade die Konstituentien der Raumgeometrie geworden. Wenn es hierbei eine Dialektik gibt, so liegt sie, wie auch schon bei den Winkelflächen, darin, daß diese Flächen bzw. Räume sowohl "eingeschlossen" als auch "nicht eingeschlossen" sind.

Bezieht man die Definition aber, wie wir hier vorschlagen, auf den (dreidimensionalen) Raum, so schließt sie nicht aus, daß zwei "gerade Linien", die vorne als solche definiert wurden, die gleichmäßig zu allen in ihnen enthaltenen Punkten liegen, sehr wohl auch eine Fläche einschließen können, wie das bei den nichteuklidischen "geodätischen" Linien der Fall ist. Auch bei dieser Definition erweist sich also die sogenannte nichteuklidische Geometrie als schon in der euklidischen begründet.

Wie man gesehen hat, gehen die "Elemente" des Euklid in diesen “wissenschaftlichen” Teilen nicht über das hinaus, was auch schon Aristoteles für jede Wissenschaft gefordert hatte, was aber bei ihm nicht für den Bereich der Mathematik geleistet war: die beschreibende Definition der "geistigen Substanzen" bzw. der mathematischen Ideen, die in einer "*Faktenkunde*" gewußt und beherrscht werden mußten, um mit und zwischen ihnen "theoretische" Verknüpfungen vornehmen zu können.

Mathematische "*Theorie*" mußte dann in einer "erklärenden" Urteilsbildung bestehen, in der die so definierten Elemente als "Begriffe" eingesetzt und in behauptenden Aussagen verbunden wurden. Solche Erklärungen und Theorien liest man in den "Theoremen" und überhaupt in den Texten der mathematischen Abhandlungen und Lehrbücher, wenn man die geometrischen Konstruktionen und die Gleichungen beiseite läßt.

Wer diese Textpartien aufmerksam und unter Ansetzung der logischen Sonde liest, der wird bemerken, daß in ihren Urteilen sehr bald alle diejenigen logischen Widersprüche, Antinomien, Paradoxien auf tauchen, die sich aus der Verwendung der definierten kontradiktorischen Begriffe zwangsläufig ergeben müssen. Sie wurden und werden in der Regel dadurch konterkariert, daß man je nach Bedarf nur die eine der in den kontradiktorischen Bestimmungen gelegenen Behauptungsmöglichkeiten exhauriert und die gegenteilige beiseite läßt. Aber es dürfte geradezu das Gesetz des Fortschrittes in der mathematischen Theorieentwicklung darstellen, daß die andere Seite schließlich doch aufgegriffen und in Konkurrenz zum vorher exhaurierten Gegenteil entwickelt wird. In dieser Phase werden die definitorischen Kontradiktionen zum Ausgang alternativer Theoriekonzeptionen, die die früheren Theorien verdrängen oder diese als "klassische" Vorstufen dem historischen Gedächtnis einverleiben. Das beste Beispiel dafür dürfte die oben genannte Definition der geraden Linie, die zu allen Punkten in ihr "gleichmäßig liegt", sein. Mit welcher epochalen Emphase wurden die sog. nichteuklidischen Geometrien im 19. Jahrhundert als umstürzende Revolutionen der Mathematik (und der kosmischen Raumanschauungen!) gefeiert, während sie doch nur eine bis dahin vernachlässigte Komponente des dialektischen euklidischen Begriffs der Gerade bzw. der Fläche sind.

Aber neben den sprachlichen mathematischen Artikulationen durch behauptende Urteile gibt es die sog. formalen Artikulationen der arithmetischen Formeln und Gleichungen in den Beweisen und in den geometrischen Konstruktionen. Zünftige Mathematiker - aber nicht Euklid selber - haben sich angewöhnt, in ihnen eine eigene besondere, ja "ideale" Sprache für die Behauptung mathematischer Wahrheiten von unübertrefflicher Präzision zu sehen. Und im selben Maße, wie sie dies taten, sahen sie in den tatsächlichen sprachlichen Texten nur unpräzise, didaktisch-hinführende und allenfalls erläuternde Paraphrasen zum exakten Formelsinn, von dem sie - immer noch mit Platon - meinten, er ließe sich in gewöhnlicher Sprache prinzipiell nicht ausdrücken. Entsprechend nahmen sie ihre Fachsprache auch nicht mehr ernst und arbeiteten nicht mehr daran, sie als Teil einer gelehrten Bildungssprache, die auch Außenstehenden zugänglich sein konnte, zu kultivieren.

So schwand auch allmählich das Bewußtsein davon, daß es gerade umgekehrt war und auch von Euklid so gemeint war: Die Formeln sind - gleichsam als nur eine Seite des in Gleichungen Definierbaren - entweder nur einfache mathematische Begriffe oder komplexe aus einfachen Begriffen mit mathematischen Junktoren gebildete mathematische Ausdrücke. Und die Gleichungen definieren ihrerseits, welche von ihnen denselben Sinn und dieselbe Bedeutung wie andere haben sollen, die Ungleichungen aber, welche Begriffe oder Ausdrücke nicht denselben Sinn bzw. dieselbe Bedeutung haben sollen. Was es dabei mit den speziell arithmetischen Junktoren (den Operationsanweisungen für die Rechenarten) auf sich hat, und daß und wie sie sich prinzipiell von den logischen - nicht urteilsbildenden, sondern nur ausdrucksbildenden - Junktoren ableiten lassen, das haben wir vorn (und in der Logik, S. 156 - 161) gezeigt.

Was wir bisher dargestellt haben, ist in den "Elementen" des Euklid thematischer Gegenstand weniger Seiten am Anfang einiger Bücher (bzw. Kapitel). Der Hauptteil des Werkes von guten 4oo Seiten aber besteht in praktischen Konstruktionsaufgaben der Geometrie, deren Lösung mit Hinweis auf die dazu nötigen Begriffe und Ausdrücke und die anzuwendenden praktischen Operationen mittels Lineal und Zirkel (und nur mit diesen!) angegeben wird. Hinzu treten "Beweise", daß die erzielten Ergebnisse "richtig" sind. Dieser Teil bzw. diese Teile der "Elemente" stellen den praktischen Teil des Werkes dar, und was dabei dargestellt wird, nennt man gewöhnlich die *"Probleme"*.

Es hat unter den Auslegern des Euklid langwierige Auseinandersetzungen darüber gegeben, war hier eigentlich Problem genannt werde, und ob und wie es von den "theoretischen" Partien zu unterscheiden sei: Proklos, einer der prominentesten Kommentatoren der "Elemente", sagt darüber, “bald gelte es, etwas Gesuchtes ausfindig zu machen, bald, ein bestimmtes Objekt herzunehmen und zu untersuchen, was es ist, oder von welcher Beschaffenheit, oder was mit ihm vorging, oder in welchem Verhältnis es steht zu einem anderen”.

Die Frage ist noch heute umstritten und bildet selber ein Problem. Und man wird auch sagen können, daß es - angesichts einer recht dürftigen wissenschaftstheoretischen Literatur zum Thema "Problem" - eines der bis in die moderne Wissenschaftstheorie am meisten vernachlässigten und aufklärungsbedürftigen Probleme darstellt. Während die einen alles problematisierten, schränkten die anderen ein: Problem ist nur die Suche nach einem bestimmten von mehreren möglichen Wegen zu einem bestimmten Ziel. Proklos drückt das so aus: “Wenn jemand in der Formulierung, als handle es sich um ein Problem, sagen wollte, es sei in einen Halbkreis ein rechter Winkel einzuzeichnen, so wird er sich den Ruf eines Laien in der Geometrie zuziehen; denn jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter”.

Was also gar nicht anderes zu machen ist als auf eine bestimmte Weise, kann nicht Problem sein. So wird man in Proklos' Sinne auch sagen dürfen, daß nicht das Nichtwissen und auch nicht das Wissen die Probleme macht, sondern das je bestimmte Wissen um das Nichtwissen. M. a. W.: Man muß schon wissen, was man sucht, und muß den Umkreis kennen, wo es zu finden ist, so daß man bei genügendem Umherschweifen darauf stößt, daß es einem “einfällt”. Und so wird an dieser Wissenschaft mit ihren so sparsamen und übersichtlichen Voraussetzungen, Regeln, und Handgriffen klar, daß es auch in ihr nicht ohne Einfälle, Phantasie, ja den “Zufall” geht, der einem nun diesen oder jenen Weg zur Lösung “eingibt”, diese oder jene Hilfskonstruktion zu wählen half. Geben wir als Beispiel eine solche geometrische "Aufgabe" aus Euklids Werk:

Sie lautet (1. Buch, Satz 1): "*Aufgabe*: Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie AB ein gleichseitiges Dreieck zu errichten."

Eine beigegebene Figur zeigt die Strecke AB, um deren Endpunkte zwei sich schneidende Kreise mit dem Radius AB geschlagen sind. Ein mit C bezeichneter Schnittpunkt dieser Kreise, mit den Punkten A und B verbunden, liefert das gleichseitige Dreieck. D und E bezeichnen beliebige Punkte auf den jeweiligen Kreisen. Die Problemlösung lautet:

"Aus dem Punkte A beschreibe mit AB den Kreis BCD, und aus dem Punkte B mit BA den Kreis ACE. Vom Punkte C, in welchem die Kreise einander schneiden, ziehe nach A und B die Geraden CA und CB: So ist ACB das verlangte Dreieck".

Es folgt der *Beweis*: "Denn da AC = AB und BC = BA: so ist AC = BC. Demnach ist AC = AB = BC, folglich das auf AB errichtete Dreieck gleichseitig." (Man beachte, daß die Gleichungen im Beweis die definierte "Deckungsgleichheit" der Strecken zum Ausdruck bringen.)

In der Tat sind die in diesem praktischen Teil der "Elemente" aufgelisteten geometrischen Konstruktionsprobleme und gelegentlichen arithmetischen Probleme sämtlich schon gelöste Probleme und insofern eben keine Probleme mehr. Sie sind die von Euklid mit enormem Fleiß und gelehrtester Übersicht gesammelten Problemlösungen aller seiner Vorgänger in der Geometrie, zu denen er nur recht wenige eigene hinzugefunden hat. Und diese Lösungen sind wiederum das gesammelte Erbe einer ausgebreiteten und emsigen empirischen Such- und Probiertätigkeit nach Lösungen von praktischen Problemen der Architektur und der Mechanik.

Gelöste Probleme aber werden von selbst zu Methoden und Techniken zur Bewältigung von Aufgabenstellungen. Insofern waren und blieben die "Elemente" zu allen Zeiten das autoritative Handbuch der Aufgabenbewältigung für die entsprechenden praktischen Herausforderungen, und das auch noch in Zeiten, wo sich im Verlauf des Kulturverfalls solche Aufgaben nicht einmal mehr stellten und die "Probleme" als rein theoretische Angelegenheiten behandelt wurden.

Gerade dadurch aber wurden die "Elemente" auch zum abendländischen Lehrbuch der Geometrie und späterhin zum Vorbild aller mathematischen Lehrbücher. Diese enthalten noch immer Aufgabensammlungen, die dem Lernenden als Probleme aufgegeben werden, deren Lösungen ihm aber vorenthalten werden, so daß er sich zunächst - und manchmal auch mit Erfolg - an einer selbstgefundenen Lösung erfreuen und damit als neuer Thales oder Pythagoras fühlen kann. Der Lehrer aber, der sich früher selbst vielleicht in dieser Weise an "Problemen" abgearbeitet hat, kennt die Lösungen (oder sollte sie kennen) und weiß daher, daß auf diesem Gebiete schwerlich neue Lösungen gefunden werden können.

Je weiter aber nun darin fortgeschritten wird, desto mehr konzentriert sich das Lernen und Lehren auf die Beweise der Richtigkeit der Lösungen bis es - in der akademischen Lehre - fast nur noch in der Herleitung von Beweisen für Lösungsvorschläge besteht. Man verkenne nicht, in welchem Maße diese akademische Lehrart der Mathematik dann dazu beigetragen hat, der Mathematik den Nimbus zu verschaffen, in ihr werde geradezu alles in beweisender Deduktion von evidenten Axiomen her vermittelt.

Kein Wunder, daß die Platoniker, zu denen ja auch gerade Proklos gehörte, darin eine Bestätigung der Anamnesislehre sehen konnten, die dem Mathematiker ein “unbewußtes Wissen” vindizierte. Sie ist bis heute der Grund für die verbreitete Überzeugung geblieben, daß die echten Problemlösungen der Begnadung und der unvorgreiflichen Genialität verdankt werden und daher mit Ehrenpreisen und unsterblichem Ruhm zu honorieren seien. Und so ehren die Mathematiker (und Naturwissenschaftler) bis zum heutigen Tag die ingeniösen Erfinder solcher Problemlösungen, indem sie sie mit deren Eigennamen benennen.

An der Stelle, wo in den geometrischen Büchern der "Elemente" "Probleme" als Konstruktionsaufgaben aufgelistet sind, stehen in den arithmetischen Büchern die *"Lehrsätze" bzw. Theoreme*, und nur gelegentlich sind auch "Probleme" als Aufgaben eingestreut. Diese Theoreme sind nun die eigentlich behauptenden Urteile und Schlüsse in den "Elementen" und damit auch der wahrheits- bzw. falschheitsfähige Teil dieser Wissenschaft. In ihnen ist das "theoretische Wissen" der ganzen antiken Arithmetik gesammelt.

Bemerken wir zuerst und vorzüglich für Philosophen: Man findet hier keine der vermeintlich banalen "mathematischen Wahrheiten" wie etwa das kantische Beispiel für ein angeblich apriorisch-synthetisches Urteil, daß "5 + 7 = 12" sei, das naturgemäß und nach allem bisher Gesagten nur eine Äquivalenz bzw. eine Definition eines bestimmten Summenausdrucks durch einen bestimmten Zahlenwert darstellt. Die "theoretischen" Wahrheiten" in diesem Bereich lauten vielmehr etwa so:

> (*Lehrsatz*, Buch 10, Satz 1): "Nimmt man bei zwei gegebenen ungleichen Größen AB und C von der größeren AB mehr als die Hälfte weg (es darf auch nur die Hälfte sein!), von dem Reste wieder mehr als die Hälfte (oder auch nur die Hälfte!), und so immer fort, so kommt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe C."

Hier ist zunächst wichtig, daß von "Größen" die Rede ist. Dies können Zahlen sein und der Lehrsatz muß dann von ihnen gelten. Es können aber auch geometrische Größen wie etwa Strecken von bestimmter Länge sein. Und genau solche werden nun im "Beweis" des Lehrsatzes und in einer beigefügten Abbildung solcher Strecken verwendet. Er lautet (und sei als Beispiel für solche Beweise hier angegeben):

> (*Beweis*): "Mache, was immer angeht, von C (der kleineren Größe) ein Vielfaches DE, welches zunächst größer als AB (die Ausgangsgröße) ist und teile solches in seine der C gleiche Teile DF, FG, GE. Von AB nimm mehr als die Hälfte BH, von dem Reste AH mehr als die Hälfte HI, und dies so fort, bis in AB so viele Abschnitte AI, IH, HB (sind) als Teile in DE sind. Da also DE größer als AB ist, und von DE weniger als die Hälfte EG, von AB aber mehr als die Hälfte BH weggenommen wird, so ist der Rest GD größer als AH. Nun wird von GD die Hälfte GF, von AH aber mehr als die Hälfte HI weggenommen. Folglich ist der Rest DF größer als AI, oder, weil DF = C ist, C größer als AI, folglich der Rest AI kleiner als C. - Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn in AB immer nur die Hälfte weggenommen wird."

Der Beweis demonstriert die Größenverhältnisse "ad oculos" für den geometrischen Praktiker, aber nicht für den arithmetischen Denker. Ihm ist es sicher plausibel, daß man jede Zahl durch fortgesetzte Subtraktion von Einheiten kleiner machen kann als eine beliebige Zahl, die kleiner ist als die Ausgangszahl. Das Problem dabei ist, ob der Rest bei solchen Subtraktionen immer überhaupt eine Zahl ist. Offensichtlich ist das nicht immer der Fall, denn es können auch "irrationale" Restgrößen übrigbleiben, von denen es offen bleibt, ob sie Zahlen sind. Aber auch die irrationalen "Größen" sind jedenfalls Größen - und das 10 Buch der "Elemente" handelt genau von diesen und definiert sie. Deshalb impliziert der geometrische Beweis hinsichtlich der "Größen" für die Zahlenlehre, daß man die irrationalen Größen als Zahlen behandeln muß, wenn das Theorem für die Arithmetik gelten soll. Und daß dies gemeint ist, geht wohl schon aus dem nächsten Lehrsatz 2 hervor, welcher lautet: "Zwei ungleiche Größen AB, CD sind, wenn bei wiederholter Wegnahme des Kleinern vom Größern kein Rest das ihm nächst Vorhergehende genau mißt, inkommensurabel". Der 5 Satz aber lehrt unter deutlichem Hinweis auf die Verschiedenheit von Zahlen und inkommensurablen Größen: "Kommensurable Größen A, B verhalten sich wie Zahlen zu einander."

Wir haben die "Elemente" des Euklid als abendländisches Lehrbuch der Mathematik so ausführlich im vorliegenden Kontext dargestellt und kritisch-logisch betrachtet, weil es stilbildend für die Methode der Darstellung der Resultate der wissenschaftlichen Forschungsergebnisse geworden ist. Und dies keineswegs als Alternative zur Logik des Aristoteles und der Stoiker, sondern auch und gerade als Darstellungsmethode der Ergebnisse logischer Forschungen. Boethius, der Übersetzer und Kommentator vieler logischer Schriften des Aristoteles, aber auch der Euklidischen Elemente und damit auch Hauptvermittler griechischer Methodologie an den lateinischen Westen, hat dafür geworben und seine eigene disziplinäre Arbeit danach ausgerichtet: "Wie in der Mathematik üblich, habe ich auch für die übrigen Disziplinen Begriffe und Regeln vorgeschlagen, aus denen ich alles Folgende entwickele" (Ut igitur in mathematicis fieri solet, caeterisque etiam disciplinis proposui terminos regulasque, quibus cuncta quae sequuntur efficiam) heißt es in seinem "Liber de hebdomadibus" (Über die Sechstage-Schöpfung der Welt).

"Begriffe und Regeln" stand hier für das, was in der Neuzeit allgemein "Axiomatik" genannt wurde. Und man hat Anlaß, dies auch für den modernen Begriff "Axiomatik" im Auge zu behalten, denn dieser ist eher unscharf geworden. Man hat ihn mit allem befrachtet, was aus der aristotelischen Logik als "Grundsätze", aus der stoischen als "Unbeweisbare" (genauer: "Unanschauliche") Schluß- und Argumentformen überliefert war. Und es wurde geradezu geflissentlich im Dunklen gelassen, was diese "unbewiesenen oder unbeweisbaren Voraussetzungen" ihrer logischen Form nach sein sollten. Und doch oszilliert das Grundverständnis von Axiomatik noch immer zwischen den boethianischen "Begriffen" und "Regeln", nämlich den hilbertschen "impliziten Definitionen" von Grundbegriffen und dem wittgensteinschen "Regelbefolgen". Von diesen aber kann man logisch nur sagen: Implizite Definitionen sind keine Definitionen; und Regelbefolgen schwankt selbst nach Wittgenstein zwischen "natürlichen" Verhaltensweisen und "kulturell" andressierten Verhaltensroutinen als "Lebenformen".

Hinter dem boethianischen Vorschlag der allgemein disziplinären Verwendung der mathematischen Darstellungsweise stand und steht eine epochale institutionelle Arbeitsteilung der Philosophie. Sie war in Platons "Freien Künsten" angelegt, sie wurde in der Spätantike durch die Enzyklopädisten ausgearbeitet, und sie wurde in den Fächern der Philosophischen Fakultät in der Scholastik fortgesetzt und institutionalisiert. Wir meinen die Unterscheidung der trivialen und der quadrivialen Wissenschaften mit ihren je besonderen Methodenarsenalen. Die Logik bzw. Dialektik (so hieß sie im Mittelalter) war dem Trivium ("Dreiweg") der Studienfächer zugewiesen, und sie war im Verein mit der Grammatik und Rhetorik die Grundmethodologie der später sogenannten Geisteswissenschaften, d. h. der philologisch-historischen Disziplinen. Die Mathematik, eingeteilt in Geometrie und Arithmetik, aber war dem Quadrivium ("Vierweg") der Studien zugeteilt, die es mit den "Realien" der Natur im weitesten Sinne (einschließlich der Akustik und der musikalischen Harmonielehre) zu tun hatte.

Beide Methodologien - die Logik und die Mathematik - waren bis in die Renaissance und vielfach bis ins 19. Jahrhundert - gemeinsamer Lehr- und Lernbestand der Philosophen, die sie als wissenschaftliche Propädeutik den Aspiranten der "höheren" Fakultäten Theologie, Jurisprudenz und Medizin beizubringen hatten. Aber sie hatten seit der Antike auch eine unübersehbare Affinität zu den großen Hintergrundmetaphysiken des Platonismus und des Aristotelismus bewahrt.

Der bis in die Hochscholastik vorherrschende Neuplatonismus schätzte stets die Mathematik und wandte ihre Denkformen auf die Naturerkenntnis, aber vor allem auch auf die Gotteserkenntnis an. Davon zeugen die christliche und islamische Rezeption der "Steucheiosis theologice" (Στοιχειωσις Θεολογικη, lateinisch 1268 als "Elementatio Theologica" übersetzt) des Proklos, die "Regulae de Sacra Theologia" des Alanus ab Insulis, die "Ars Catholicae Fidei" des Nicolaus von Amiens, welche "definitiones, distinctiones continet et propositiones artificioso successu combrobantes" für die Theologie aufstellt. Davon zeugt auch Roger Bacon, der sich mit Robert Grossetest und "vielen anderen" einig weiß, "die mittels der Macht der Mathematik die Ursachen aller Dinge zu erklären und sowohl Menschliches wie Göttliches genügend darzustellen wußten" (qui per potestatem mathematicae sciverunt causas omnium explicare et tam humana quam divina sufficienter exponere) (vgl. dazu G. Jacobi, Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtschreibung, Stuttgart 1962, S. 99).

Auch nach dem hochscholastischen Paradigmawechsel zum Aristotelismus, der auch eine neue Hochkonjunktur der aristotelischen Logik mit sich brachte, fand die mathematische Methodologie ihre neuplatonischen Anhänger und Vorkämpfer. Das Unternehmen des *Raimundus Lullus* einer "ars magna" oder "ars combinatoria" als Grundmethodologie aller Wissenschaften kann gar nicht anders verstanden werden. Es gründet sich auf vorgängige Definitionen der Begriffe aller Wissenschaften, die dann in einer euklidischen Buchstabensymbolik "formal repräsentiert" wurden. Mechanisch durch drehbare Kreise zu neuen Ausdrücken jungiert und in Tabellen rubriziert, sollte man dann aus den sich ergebenden komplexen Buchstaben-Ausdrücken neuen Sinn ablesen und herausinterpretieren können.

Die Schwäche der lullischen Kombinatorik lag ersichtlich im Mangel einer ausgearbeiteten Junktorentheorie für die Begriffskombinationen. Sie konnte allenfalls das Verhältnis von allgemeinen zu besonderen Begriffen (als Implikationsverhältnis) darstellen. Aber dieses faßte sie - wohl nach stoischem Vorbild - zugleich als "Aussagenbildung" auf und versprach damit alles zu erschöpfen, was sich überhaupt über die Gegenstände aller Einzelwissenschaften sagen ließ. Daß damit ein wesentlicher Kunstgriff des mathematischen Denkens berührt, wenn auch noch nicht geklärt wurde, zeigt sich an dem geradezu ungeheuren Erfolg des Lullismus bis ins 17. Jahrhundert und in seiner Ausarbeitung und Verbesserung in der Leibnizschen Kombinatorik. Bemerken wir dazu: Es erscheint als optisch-historische Täuschung, wenn man allgemein behauptet, die Lullische Kunst sei im 17. Jahrhundert wie eine abgeblühte und als Fehlentwicklung erkannte Methodologie plötzlich verschwunden. Im Gegenteil: Sie lebt in der "mathematischen Logik" fort, und diese schämt sich hier nur ihrer Ursprünge.

In der lullischen Begriffs- und Ausdruckskombinatorik konnten widersprüchliche Begriffe nicht auftreten. Und gerade diese Eigentümlichkeit, daß nämlich alle Begriffe grundsätzlich mit allen in ein aussagenkonstituierendes Verhältnis treten konnten, ohne daß sich ein Widerspruch oder darauf gegrün dete Falschheit formal aufzeigen ließ, scheint die Attraktivität der "mathematischen Logik" des Lullus begründet zu haben. Nicht minder hat das wohl auch bei und nach Leibniz dafür gesorgt, daß bei den Mathematikern das Bewußtsein schwand, in ihren Grundbegriffen könnten überhaupt Widersprüche eingebaut sein.

Nikolaus von Kues, selbst ein guter Kenner der Mathematik, der neupythagoräischen Kabbala und Anhänger der lullischen Kunst, aber ebenso gut auch Kenner der aristotelischen Logik, scheint der einzige gewesen zu sein, der das Problem der widersprüchlichen Begriffe im Lullismus erkannt und auf seine Weise fruchtbar genutzt hat. Man kennt seine berühmte Formel der "Coincidentia oppositorum" - den Zusammenfall des Entgegengesetzten - im Unendlichen. Seine Formel ist nichts anderes als die aristotelische Definition der contradictio in terminis als Widerspruch im Begriff. Er betonte mit allem Nachdruck des aristotelisch geschulten Logikers, daß das diskursive Denken und Argumentieren im Bereich der Gelehrsamkeit ihn zu vermeiden hätte. Aber für den Bereich der Mathematik zeigte er, daß er im Bereich des Infiniten, d. h. der mathematischen Minima und Maxima, unvermeidlich und als genuine mathematische Denkform für das Erfassen des "Unendlichen" geradezu unentbehrlich sei. Wie schon Euklid, diente ihm die Geometrie zur "Veranschaulichung" des sonst nur zu Denkenden: Die Seiten eines "Unendlich"-Eckes fallen mit dem Kreisumfang zusammen, der Kreisbogen des unendlich großen Kreises fällt mit der Geraden zusammen, der Kreisumfang des unendliche kleinen Kreises mit seinem Mittelpunkt, das unendlich kleine Minimum fällt mit dem unendlich großen Maximum zusammen, usw. Daß er diese mathematische Denkform für das Unendliche theologisch für das Gottesverständnis (als Unendliches) einsetzte, entsprach jüdischer Kabbala (wo das hebräische En Soph = griechisches Apeiron = lateinisches Infinitum = deutsches Unendliches der höchste Gottesname ist), und es paßte auch zur seit Tertullian ausgebildeten "dialektischen Theologie", die die Dogmen als Widersprüche verstand. Hier angewandt, erhielt sie seither den Ehrentitel der "docta ignorantia".

Für die lullistische Methode aber bedeutete dies, daß der Widerspruch im Begriffe dadurch auf Randzonen der Infinitesimalmathematik beschränkt, hier aber zur obligatorischen Denkform erhoben wurde. Und gerade das hat wiederum die Tendenz unterstützt, in der Mathematik davon auszugehen, daß in den normalen Begriffen selbst keine Widersprüchlichkeit liegen könnte, daß der Widerspruch aber in extremalen Forschungsbereichen gleichsam wie eine rote Warnlampe vor falschen Wegen in der Gestalt von Paradoxien auftrete. Das ist bisher in der Mathematik Standard geblieben.

Leibniz hat sich, so weit bekannt ist, nirgends auf den Cusaner berufen, wohl aber auf Lullus. Und doch ist seine neue Theorie der Minima und Maxima, die ihn zu den Konzepten der neuen Differential- und Integralmathematik führte, ganz klar durch des Cusaners Lehre von der coincidentia oppositorum (in extremis) inspiriert. Leibniz hat sie nicht nur für die Extremalanalysen übernommen, sondern sie in einer Weise verallgemeinert, daß sie geradezu als normale mathematische Denkform gelten konnte. Wandte sie der Cusaner noch als außerordentliche - geometrische - Analogie auf das Gottesverständnis an, so Leibniz auf die ganze Natur und darüber hinaus auf die Logik selber. Das mußte einem Zeitalter, das mit dem Fernrohr in unendliche Weiten blicken und mit dem Mikroskop die feinsten Feinheiten des unendlich Kleinen erspähen wollte, recht plausibel erscheinen. Die Differentiale des unendlich Kleinen, aus denen sich alle mechanischen und dynamischen Vorgänge erklären, und das Integral des unendlichen Ganzen, zu dem sich das so erklärte Wissen zusammenfügen lassen sollte, wurden für ihn und seine Zeit, erst recht aber seither, die Haupterklärungsmuster der theoretischen Physik und Astronomie. Und auch darin zeigt sich wiederum ein Widerspruch. Denn solche Wissenschaft verstand und versteht sich als rationale theoretische Wissenschaft, deren Erkenntnisse sich dem reinen Denken verdanken sollten. Sie will als solche gerade von der empirisch-anschaulichen Beobachtungsebene der "Phänomene" loskommen und sie zum rational-abstrakten Wesen hin übersteigen. Unendlich Großes oder unendlich Kleines aber kann selbst nur empirisch-sinnliches Phänomen sein: Es ist das, was man in der Ferne nicht mehr sieht und als Ganzes überblickt; und es ist das, was man in der Nähe nicht mehr "auflösen", distinguieren kann (daher spricht man bei der Lupe von der Grenzes des Auflösungsvermögens). Wie aber sollte es für das Denken, das angeblich nicht anschaut, Grenzen des "Blickes in die Ferne" und der Sehschärfe im Nahen geben. Wie sollte überhaupt eine Standpunkthaftigkeit des Denkens definiert werden, da jeder Standpunkt nur sinnlich in einer Umgebung ausgewiesen werden kann, der erst Nahes und Fernes, Kleines und Großes mitdefiniert? Sollte man nicht davon ausgehen, daß man sich gerade im Denken an jeden Ort versetzen, sich selbst zu jeder Größe und Kleinheit vergrößern und verkleinern kann, wie es doch Kopernikus inaugurierte, als er sich mit seinem "geistigen Auge" auf die Sonne versetzte und die Planeten überschaute, auf deren einem er doch zugleich saß? Und doch spricht man gerade bei den theoretisch-abstrakten Denkgebilden der Mathematik von Größen, als ob sie in ihrer "Mächtigkeit" gesehen würden und geradezu vor uns stünden, und erst recht, als ob sie vor dem geistigen Auge ins Nichts verschwinden oder in eine strukturlose Unendlichkeit übergehen könnten. Als abstrakt Gedachtes bleiben sie also doch zugleich sinnlich, und der dialektische Mathematiker unterscheidet strikt zwischen Größen und Infinitesimalem und vereinigt zugleich beides zu infinitesimalen Größen.

Indem sich aber mit solchen Begriffen physikalische Verhältnisse quantifizieren und berechnen ließen, schien auch der praktische Beweis erbracht, daß die coincidentia oppositorum kein echter Widerspruch in terminis, sondern ein weiteres undialektisches Denkmittel sei. Damit bestätigte Leibniz aber gerade das ursprüngliche lullische Programm, das in der Kombinatorik der Begriffe überhaupt keine Widersprüche mehr ausweisen ließ.

Für die Mathematisierung der Logik ("Leibnizprogramm") bedeutete dies die Umwandlung ihrer Elemente in mathematische Gebilde und ihre Unterwerfung unter kalkülmäßige Behandlung. Der Kalkül aber erwies sich als das neue ockhamsche Messer, mit dem in der Mathematik und mathematischen Logik alle Fragen nach der Logizität der kalkülmäßigen Operationen abgeschnitten wurden.

1. Die Begriffe wurden zu Variablen. Sie wurden damit nach der Maßgabe von Zahlengrößen (für die die Variablen in der Analysis stehen) verstanden. Für ihre Quantifikation wurden anstatt der aristotelischen (ein, einige, alle, kein) direkte Zahlenwerte und die Null benutzt. Gerade Leibniz versuchte auch, die lullische "ars characteristica" zu einer numerischen Charakteristik auszubauen, in der die Begriffe einer Disziplin grundsätzlich durch Zahlen dargestellt werden sollten. Für die Kombination von Begriffen zu Ausdrücken wurden die Rechenarten als Junktoren eingesetzt.

2. An die Stelle der Urteile traten die Gleichungen und Funktionen. Vor allem wurde die Kopula durch den Äquivalenzjunktor bzw. das Gleichheitszeichen ersetzt, die Gleichung selber aber als urteilsbildende Junktur gedeutet. Dadurch erhielten die durch Gleichungen ausgedrückten Definitionen den Status behauptender Urteile mit Wahrheitswertzuschreibung.

3. An die Stelle der aristotelischen und stoischen Schlüsse traten die gleichungsumwandelnden Beweisverfahren nach mathematischen Rechenregeln, insbesondere die Auflösung von Funktionsgleichungen (für Y) unter Nullsetzung der unabhängigen Variablen (X), und dies veranschaulicht im cartesianisch-geometrischen System. Man sollte logisch meinen: Wenn ein Begriff kein Begriff ist (und das bedeutet logisch die Null-Quantifikation), so kann er schwerlich einen andern begrifflichen Ausdruck definieren (bzw. mit ihm äquivalent sein). Aber in der Mathematik und im mathematischen Funktionenkalkül kreiert man damit neue Ausdrücke.

Eine solche Beweismethodologie mußte Folgen für die Grundsätze bzw. Axiome nach sich ziehen, die seit Aristoteles als Postulate für rationales Handeln die Logik regulierten. In dieser Logik galt 1. der Grundsatz der Identität: Man soll einen Begriff in allen Verwendungen als denselben behandeln, insbesondere keinen homonymen Bezeichnungen aufsitzen 2. der Satz des zu vermeidenden Widerspruchs: Man soll nicht zugleich und in gleicher Hinsicht etwas und sein Gegenteil behaupten. 3. der Satz des auszuschließenden Dritten. Man soll kein Drittes neben dem Wahren und dem Falschen in der Logik zulassen. Damit war man in der Logik ausgekommen, wenngleich man sie nicht alle strikt einhielt. Wir haben viele Beispiele aufgezeigt, wo sich der Widerspruch (vor allem in der Gestalt des begrifflichen Widerspruchs) auch in der Logik nicht vermeiden läßt, und wir haben auch gezeigt, daß das auszuschließende "Dritte" selbst der Widerspruch als Wahr-Falsches ist, das z. B. als Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit undurchschaut schon bei Aristoteles selbst keineswegs ausgeschlossen wurde.

In euklidisch-mathematischer Deutung konnten diese Axiome, die bei Aristoteles allenfalls den Status von Postulaten für logisches Argumentationshandeln hatten, nur Definitionen ausgezeichneter mathematischer bzw. mathematisch-logischer Gebilde sein. Sie definierten nunmehr, was unter Identität, Widerspruch und Drittem verstanden werden sollte.

Leibniz ergänzte die drei klassischen Axiome durch ein an erster Stelle stehendes *"Prinzip"* (das ließ offen, ob es eine Definition oder ein behauptender "Grund-"Satz sein sollte) vom *"zureichenden Grunde"*. Nach Christian Wolffs Beispiel wurde es später als ein Abgrenzungsprinzip der formalen Logik von der inhaltlichen Anwendung auf die Wirklichkeit angesehen, so daß als "Grund" dabei immer ein Realgrund bzw. eine Kausalursache gemeint war. Leibniz selbst scheint es eher als formales Prinzip eines Begründungserfordernis aller logischen Tatsachen - im Sinne des Beweiserfordernisses aller euklidischen Problemlösungen und Theoremformulierungen - gemeint zu haben. Und so hat es in der mathematischen Logik schließlich auch gewirkt.

Dem *"Widerspruchsprinzip"* mußte Leibniz schon deshalb einen anderen Sinn als den klassischen verschaffen, als er Widersprüche in den mathematischen und somit mathematisch-logischen Begriffen weder erkennen noch anerkennen konnte. Und so schränkte er es darauf ein, daß es nur noch ein Falschheitsprinzip für gleichzeitige Ableitbar- und Beweisbarkeit eines mathematischen Ausdrucks und seiner Verneinung sei. Daß dies aber grundsätzlich bei Ableitungen aus kontradiktorischen Begriffen der Fall sein mußte, weil eben Wahrheit und Falschheit zugleich in die damit formulierten Urteile einfließen, und daß diese wahr-falschen Ableitungen nur dann nicht auftreten, wenn man sich nur an die eine Bedeutung des jeweiligen kontradiktorischen Ausgangsbegriffs hält und die andere ausblendet, das hat Leibniz nicht durchschaut. Auch das ist in der modernen mathematischen Logik so festgehalten worden. Widersprüche und Paradoxien zeigen sich hier immer erst dann, wenn man wirklich den ganzen positiv-negativen Sinn der sogenannten implizit definierten Grundbegriffe ausschöpft und damit von dem hergebrachten Verständnis dieser Begriffe abweicht.

Das *"Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten" ("Tertium non datur")* hielt Leibniz - wie wir vielfach zeigten mit Recht - für eine andere Formulierung des Widerspruchsprinzips. Aber gerade darin ist man ihm niemals gefolgt. An seiner Stelle aber machte er dann ein neues, von ihm erfundenes *Prinzip der "Identität des Ununterscheidbaren" (Principium identitatis indiscernibilium")* geltend, das das alte Identitätsprinzip ersetzen bzw. präzisieren sollte. Es begründete die logische Identität nicht mehr in der Konstanz und Eindeutigkeit der Begriffe, sondern in der Ersetzbarkeit unterschiedlicher formaler Symbole "salva veritate" (mit demselben Wahrheitswert). Ersichtlich war das darauf abgestellt, die Erhaltung des Gleichungscharakters bei allen rechnerisch-operativen Veränderungen der Ausdrücke links und recht in der Gleichung zu garantieren. Logische Begriffe lassen sich nämlich niemals "salva veritate" durch andere logische Begriffe ersetzen, wie an der Pyramide ja leicht zu sehen ist.

Insgesamt wird man für diese Mathematisierung eine Verschiebung der logischen Materien von einer Sach- und Wirklichkeitslogik zu einer Möglichkeitslogik feststellen. Unter Anknüpfung an die klassische Modallogik werden die logisch-mathematischen Gebilde selbst durchweg als "Möglichkeiten" gedacht, und mit dem denkbaren Möglichen wird das Unmögliche - das in der klassischen Modallehre kaum Thema war - als das nicht-denkbare Absurde nunmehr zum einzigen Statthalter des Widerspruchsvollen als des grundsätzlich Falschen.

Zweifellos hat Leibniz am meisten dahin gewirkt, daß die platonisch-euklidische Denkweise der Mathematik, die sich zu seiner Zeit als *Mos geometricus* allgemein durchsetzte, als Erneuerung und Verbesserung einer bis dahin als vorwiegend aristotelisch eingeschätzen Logik aufgenommen und weiter entwickelt wurde. Wie man weiß, hat er darin mit dem, was man seither das "Leibnizprogramm" nennt, mit einer gewissen Spätwirkung seit dem 19. Jahrhundert so entschieden Erfolg gehabt, daß wohl die meisten modernen Logiker auf seinen Spuren gehen.

Leibniz selbst gehörte bekanntlich zu den großen Mathematikern der Moderne. Und er selbst mag sein Programm der Erneuerung der Logik durchaus als eine "Mathematisierung" der Logik verstanden haben, wie es auch die meisten modernen Logiker tun, die in der Regel studierte Mathematiker sind. Gleichwohl war die Durchdringung der Gebiete durch die jeweiligen Methodiken niemals eine totale. Die Mathematik hatte nur die Physik mit ihren Disziplinen quantifiziert, nicht die Chemie und Biologie. Und die Logik hatte die Geisteswissenschaften zwar durchdrungen, aber niemals in der Weise, daß alles hier Sagbare in logische Formalisierungen eingefangen worden wäre. Man konnte erwarten, daß beide Methodiken ihr Glück auf den jeweils anderen Gebieten versuchen würden: die Logik in den Naturwissenschaften, und die Mathematik in den Geisteswissenschaften. Und letzteres war es, was Leibniz mit seinem Programm versuchte.

Gerade weil diese trivialen und quadrivialen Methodologien so alt und eingeführt waren, waren sie vielfach nur noch Routine und ermangelten beide der philosophischen Durchleuchtung. Und beide konnten sich von der anderen hier Hilfestellung versprechen: Logische Durchleuchtung der Mathematik, und mathematische Durchleuchtung der Logik. Das war der Ausgangspunkt auch für Leibniz und die moderne Mathematik, die jedenfalls dem Anspruch und den offiziellen Erklärungen nach "logische Begründung" der Mathematik erstrebten. Erst später im 19. Jahrhundert wurde daraus die Mathematisierung der Logik.

In dem Maße, wie dies bewerkstelligt wurde, wurde die umgekehrte Bewegung abgeblockt. Es kam nicht mehr zu einer grundlegenden logischen Durchleuchtung der Mathematik. Vielmehr deutete die Mathematik Euklid in einer Weise um, die jeden Versuch einer logischen Kritik als Eingriff in ihren autonomen Bereich erscheinen lassen mußte.

Wolfgang Stegmüller spricht hier explizit von einer "*Umdeutung* dieser (euklidischen) Axiomatik in der Hilbertschen Weise" und sagt über deren Gründe: "Sie entsprangen wohl alle mehr oder weniger dem Wunsch, die Mathematik von Fragestellungen zu befreien, welche vom Mathematiker als störend und lästig empfunden wurden und werden, insbesondere dem Bestreben, von der reinen Mathematik die Anwendungsprobleme abzuschütteln, die beim Übergang von der reinen zur physikalischen Geometrie auftreten; teilweise auch dem Unwillen, sich auf erkenntnistheoretische Diskussionen einlassen zu sollen, innerhalb welcher die Wahl von Axiomen gerechtfertigt werden muß; ferner der starken Neigung, zu verhindern, daß alltägliche Ausdrücke wie 'Punkt', 'Gerade' und die diesen Ausdrücken korrespondierenden Anschauungen mit all ihren Vagheiten und Verschwommenheiten Eingang in das mathematische Denken finden; schließlich die Tendenz, unbequemen Fragen ausweichen zu dürfen, etwa Fragen von der Art, ob es sich bei den geometrischen Begriffen nicht etwa um gedankliche Fiktionen handle, bei denen das Maß zulässiger Idealisierungen überschritten sei u. dergl." (W. Stegmüller, Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band IV / 1, Berlin-Heidelberg-New York 1973, S. 109 - 110).

Wir haben mit diesem Exkurs über die euklidische Mathematikbegründung einen Versuch dazu unternommen, diese Immunisierungsstrategie zu unterlaufen. Er zeigt, daß die Mathematik insgesamt eine philosophische Schullogik, nämlich die platonische, zur Grundlage hat, und daß diese gerade durch Euklid als dialektisch-herakliteische Logik entfaltet wurde. Ihre wesentlichen Merkmale sind:

1. Ihre Grundbegriffe sind zu einem beträchtlichen Teil kontradiktorische Begriffe, deren Bedeutung sich aus den in ihnen kombinierten Merkmalen regulärer gegensätzlicher (im Negationsverhältnis zueinander stehender) Begriffe ergibt.

2. Ihre grundlegende Argumentationsform ist die Gleichung, und diese ist eine Definitionsform, d. h. eine logische Äquivalenzform, keineswegs eine Behauptungsform. Das heißt zugleich, daß die in Gleichungen definierten Begriffe oder Ausdrücke nichts mit Wahrheit oder Falschheit (oder einem Dritten) zu tun haben können. "X = Y" behauptet nicht daß X und Y identisch seien, sondern daß sie (als verschiedene Zeichen) dieselbe Bedeutung haben sollen. Diese Bedeutung kann etwa in der Arithmetik jeden beliebigen Größenwert annehmen unter der Bedingung, daß er jeweils für X und für Y derselbe ist.

3. Da es bei Gleichungen auf die Erhaltung der Äquivalenz, d. h. der Identität der Ausdrucksbedeutung links und recht in der Gleichung ankommt, erhält auch die Ungleichung als Nicht-Äquivalenz eine systematische Bedeutung. Sie kann nichts anderes als die Verschiedenheit der Bedeutungen der Ausdrücke links und rechts in der Ungleichung ausdrücken. Wird sie gleichwohl als Gleichung notiert, so versteht man sie zwar als das mathematische Pendant zum falschen logischen Urteil. Logisch können Ungleichungen aber nur die Verschiedenheit der Bedeutungen ungleicher oder auch gleicher Ausdrücke (in Wörterbüchern etwa die unterschiedliche Bedeutung homonymer Wörter) darstellen. Was man etwa bei Rechnungen in Gleichungsform als "falsche Rechnung" bezeichnet ("3 + 2 = 7"), ist daher auch keine falsche Behauptung, sondern allenfalls etwas, was man logisch als Begriffsverwirrung bezeichnen kann, so wie wenn man etwa sagen würde: "Hunde und Katzen, d. h. Vögel".

Definitionen sind frei zu setzen. Davon macht die Mathematik kreativen Gebrauch. So sind etwa die verschiedenen Zahlarten durchweg durch "erzwungene" Totalisierungen der Anwendbarkeit der mathematischen Junktoren (Bildung mathematischer "Körper") in Rechnungsausdrücken definiert worden, und das Verfahren wird ständig zu weiteren Definitionen von Begriffen, Ausdrücken und Strukturen benutzt, die den ungeheuren Reichtum des mathematisch Wissbaren ausmachen.

Dabei wird allerdings die Gleichungsform auch mißbräuchlich zur "kalkülmäßigen" Definition von Begriffen und Ausdrücken benutzt, deren Bedeutung man nicht kennt (oder nicht versteht) oder bei denen man Grund zu der Vermutung hat, daß sie überhaupt keine (mathematische) Bedeutung haben. Ein berühmtes Beispiel ist die "Fermatsche Vermutung", daß die Summe zweier Zahlen in jeweils dritter oder höherer Potenz keiner Zahl mit derselben (dritten oder höheren) Potenz gleich sei. Sie wird gewöhnlich mit der Gleichung "$x^n + y^n = z^n$ " für $n \geq 2$ (für n größer/gleich 2) formuliert. Diese Gleichung definiert für Quadratzahlen (n = 2) die sogenannten pythagoräischen Zahlentripel (z. B. 3, 4, 5) und ist bei deren Einsetzung, wie man sagt, erfüllt. Deswegen wird sie mit Recht als Äquivalenzgleichung notiert. Darüber hinaus definiert sie aber auch den Ausdruck "$x^{n>2} + y^{n>2}$ " als bedeutungsgleich mit einem Zahlenwert einer Potenzzahl gleichen Ranges, die niemand kennt und die es nach Fermats Vermutung nicht gibt. Wie kann sie dann eine Gleichung bleiben? Sie wird, wie man leicht versteht, auch nicht der Fermatschen Intention gerecht, denn diese wäre in mathematischer Notation als Ungleichung zu formulieren: "$x^{n>2} + y^{n>2} \neq z^{n>2}$ ".

Diese üblich gewordene Verwendung der Gleichung macht nicht nur dem mathematischen Anfänger große Schwierigkeiten, sondern sie ist auch logisch höchst bedenklich. Da die Gleichung auch von Logikern oft mit dem kopulativen Urteil verwechselt wird, scheint sie auch in der Logik zu dem ver breiteten Usus geführt zu haben, über Angelegenheiten, über die man nichts weiß und worüber man daher allenfalls Vermutungen anstellen kann, gleichsam im Brustton der Überzeugung Behauptungen aufzustellen, deren Wahrheitswert unentscheidbar ist (etwa: "Die Zahl der Sterne ist gerade").

4. Eine Spezialform der Gleichung sind die Funktionsgleichungen bzw. Funktionen. Sie sind in der cartesianischen "analytischen Geometrie" zum arithmetischen Ausdrucks- und Beschreibungsmittel für geometrische Gebilde in der Fläche oder in mehrdimensionalen Räumen geworden. Sie enthalten (mindestens) zwei Variable, gewöhnlich X und Y, die je nach Ausdrucksgestalt ihrer junktoriellen Verknüpfung mit Zahlausdrücken gegenseitig ihre "möglichen" Größenwerte bestimmen. Diese Größenwerte von X und Y koinzidieren in jedem Punkt einer durch die Funktionsgleichung dargestellten geometrischen Flächenfigur. Die Koinzidenzpunkte der Figur sind daher die jeweiligen Identitäten (Fregesche Bedeutungen) der verschiedenen Ausdrücke mit X und Y in der Funktionsgleichung. Lassen sich bei Null-Setzung der (unabhängigen) Variablen (X) ein oder mehrere Größenwerte für die abhängige Variable (Y) bestimmen, so gelten diese Werte als "Lösungen" der betreffenden Funktion. Geometrisch werden die Lösungen als Schnittpunkte eines geometrischen Gebildes mit der Y-Achse im cartesianischen Raum dargestellt. Aber auch bei diesen Null-Lösungen handelt es sich nur um Koinzidenzpunkte, da ja im cartesischen System auch Null-Werte auf einer der Achsen eine (geometrische) Größe bzw. einen geometrischen Punkt bezeichnen.

Abstrahiert man bei den Funktionsgleichungen vom geometrischen Modell (d. h. von ihrer Veranschaulichung im cartesianischen Raum durch geometrische Gebilde), so entfallen auch die identischen Referenzpunkte von X und Y und es bleiben nur verschiedene X- und Y-Ausdrücke in der Funktionsgleichung zurück. Die "Funktionsgleichung" wird dadurch zu einer echten Ungleichung, durch die nur die Verschiedenheit aller X- und Y-Werte notiert wird. Dies erweist den dialektischen Charakter der "Funktionsgleichung".

Ersichtlich sind die "Funktionsgleichungen" oder "Funktionen", wie man vielleicht aus einer gewissen Ahnung davon, daß es sich bei rein arithmetischen Funktionen keineswegs mehr um Gleichungen handeln kann, eine mathematische Ausdrucksform, die am ehesten der logischen Schlußform entspricht und daher auch gerne als deren "Mathematisierung" in Anspruch genommen wird: "Wenn X diesen oder jenen Wert annimmt, dann ergibt sich für Y ein funktional entsprechender" Wert und umgekehrt. Daß die Werte für X und Y dieselben sein können, wie es eigentlichen Gleichungen entspricht, ist dabei nicht ausgeschlossen, aber doch eher der Ausnahmefall.

5. Was man in der Mathematik "Beweis" nennt, besteht im allgemeinen in Umformungen von Gleichungen nach Regeln der Abfolge von Rechenoperationen (Anwendung von Junktoren auf Ausdrücke). Das Vorbild ist dabei die regelrechte Ausrechnung einer Rechenaufgabe in der Form einer Gleichung. Daß solche Rechnungen sehr kompliziert und gegebenenfalls nur mit Computern ausführbar sein, und dann evtl. auch nur zu näherungsweisen Ergebnissen führen können, ist bekannt. Das ändert aber nichts daran, daß dabei nur komplexe mathematische Ausdrücke mittels eines Zahlenwertes definiert werden (wie etwa der immer noch beliebig weiter präzisier- und berechenbare Näherungswert von π (Quotient von Kreisumfang und Kreisdurchmesser).

In den Beweisen der mathematischen Logik treten an die Stelle mathematischer Ausdrücke und Zahlenwerte in den Gleichungen logische Begriffe, Ausdrücke und/oder behauptende "Aussagen". Es muß auch hier betont werden, daß in der sog. Aussagenlogik, die die Hauptdisziplin der mathematischen Logik bildet, auch viele wahrheitswertunfähige Ausdrücke (wie etwa die Alternative) als behauptende Aussagen gelten, deren "Wahrheitswerte" in den Wittgensteinschen Wahrheitswertmatrizen definiert werden. Diese definitorischen Festsetzungen tragen einen weiteren dialektischen Einschuß in die mathematische Logik, insofern dadurch nichtbehauptende Ausdrücke zu behauptenden Urteilen erklärt werden. Hinzu kommt die ebenfalls vorn im Kapitel über die "Äquivalenzen der Junktoren" aufgezeigte Problematik der angeblichen "Äquivalenzgesetze", die beim Aussagenkalkül dogmatisch als zulässige bzw. obligatorische Umwandlungen der Ausdrücke zugrunde gelegt werden.

6. Die Aspirationen der Mathematik richten sich grundsätzlich auf den Nachweis der Widerspruchslosigkeit aller ihrer Elemente. Bei den "axiomatischen" Grundbegriffen setzt sie diese Widerspruchslosigkeit voraus, ebenso bei allen regelrecht durchgeführten Gleichungsumwandlungen. Widerspruch läßt sich daher nur bei ihren abgeleiteten Theoremen aufweisen, sobald ein Theorem zusammen mit seiner Negation ableitbar erscheint. Theoreme sind aber auch in der Mathematik logische Behauptungssätze, die nicht formalisiert werden, sondern in sprachlichem Klartext stehen. Bei ihnen ist daher auch die Mathematik gezwungen, sich der Logik, also keineswegs der "mathematischen Logik" zu bedienen. Die hier bevorzugten "deduktiven Verfahren" der Ableitung von Theoremen sind mehr oder

weniger auf die aristotelische Syllogistik und die stoischen "Unbeweisbaren" (eigentlich: "Unanschaulichen Schlußformen") zurückzuführen. Zur Fragwürdigkeit der sogenannten vollständigen Induktion zur Gewinnung von mathematischen Begriffen vgl. das weiter vorn Gesagte.

7. Fortschritte der Mathematik bestehen neben der Formulierung und Definition neuer geometrischer und arithmetischer Gebilde immer wieder darin, neue Paradoxien und Widersprüche in ihren Grundlagen aufzudecken und sie nach ihrem klassischen Bewältigungsmuster durch zusätzliche Definitionen auf Zeit zu verdrängen (vgl. das Beispiel der Russellschen Typentheorie).

8. Die Anwendung mathematischer Denkformen auf physikalische Verhältnisse macht auch diese Gegenstände dialektisch. Und dennoch hält man die dann auftretenden Widersprüche für ein Interpretationsproblem bei der Anwendung des mathematischen Formalismus, an dessen eigener Widerspruchslosigkeit nicht gezweifelt wird. Werner Heisenberg sagte darüber: "The mathematical image of the system (gemeint ist die Quantenphysik) ensures that contradictions cannot occur in the system". Zum Welle-Korpuskel-Dualismus sagt er: "The paradoxes of the dualism between wave picture and particle picture were not solved; they were hidden somehow in the mathematical scheme" (W. Heisenberg, Physics and Philosophy. The Revolution in modern Science, New York 1966, S. 93 und S. 40). Und Richard Feynman sagt: "The theory of quantum electrodynamics describes Nature as absurd from the point of view of common sense. And it agrees fully with experiments. So I hope you can accept Nature as she is - absurd". Hierbei ist "absurd" stets als "widersprüchlich" zu verstehen (vgl. R. Feynman, The Strange Theory of Light and Matter, Princeton, N. J. 1988, S. 10, alle Zitate nach Paul Marmet, Absurdities in Modern Physics. A Solution or a Rational Interpretation of Modern Physics, Ottawa 1993, S. 20, S. 24 und S. 17).

Über viele weitere Widersprüche in den physikalischen Begriffen der klassischen und modernen Physik, die sich ersichtlich der Übertragung der mathematischen Denkweise in die Physik verdanken, informiert (wenn vielleicht auch gelegentlich etwas überzogen) J. Marinsek in seinem lesenswerten Buch "Rationale Physik oder wissenschaftliche Science Fiction?", Graz 1989.

10. Die sogenannten logischen Axiome

Es gehört zu den zu Volksweisheiten gewordenen Erträgen der langen Geschichte der Logik, daß man, um "logisch" zu denken und zu argumentieren, nur ihren drei *bewährten und evidenten Grundsätzen von der Identität, dem zu vermeidenden Widerspruch und dem ausgeschlossenen Dritten* folgen müsse. Und darauf beruht auch ein ohne jede formale Logikbildung zu erwerbendes Gespür dafür, wann und in welcher Weise dagegen verstoßen wird.

Kommen in einem Gespräch Zweifel auf, ob man überhaupt noch über diesselbe Sache rede, so ist die Klärung des Themas angezeigt (die Rhetorik nannte das die Prüfung des "status quaestionis"). Man beruft sich auf das Identitätsprinzip, das eben gewährleistet, daß man nicht aneinander vorbei und mit denselben Wörtern über verschiedene Sachen redet. Behauptet einer jetzt dies, und später das Gegenteil davon, so wirft man ihm Widerspruch vor. Das erweckt grundsätzlich den Zweifel an der Fähigkeit zu konsequentem Denken und meist auch ohne weiteres die Überzeugung, daß alles, was einer dann noch sagen könne, falsch sein müsse. Bricht man darauf hin die Unterhaltung nicht sogleich ab, so kommt gewiß die höfliche Aufforderung, der widersprüchlich sich Äußernde solle sich doch gefälligst festlegen und entweder das eine oder das andere behaupten, auf keinen Fall aber dürfe er noch etwas "Drittes" in der Sache vorbringen. Man kann das in jeder Talkshow als logische Dramaturgie erkennen, ebenso wird man jeden Moderator daran messen, ob und wieweit er für die Einhaltung dieser Prinzipien sorgen kann, und die neuere "Dialoglogik" stellt die Logik überhaupt von dieser Gesprächssituation her vor.

Da man das Denken nicht wahrnimmt, sondern aus dem Reden erschließt, das Reden und Argumentieren aber öffentliche und standardisierte Handlungen sind, so wird man in dieser Perspektive die logischen Grundsätze als Handlungsregeln ansehen müssen. Das ist auch eine in der Logik oft vertretene Meinung. Wird dabei auf "vernünftiges Denken" (was man in der Logik und Wissenschaftstheorie jetzt "Rationalität" nennt) abgestellt, so können es nur psycho-hygienische Regeln sein, und die Verstöße dagegen werden als "anormal" und "krankhaft" sanktioniert. Man sagt nicht, aber denkt sich dann wohl: "Wer so redet, der spinnt" oder kräftiger: "Der ist verrückt!" Die abgeschwächte benevolente und nachsichtige Einschätzung wird dann immer noch von "Irrtum" oder "Dummheit" bei demjenigen ausgehen, der diese Regeln nicht einhalten kann. Auch das dürfte unter Logikern verbreitet sind, wenn es auch nicht zum Kodex gehört, es bemerken zu lassen. Gravierender ist es, wenn das vernünftige Regelbefolgen mit der Charakterfrage verknüpft wird. Dann werden die logischen Grundsätze nämlich zu ethischen Regeln, und wer dagegen verstößt, muß damit rechnen, als Lügner oder Betrüger angesehen zu werden. Das ist natürlich ein scharfes Schwert, und entsprechend hart sind die Sanktionen. Man redet mit solchen Leuten nicht und schließt sie aus den Diskussionen aus. Auch das kommt unter Logikern vor.

Die drei logischen Grundsätze gehen bekanntlich auf Aristoteles zurück, der solche "Axiomata" für alle von ihm eingeführten Disziplinen aufzustellen suchte. Er legte sich nicht darauf fest, ob die Logik selber eine wissenschaftliche Disziplin sei, deswegen auch nicht darauf, ob sie eine theoretische oder praktische Disziplin sein könne. Aber indem er sie als Methodologie für alle Wissenschaften konzipierte, konnte sie auch im Sinne aller Disziplinen verstanden werden: als theoretische, als praktische und sogar als praktisch-gestaltende (Werke hervorbringende) Disziplin. In letzterem Falle ergaben sich sogar die Möglichkeiten, sie als Handwerk, als Kunst oder als Technik aufzufassen. Für die praktischen (einschließlich der gestaltenden) Disziplinen mußten ihre "Prinzipien" dann in der Tat als Handlungs- bzw. Gestaltungsregeln (Normen) aufgefaßt werden. Nicht von ungefähr sind die logischen Junktoren inzwischen unter die Din-Normen aufgenommen worden. In dieser Perspektive aber bedeutet dies, daß die logischen Prinzipien keine behauptenden Sätze und somit auch nicht wahrheitswertfähig, d. h. a fortiori nicht wahr sein können.

Diese letztere Auffassungen wird man in der Geschichte der Logik wie auch unter modernen Logikern vertreten finden. Sie macht auch verständlich, was wir oben als übliche Talkshow-Auffassung bezeichnet haben.

In dem Falle aber, daß man die Logik zu den theoretischen Disziplinen rechnete, mußten die Axiome als theoretische Prinzipien aufgefaßt werden. Dann aber konnten sie keine Regeln bzw. Normen sein, sondern sie mußten sich von solchen wesentlich unterscheiden, nämlich als behauptende Sätze mit Wahrheitsanspruch. Die Frage war und ist also, was sie als theoretische Prinzipien sein konnten und mußten. Und dies konnte selber nur eine logische Frage sein. Die Logik selbst mußte über ihren Status entscheiden. Dieser ist aber heute weit davon entfernt, geklärt zu sein.

Aristoteles neigte der Regelansicht zu, wie sich aus seinen verschiedenen Formulierungen der logischen Axiome ergibt. Seine beiläufige Bemerkung, wer über die logischen Axiome diskutieren wolle, zeige sich dadurch als "ungebildet", wird zwar im Nachhinein oft als Hinweis dafür genommen, daß er sie für "theoretische Sätze", jedoch für unbegründbare bzw. unbeweisbare, aber doch "evidente" gehalten habe. Aber sein obiter dictum läßt sich durchaus auch so verstehen, daß er nur meinte: Wer logisch und wissenschaftlich mitreden will, der muß sich an diese Axiome als "Spielregeln" halten. Und diese seien: 1. Beim Thema zu bleiben, 2. Nicht bejahend und verneinend zugleich darüber zu reden, und 3. nicht auf ein Drittes auszuweichen. Spätere Formulierungen zeigen schon an ihrer sprachlichen Gestalt, daß man ihn auch so verstand. "Zu vermeiden" beim Widerspruch und "Auszuschließen" beim Dritten klingen ja nicht nach einer Behauptung, sondern nach einer Anweisung bzw. einer Norm.

Es scheinen die Stoiker und die platonisch-euklidischen Mathematiker gewesen zu sein, die die logischen Axiome und die Axiome überhaupt als exemplarisch wahre Behauptungssätze aufgefaßt haben. Erst damit konnte die Frage aufkommen, ob und wie sie ihrerseits begründet oder auch nur plausibel gemacht werden könnten.

Wo in der Literatur über Axiome als theoretische Prinzipien gehandelt wird, stößt man sogleich auf eine bemerkliche Unklarheit, die ihren logischen Status betreffen. Da "Axiom" gewöhnlich als "Grundsatz" übersetzt wird, steht die Auffassung, es handele sich um wahre (oberste) behauptende Urteile im Vordergrund. Und dementsprechend geht man davon aus, es müßten sich alle anderen logischen Urteile, die überhaupt formulierbar seien, durch diese Grundsätze begründen lassen. In entwickelten Theorien über Axiome, die man dann "Axiomatik" nennt, bemüht man sich stets darum aufzuzeigen, daß und wie alles Theoretische deduktiv aus ihnen "abgeleitet" werden kann. Was dann auch bedeuten sollte, daß die Wahrheit aller Theoreme auf der vorausgesetzten Wahrheit der Axiome beruhe. Und insbesondere Euklid wurde in diesem Sinne interpretiert. Seine "Axiome" sollten die gesamte Mathematik, nämlich Geometrie und Arithmetik, begründen und ihre durchgängige Wahrheit garantieren.

Nun haben wir bezüglich Euklids gezeigt, daß seine "Axiome" durchaus nur eine bestimmte Klasse von Definitionen sind, nämlich vor allem der Gleichung und dessen, was darin gleich und ungleich ist. Sie sollten für Geometrie und Arithmetik zugleich gelten und wurden wohl deshalb von den Postulaten und den übrigen eigentlich sog. Definitionen abgetrennt, weil letztere nur für diese Bereiche getrennt gelten sollten. Wir haben weiter gezeigt, daß mathematische "Sätze" in der Form von Gleichungen überhaupt nur Definitionen sein können. Das muß dann auch für die Axiome gelten. Auch sie können dann nur Definitionen sein, in denen Grundbegriffe, keineswegs Behauptungen in Urteilsform, gegeben werden.

Auch dieses Verständnis findet sich. Es wird meist an die ebenfalls übliche Übersetzung von Axiom als "Prinzip" (was eigentlich die Übersetzung von griechisch "Arché" ist) angebunden. Damit werden die Axiome als "Grundbegriffe" verstanden. Als Begriffe können sie dann nicht selber wahr oder falsch sein. Erst wenn sie als Subjekts- oder Prädikatsbegriffe in Urteilen vorkommen, werden sie zu Wahrheitsbedingungen solcher "Grundsätze".

Als Grundbegriffe der Logik und ggf. der Mathematik werden sie nach dem Vorbild der aristotelischen Kategorienlehre als "Kategorien", d. h. Spitzenbegriffe von Begriffspyramiden aufgefaßt. Über diese besteht die herrschende Meinung, sie könnten nicht definiert werden, weil sie keine höhere Gattung über sich und keine spezfischen Unterscheidungsmerkmale untereinander aufwiesen. Aber das haben wir schon als falsch erwiesen. Gleichwohl gehört zur herrschenden Meinung, es handele sich bei ihnen um undefinierte und undefinierbare Begriffe - was ersichtlich selber widersprüchlich sein muß: Begriffe ohne Merkmale und Umfänge, mittels derer sie definiert werden können, können keine Begriffe sein. Die diesbezügliche herrschende Meinung muß daher selbst "dialektisch" sein, indem sie Nicht-Begriffe für Begriffe nimmt.

Es ist aber keineswegs zwingend, das, was man Identität, Widerspruch und Drittes nennt, als Kategorien aufzufassen. Sie können auch wichtige, aber untergeordnete Begriffe von Theorien sein, die selber nicht der Logik angehören. Damit rechnen Logiker (und Mathematiker) freilich am wenigsten, da sie ja gerne davon ausgehen, Logik (und ggf. Mathematik) seien die einzigen autonomen Disziplinen, die gewissermaßen alle ihre Voraussetzungen in sich selber bergen. Daß auch davon keine Rede sein kann, dürfte wenigstens den Philosophen ohne weiterers einleuchten: Keine Disziplin oder Wissenschaft ist in diesem Sinne autonom, sondern alle übernehmen ihre Voraussetzungen aus philosophischen Grunddisziplinen (Ontologie, Erkenntnistheorie, philosophische Anthropologie und praktische Philosophie), und diese wiederum übernehmen Voraussetzungen aus der Metaphysik, die deshalb die Disziplin der "Letztbegründungen" schlechthin sein muß.

Da die philosophischen Grunddisziplinen und die Metaphysik aber ihrerseits vielerlei Theorien verwalten und zur Verfügung stellen, sind es jeweils einzelne metaphysische oder grunddisziplinäre Theorien, die das Verständnis der Bedeutungen von in der Logik und Mathematik zugrundegelegten Begriffen leiten. Kurz gesagt, ohne Platon und Aristoteles, ohne Nikolaus von Kues, Descartes und Leibniz, ohne Berkeley, Kant und Hegel wird man kaum angemessen verstehen, was in den logischen und mathematischen Voraussetzungen als so "selbstverständlich" gilt und darum meistens nicht einmal diskutiert wird.

In der prominentesten Theorie der Axiomatik von David Hilbert werden Kriterien genannt, die logisch-mathematische Axiome als Grundbegriffe erfüllen müssen. Es sind *Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit*. Daß dies recht willkürliche und obendrein unerfüllbare Postulate sind, hat bekanntlich Gödel für die Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit gezeigt. Es ist ohnehin schwer verständlich, was sie mit der Identität, dem Widerspruch und dem sog. Dritten zu tun haben könnten, und nicht minder, in welchem Verhältnis diese Kriterien untereinander stehen. Wie sollen axiomatische Grundbegriffe als unabhängig voneinander nachgewiesen werden, wenn zugleich eine Widerspruchslosigkeit untereinander nachgewiesen werden soll? Denn eine Widerspruchslosigkeit kann nur gezeigt werden, wenn die Begriffe gerade nicht unabhängig von einander sind. Und wie will man eine Vollständigkeit, d. h. ihr Genügen für die Ableitung aller Theoreme einer Theorie, erweisen, ehe alle erforderlichen Axiome aufgestellt und alle Theoreme aus ihnen abgeleitet sind? Und das bei einer Mathematik (auf die Hilbert dabei Bezug nahm), deren Begriffe zumeist selber widersprüchlich sind.

Der Grund für das Ausweichen auf die Thesen von der Undefinierbarkeit der logischen bzw. mathematischen Grundbegriffe scheint uns darin zu liegen, daß man es nicht fertiggebracht hat, die umlaufenden Meinungen über ihre Bedeutung mit ihrem praktischen Funktionieren in logischen und mathematischen Zusammenhängen zusammenzubringen. Und dies wiederum beruht darauf, daß man geradezu falsche Begriffe von ihnen hat. Wenn der Widerspruch sich als "Falschheit" zur Geltung bringen soll, so kann man sich nur wundern, wenn man beim Umgang damit immer wieder auf die Wahrheit stößt. Wenn man das Dritte für etwas anderes ansieht als gerade den Widerspruch selber, so verstößt man damit gegen das Identitätsprinzip. Und wenn man die Begriffe für einheitliche (nicht weiter analysierbare) logische Gebilde hält, so bleiben die Identitäten, die zwischen ihnen wegen gemeinsamer Merkmale bestehen, aus dem Blick, und man wendet die Identität gerade auf das, was sie wirklich bedeutet, nicht an.

Nach allem, was wir bisher über die Logik vorgetragen haben, ergeben sich für die sog. logischen Axiome Identität, Widerspruch und Drittes folgende Definitionen:

1. *Identität* heißt Bedeutung gleicher formaler Zeichen des logischen Formalismus. Einzelne Großbuchstaben bezeichnen die Identitäten in den Begriffen, die sich in den generischen Merkmalen durchhalten. Kombinierte Großbuchstaben bezeichnen durch Terme belegbare Begriffspositionen, die in Ausdrücken, Urteilen und Schlüssen als identische auftreten. Junktoren bezeichnen in der pyramidalen Struktur vorliegende und jeweils identische Beziehungen mit spezifischen Ausrichtungen zwischen Begriffspositionen.

2. *Widerspruch* heißt die Vereinigung von durch Negation unterschiedenen dihäretischen Artbegriffen zu (irregulären) "Zwischen-"Begriffen. Sie werden in der Logik meistens als "Möglichkeitsbegriffe" behandelt. Sie sind auch die Grundlage für die adjunktive Verknüpfung eines allgemeinen Urteils mit seiner Negation, also den Urteilswiderspruch.

3. *Drittes* heißt in der zweiwertigen Logik Urteilswiderspruch. In dreiwertiger Logik bedeutet es einen selbständigen Wahrheitswert "wahr-falsch" neben dem ersten Wahrheitswert "wahr" und dem zweiten Wahrheitswert "falsch". Das "Dritte" ist dann eine äquivalente Bezeichnung für "Wahrscheinlichkeit".

Diese Definitionen nehmen Bezug auf Begriffe, die nicht in der Logik selbst definiert werden. Was Zeichen, Bedeutungen und Formalismen sind, sind keine logischen, sondern zunächst hermeneutische und darüber hinaus erkenntnistheoretische und ontologische Fragen, die man für logische Zwecke allenfalls präzisieren kann. Eine solche Präzisierung der Identität ist die leibnizsche Formel von der "Identitas indiscerniblilium". Sie betont, daß man dasjenige als Identisches annimmt, an dem man keine Unterscheidungen vornimmt. Es gilt gleichermaßen für Dinge, Beziehungen, logische Einzelmerkmale (Intensionen), Begriffe, sofern sie als Einheiten behandelt werden.

Auch "Widerspruch" ist kein rein logischer Begriff. Wir haben vorne schon auf seine Herkunft aus der Rechtssphäre hingewiesen, wo er noch heute als "Rechtsmittel" der Bestreitung von richterlichen Entscheidungen dient. Man spricht auch allgemein vom "Widerspruchsgeist" (etwa von Jugendlichen, Querulanten oder Häretikern - und vielleicht wird man ihn auch beim Autor dieser Logik diagnostizieren). Was das ist, wird in der praktischen Philosophie und philosophischen Anthropologie diskutiert. In der Logik erscheint er nur eingeschränkt auf innerlogische Kontexte, in denen er zugleich mit einem "Spruch" (z. B. dem Geltungsanspruch eines Arguments) auftritt. Hier signalisiert er zunächst, daß etwas "nicht zusammenpaßt". Was das ist, hat die Logik in Bezug auf alle ihre Elemente ständig überprüft und schließlich bei den Begriffen und Urteilen festgemacht. Daß es darüber hinaus auch gerade bei ihren Voraussetzungen metaphysischer und grunddisziplinärer Begründungstheorien der Fall sein könnte, blieb dabei merkwürdigerweise außer Betracht. Den Widerspruch im Begriff logisch zu klären mußte solange eine undurchführbare Aufgabe bleiben, als man Begriffe durchweg als Einheiten (formal durch einzelne Buchstaben bezeichnet!) behandelte und kein formales Mittel zur Analyse und Darstellung der Vernetzung ihrer Intensionen und Extensionen zur Verfügung hatte. Nur deswegen konnte auch die berühmte Formel Hegels vom "Begriff als Identität der Nichtidentitäten" als typische Definition eines widersprüchlichen Begriffes mißverstanden und er selbst als Neubegründer der dialektischen Logik angesehen werden.

In der Tat ist Hegels Formel aber nur zweideutig und trifft sowohl auf reguläre (nichtwidersprüchliche) wie auf widersprüchliche Begriffe zu. Jeder reguläre Begriff ist eine Einheit von Intensionen und Extensionen. Er umfaßt aber (als Gattung) immer auch andere Art- und Unterartbegriffe, die durch spezifische Differenzen von ihm als Gattung unterschieden werden. Diese gehören sicher zum Begriff und "fallen unter" seine Einheit. Sieht man nur auf die Extensionen der Gattung, so ist es ganz korrekt zu konstatieren, daß jeder Begriff als Identität zugleich mit ihm Nicht-Identisches darstellt. Betrachtet man aber nur die Intensionen *eines* Begriffs, so gilt die hegelsche Formel für die widersprüchlichen Begriffe. Denn in ihnen wird ja - wie wir vorne gezeigt haben - das Wohlunterschiedene dihäretischer Arten, das also nicht identisch (dasselbe) ist, zu einer begrifflichen identischen Einheit verschmolzen. Diesen Begriffstyp hat aber schon Heraklit, der als "der Dunkle" verschrieen war, als "Logos" eingeführt. Daß es also widersprüchliche Begriffe als logische Elemente gibt und wie sie aufgebaut sind, kann daher keine Frage sein. Aber auch hier muß nochmals betont werden, daß ihre Widersprüchlichkeit als solche nichts mit Wahrheit und Falschheit zu tun hat. Auf ihre Fruchbarkeit für Heuristik und schöpferische Planung und Konstruktion haben wir früher hingewiesen.

Daß der Urteilswiderspruch in der ganzen Logikgeschichte mit der Falschheit in eine wesentliche Verbindung gebracht wurde und wird, ist eine der sonderbarsten Erscheinungen abendländischer Geistesgeschichte. Darauf beruhen wohl die meisten Irrtümer und Dunkelheiten logischer Theorien. Aristoteles jedenfalls kann dafür nicht verantwortlich gemacht werden. Er sagte ja nur und deutlich genug, daß man den Urteilswiderspruch vermeiden solle und daß das widersprüchlich bejahend und zugleich verneinend Behauptete nicht zugleich wahr oder zugleich falsch sein könne. Ersteres ist eine pragmatische Regel für jeden "gebildeten" Diskurs, und letzteres ist eine korrekte Feststellung. Sie zeigt den gravierenden Fehler Kants in seiner Antinomienlehre der transzendentalen Dialektik ebenso auf wie den Fehler der neuesten sogenannten "parakonsistenten Logik" (s. Bibliographie), in der Widersprüchliches zugleich wahr sein soll. Aristoteles hat es aber geradezu ängstlich vermieden, sich darauf festzulegen, daß der Urteilswiderspruch, wenn er nicht in beiden Bestandteilen zugleich wahr oder zugleich falsch sein sollte, eben deswegen insgesamt wahr und falsch zugleich sein mußte. Vermutlich deswegen, weil er dabei seine Modallogik "künftiger Möglichkeiten" im Auge hatte, die schon darauf hinauslief, das in Zukunft für möglich Gehaltene zugleich wahr und falsch zu nennen. Das "Mögliche"(dynamei on, potentia, endechomenon), das er selber bekanntlich zu einem Grundbegriff seiner Ontologie gemacht hat, wollte er ja weder vermeiden noch aus der Logik ganz ausschließen. Und so entging ihm auch, daß sein "Drittes", das er auf jeden Fall aus der Logik ausschließen wollte, eben gar nichts anderes als der Urteilswiderspruch sein konnte.

Ist aber Aristoteles nicht der Begründer der Meinung von der logischen Falschheit des Widerspruchs, so können es nur die Stoiker gewesen sein, die diese Meinung entwickelten und verbreiteten. Sie konstruierten den Wideresspruch freilich nicht mittels der Negation, sondern indem sie einen "Gegensatz" zwischen unverträglichen Situationsbeschreibungen diagnostizierten. Wer am hellichten Tage behauptet, es sei Nacht, der behauptet gewiß Falsches, das sofort durch das Faktum des gerade währenden Tages, der das Gegenteil der Nacht ist, widerlegt werden kann. Die Stoiker, die unter anderem ja auch gewöhnlich rechtskundig waren, hielten solche falschen Behauptungen, die im Gegensatz und angesichts offenbarer Fakten geäußert wurden, für "Einsprüche" gegen die Wirklichkeit selber. Man kann sagen, die hielten sie für "leere Sprüche", denen nichts in der Wirklichkeit entspricht. Und das nannten sie dann auch "absurd". Und sicher beruht darauf auch noch der heutige Brauch mathematischer Logiker, den Wahrheitswert "wahr" durch die "1" und "falsch" durch " 0 " (Null) zu bezeichnen.

Die einseitige Betonung des Falschen verdankt sich daher wohl der Situationslogik der Stoiker, in der die Wahrheitskomponente im widersprüchlichen Urteil meist gar nicht ausgesprochen wurde. Daß es Tag sei, brauchte man am Tage nicht zu betonen, und so fiel nur die Falschheit der Behauptung "Es ist Nacht" auf. Erst das Zusammenwachsen aristotelischer und stoischer Logik kann dahin geführt haben, diese Falschheitssicht auch dann noch beizubehalten, wenn (nach aristotelischem Brauch) das widersprüchliche Urteil explizit als Adjunktion eines bejahenden und zugleich desselben verneinten allgemeinen Urteils formuliert wurde. Erst von da an konnte die These von der Falschheit des Urteilswiderspruchs wie ein theologisches Dogma geglaubt und tradiert werden. Und dies umso mehr, als die Logiker darin nunmehr ein rein formales logisches Kriterium für die Urteilsfalschheit zu besitzen glaubten, auf Grund dessen man ganz technisch-schematisch bzw. kalkülmäßig Falschheiten in Theorien erkennen und eliminieren könne.

Dies wurde wiederum eine Voraussetzung für die seither ebenso dogmatisch vertretene Maxime: Ex falso sequitur quodlibet. Denn ersichtlich kann sie nur gelten, wenn dieses vorgebliche "Falsum" ein rein logischer Urteilswiderspruch ist, in welchem Wahrheit und Falschheit zugleich liegen, so daß auch beides aus ihm folgen kann.

Wie man sieht, lassen sich die logischen Axiome nicht definieren und diskutieren, ohne dabei auf Wahrheit und Falschheit - und auch auf Wahr-Falschheit - Bezug zu nehmen. Auch diese sind aber keine rein logische Grundbegriffe, obwohl sie es offensichtlich eher als jene verdienen würden, als solche angesehen zu werden. Auch die Vorverständnisse von Wahrheit und Falschheit sind grunddisziplinärer Natur. Meistens werden ontologische und erkenntnistheoretische Voraussetzungen gemacht, was man an der "realistischen" Korrespondenztheorie und der "idealistischen" Kohärenztheorie der Wahrheit sieht, die auch in die Logik durchschlagen. Die modernen logischen Theorien über Glaube (belief) und subjektive Wahrscheinlichkeiten (Überzeugungen) greifen ersichtlich auf anthropologische Vorverständnisse, etwa die Redlichkeit und "Wahrhaftigkeit" der Mitglieder der "scientific community" zurück. Und auch praxeologische Voraussetzungen spielen bei der neuerlichen Wende zum Pragmatismus mit entsprechenden Wahrheitsnutzen- und Falschheitsnachteilverständnissen eine wesentliche Rolle. Sie alle für logische Zwecke auf einen Nenner zu bringen, dürfte aussichtslos sein. Wohl aber läßt sich daraus dasjenige an Sinn und Bedeutung entnehmen, was für den Aufbau einer kohärenten logischen Theorie dienen kann.

Offensichtlich stand in allen grunddisziplinären Diskursen die Wahrheit immer im Vordergrund. Sie galt und gilt als die Folie, auf der sich Falschheit überhaupt erst als "Flecken" abheben konnte. Selbst neuere Konzepte von der Forschung als "Versuch und Irrtum" (trial and error) setzten Wahrheitsvermutungen voraus und suchten diese durch Falsifikationen zu widerlegen. Diese Unsymmetrie schlug auch auf die Logik durch. Wahrheit verstand und versteht sich von selbst, und das einfache Falsche (nicht sog. Widerspruchsfalschheit) konnte erst von daher verstanden und gekennzeichnet werden. Erst wenn "S ist P" bzw. "p" als wahr vorausgesetzt worden war, konnte "S ist nicht P" bzw. "-p" als falsch gelten, während es für sich alleine genommen wiederum erst einmal als wahr galt.

Diese Unsymmetrie ist auch der Grund dafür, daß es in der Logik bisher nicht gelungen ist, das Falsche als solches (nicht die sog. Widerspruchsfalschheit) im logischen Formalismus selbst kenntlich zu machen. Erst der pyramidale Formalismus eignet sich auch dafür. Und die Berücksichtigung seiner Struktur erlaubt auch die logische Definition genuin logischer Wahrheits- und Falschheitsbegriffe.

4. *Wahrheit* heißt die Verknüpfung regulärer Begriffspositionen mittels urteilsbildender Junktoren in ihrer definierten Funktion.

5. *Falschheit* heißt die Verknüpfung regulärer Begriffspositionen mittels urteilsbildender Junktoren in anderer als ihrer definierten Funktion.

6. *Wahr-Falschheit bzw. Wahrscheinlichkeit* heißt die Doppelverknüpfung regulärer Begriffspositionen mittels eines urteilsbildenden Junktors in seiner definierten und zugleich nichtdefinierten Funktion. Man beachte, daß die alternativen und widersprüchlichen Urteile nach unserem Definitionsvorschlag gleicherweise wahr-falsch sind. Eine Doppelverknüpfung liegt auch vor, wenn zwei dihäretische Begriffspositionen in einen widersprüchlichen Begriff verschmolzen sind und bei einem Urteil mittels des Junktors auf den widersprüchlichen Begriff Bezug genommen wird.

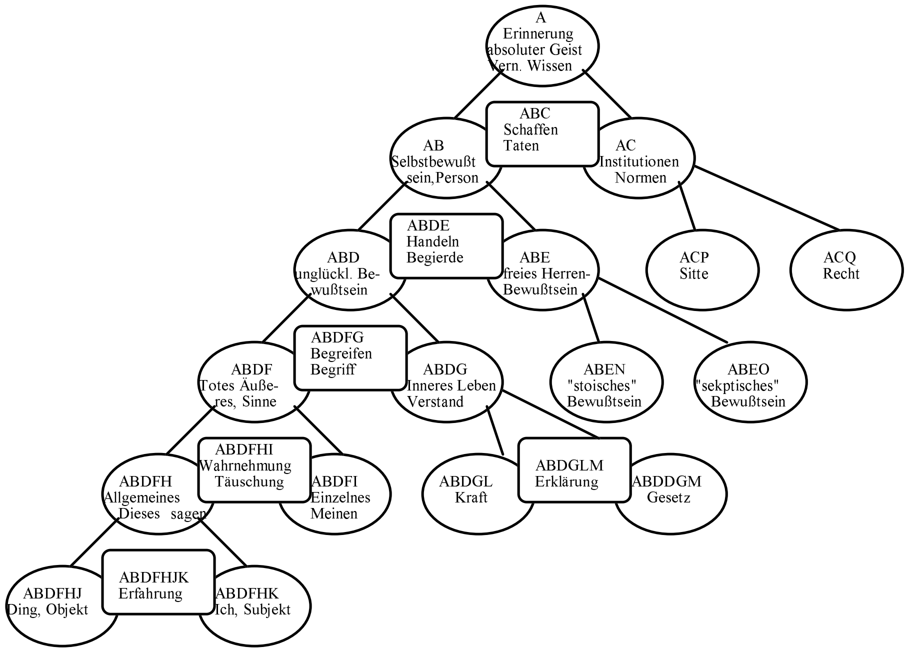
Fügen wir hinzu, daß der pyramidale Formalismus sich eines Kunstgriffs bedient, der das, was wir stoische Situationslogik und aristotelische Schreibtischlogik genannt haben, vereinigt. Die Pyramidenstruktur der Begriffspositionen und die möglichen Verknüpfungen zwischen ihnen stehen dem Logiker als "logische Situation" vor Augen und bilden gewissermaßen das Tygchanon, über das logisch geredet wird. Die pyramidalen Verhältnisse zu beschreiben und abzulesen macht die logischen Elemente, nämlich Intensionen und Extensionen, reguläre und widersprüchliche Begriffe sowie Urteile und deren Zusammenstellung zu Schlüssen zu Denkgebilden, den stoischen Lekta.

Die Anwendung der Logik auf inhaltliche Begriffe und Urteile besteht darin, diesen selbst die logische pyramidale Struktur gleichsam aufzuprägen. Die Prüfung des Allgemeinheitsstatus und der Subsuptionsverhältnisse inhaltlicher Begriffe erlaubt die Zuweisung an die entsprechenden pyramidalen Positionen. Man kann Wörter oder Termini an entsprechender Stelle in die pyramidalen Positionen eintragen, wie wir das an den Beispielen schon vorgeführt haben. Hat man Grund, von der empirischen Wahrheit oder Falschheit einer inhaltlichen Behauptung auszugehen, so wird man ihr auch die entsprechende logische Formalisierung mittels der geeigneten Junktoren geben. Dies ist umso leichter der Fall, als ja auch der übliche sprachliche Sinn der Junktoren in deren logische Bedeutung eingeht. In vielen Anwendungsfällen wird man aber auch auf logische Leerstellen der Sprache stoßen, die dann in der logischen Konstruktion sprachlich unbenannter, aber logisch formulierbarer Begriffspositionen aufzufüllen sind.

Dadurch, daß der Sinn von behauptenden Urteilen durch Junkturen zwischen Begriffspositionen in der Pyramide dargestellt wird, ergibt sich durch diese Formalisierung eine neue Präsentationsweise von Theorien. Ihre Sätze brauchen dann nicht mehr in grammatisch detaillierter und oftmals redundanter Sprache als Text aufgezeichnet zu werden. Ihre wahrheitswertfähigen Bestandteile lassen sich - wenigstens im Idealfalle - in einer einzigen Pyramide aufzeichnen. Wir haben einen Versuch der Darstellung des Behauptungsgehaltes der hegelschen "Phänomenologie des Geistes", auch ihrer dialektischen Einschüsse, in dieser Form vorgelegt (der natürlich auch unsere Interpretation dieses Werkes zum Ausdruck bringt, vgl. dazu L. Geldsetzer, Über das logische Prozedere in Hegels 'Phänomenologie des Geistes', in: Jahrbuch für Hegelforschung, hg. von H. Schneider, Band 1, 1995, S. 43 - 80, und hier folgenden Anhang). Ein weiterer Vorschlag der pyramidalen Wiedergabe der Gesamtphilosophie Wittgensteins wurde soeben von Ralf Goeres veröffentlicht (vgl. R. Goeres, Die Entwicklung der Philosophie Ludwig Wittgensteins unter besonderer Berücksichtigung seiner Logikkonzeptionen, Würzburg 2000). Naturgemäß wird man über die zugrundegelegten Interpretationen streiten können, aber auch andere Interpretationen werden sich in derselben logischen Form artikulieren lassen und dann leichter einer logischen Überprüfung zugänglich sein.

Diese Überlegungen dürften gezeigt haben, daß die sogenannten logischen Axiome nicht das sind, wofür man sie hält. Weder sind sie tatsächliche Grundbegriffe im Sinne von Kategorien, noch Grundsätze im Sinne unbegründbarer aber wahrer Urteile, aus denen alles logisch Behauptbare als wahr abgeleitet werden könnte. Und die sich schon bei Aristoteles anbahnende Modallogik, erst recht die ausgebauten mehrwertigen Logiksysteme mit ihren Wahrscheinlichkeiten sind starke Argumente dagegen, daß sich insbesondere die Festhaltung von Identität, das Vermeiden des Widerspruchs und das Ausschließen des sog. Dritten als allgemeine Regeln bzw. Normen für logisches Argumentieren aufrecht erhalten ließen. Sie genügen nach allem Gesagten nicht einmal für eine Diagnose dessen, um was es in der Logik überhaupt geht.

Anhang: Pyramidale Notation des logischen Gehaltes der hegelschen Theorie des Geistes in der "Phänomenologie des Geistes".



Zur Lesung der "Theorie":

Ein erster logischer Durchgang der Theorie stellt sich als *Induktion des höchsten Prinzips* dar.

Zunächst werden die Begriffe "*Objekt*" (Ding mit vielen Eigenschaften) und "*Subjekt*" (Ich) eingeführt. Sie stehen sich als dihäretische logische Individuen im Negationsverhältnis gegenüber (s. unten links). Ihre dialektische Vermittlung ist der *Erfahrungsbegriff*, in welchem die spezifischen Differenzen des Objekts (J) und des Subjekts (K) zugleich und in widersprüchlicher Weise "aufgehoben" (konserviert) sind. Wird von diesen spezifischen Differenzen abstrahiert (J und K werden "aufgehoben", d. h. weggelassen), so *sagt man Allgemeines* ("*Dieses*" gilt sowohl vom Objekt wie vom Subjekt).

Dem allgemein (sprachlich) Sagbaren steht dihäretisch das als "*Einzelnes Gemeinte*" (= Nicht-Sagbares) gegenüber. *Wahrnehmung und zugleich Täuschung* sind ihre dialektische Vermittlung. Die täuschende "Wahr"-nehmung meint spezifisch das Einzelne (I) und sagt es zugleich als Allgemeines aus (H). Abstrahiert man von diesen spezifischen Differenzen, so induziert man den Begriff des *Sinnenphänomens*, das als "Äußerliches und Totes" gegeben ist.

Dem Sinnenphänomen steht dihäretisch das "*innere Wesen*" als "Lebendiges" bzw. Belebendes gegenüber, das nur durch den *Verstand* (= nicht sinnlich) erfaßt wird. Die dialektische Vermittlung von Sinnlichkeit und Verstand ist das "*Begreifen*" bzw. der "*Begriff*". Abstrahiert man von den spezifischen Differenzen der Sinnlichkeit (F) und des Verstandes (G), so induziert man den Begriff des "*unglücklichen Bewußtseins*", das sich im "knechtischen Dienst" und in der "Arbeit" an der Wirklichkeit abmüht.

Ihm steht dihäretisch das "*herrschaftliche freie Bewußtsein*" gegenüber. Die dialektische Vermittlung von Knechtschaft und Herrschaft erbringt den Begriff des "*Handelns*" aus Begierde, in welchem die spezifischen Differenzen von Dienst (D) und Herrschaft (E) zugleich enthalten sind. Von ihnen abstrahierend induziert man den Begriff des "*Selbstbewußtseins*" bzw. der "*Person*".

Der selbstbewußten Persönlichkeit stehen in dihäretischem Gegensatz die *Institutionen, Werke, Werte und Normen* gegenüber. Ihre dialektische Vermittlung wird als "*Schaffen*" in großen (welthistorischen) "Taten" und Leistungen erzielt, die die spezifischen Differenzen der schaffenden Persönlichkeit (B) und der geschaffenen Werke (C) zugleich enthalten.

Abstrahiert man von diesen spezifischen Differenzen der Persönlichkeiten und ihrer Leistungen, so induziert man den höchsten Begriff bzw. das "Prinzip" der Theorie der "Phänomenologie des Geistes". Es ist der Begriff des *Geistes* selber, in welchem die *logisch-vernünftige Erinnerungsleistung* an alle durchlaufenen Begriffe zum *absoluten Wissen* wird.

Innerhalb der induktiven Erarbeitung des Prinzips sind bei Hegel mehrere *deduktive Ableitungen* bzw. Erörterungen weiterer Begriffe von schon erreichten Begriffspositionen aus eingefügt. Sie betreffen insbesondere die Ableitung des "*Erklärens*" der inneren (lebendigen) Natur durch den Verstand. *Erklärung* ist die Verstandestätigkeit, in welcher das "*Spiel der lebendigen Kräfte*" der Natur (Newtons) zu einem Geisterreich von starren "*Gesetzlichkeiten*" hypostasiert wird. Das Erklären erweist sich in dieser Analyse als Übergang in eine "verkehrte (pure Verstandes-) Welt", da es die spezifischen Differenzen von *Kraft* (L) und *Gesetz* (M) zugleich enthält und somit die Naturgesetze zu Kräften, die Naturkräfte zu Gesetzen macht. Von ihnen abstrahierend kommt man wieder auf "das innere lebendige Wesen" der Dinge zurück.

Ebenso deduziert Hegel aus dem "freien herrschaftlichen Bewußtsein" die beiden Spielarten des "*stoischen*" und des "*skeptischen Bewußtseins*", bei denen er die spezifischen Weisen der Abgehobenheit gegenüber der Wirklichkeit der Welt herausarbeitet (er hätte statt der Stoiker freilich eher die Epikureer als Typus einsetzen sollen!). Schließlich deduziert Hegel auch aus dem Begriff der "Normen und Zwecke" (Institutionen) die Artbegriffe von *Sitte* und *Recht*.

Wenn die hier vorgelegte Analyse der hegelschen "Arbeit des Begriffs" zutrifft, so läßt sich erkennen, daß dabei die Dialektik eine wichtige, aber nicht die Hauptrolle spielt. Als widersprüchliche Begriffe werden durchweg nur die *Handlungsbegriffe* induziert: *Erfahrung, Wahrnehmung und Täuschung, Begreifen und abgeleitet davon Erklären, des weiteren Handeln im (aristotelischen) Sinne des Tuns, und Handeln im (ebenfalls aristotelischen) Sinne des Schaffens und Werkerstellens*. Die Erinnerung (auch als "*Er-Innerung*" bei Hegel notiert) erschließt sich als höchste Tätigkeit des vernünftigen Geistes, in der alles Äußerliche zum inneren Besitz geworden, und alles Vergangene im "absoluten" Wissen vergegenwärtigt ist.

Da es sich bei der Erinnerung um das Prinzip handelt, kann in dieser Theorie in keiner Weise "hinter die Erinnerung zurückgegangen" werden. Vielmehr muß sie als generisches Merkmal identisch in alle Theoriebegriffe (einschließlich der dialektischen) eingehen. Dies zu erkennen und zu durchschauen ist aber erst "für uns", die wir das Ganze schon logisch durchlaufen haben, möglich. In gleicher Weise wird dann auch die generische Identität der Merkmale aller höheren Begriffen in den unteren übersehbar und dient zu deren vertieftem Verständnis.

Sind die Begriffe auf diese Weise logisch festgestellt und gewissermaßen verortet, so eignet sich die pyramidale Darstellung zu einer Lektüre in "Urteilen". Unter Berücksichtigung der Junktorenfunktionen ergibt sich über jede Relation eines regulären Begriffe zu jedem anderen ein Urteil, das im Sinne und nach dem eigenen Geltungsanspruch der hegelschen Theorie auch wahr sein muß. So liest man etwa ab, daß jedes dinghafte Objekt immer schon ein Allgemeines, zugleich aber auch ein sinnlich wahrnehmbares Phänomen, darüber hinaus Bewußtseinsinhalt eines "darum bemühten" (knechtischen) wie auch eines persönlichen Selbstbewußtseins ist, das sich seines Objektes nur in einer vergegenwärtigenden Erinnerungsleistung vergewissern kann. Entsprechendes gilt hier auch vom "subjektiven Ich". Ebenso liest man alle negativen Urteile ab, die sich im Querverhältnis der Begriffe ergeben. Objekt kann nur sein, was Nicht-Subjekt ist und umgekehrt, und beide sind auch nicht ein "einzeln zu Meinendes" oder ein durch den Verstand zu erfassendes "Wesen", noch sind sie Spielball frei verfügender herrschaftlicher Bewußtseine, noch geschaffenes Werk, Norm oder Zweck.

Über die dialektischen Handlungsbegriffe lassen sich dagegen nur widersprüchliche Urteile bilden, d. h. sie müssen zugleich wahr und falsch sein. Liest man etwa ab, daß jedes "Objekt" ein Erfahrungsgegenstand sei, so wird das im allgemeinen für wahr gehalten. In der Erfahrung aber kann ein Objekt nur "subjektiv" gegeben werden, und das straft die "Objektivität" des Erfahrungsgegenstandes Lügen. Hält man aber die Subjektivität aller Erfahrung für die Wahrheit, so geht ihr alle Objektivität verloren, und der vorige Satz muß falsch sein.

Entsprechendes muß vom Begreifen durch Begriffe gelten. Will man ein bestimmtes Objekt als wahrgenommenes sinnliches Phänomen begreifen, so will man sein "wahres Wesen" auf den Begriff bringen. Das ist aber gerade das Gegenteil des den Sinnen Erscheinenden, denn es wird nur durch das verständige Denken erfaßt. Das Begriffene erweist sich dadurch zugleich als Phänomen und Nicht-Phänomen, Wesen und Nicht-Wesen (Unwesen), und beides läßt sich positiv und negativ als wahr und falsch zugleich behaupten (zumindest nach der hegelschen Theorie!).

Man wird unschwer erkennen, daß die epochalen Interpretationsdivergenzen linker und rechter Provenienz um den hegelschen "Arbeitsbegriff" auf derselben dialektischen Struktur des Arbeitsbegriffs beruhen, der ja für die meisten Hegelianer zum paradigmatischen Handlungsbegriff geworden ist. Ist die Arbeit "Dienst an der Sache", so ist sie keine "Herrschaft und Verfügung über die Sache" und umgekehrt. Hegels dialektischer Arbeitsbegriff enthält und verschmilzt aber beides: Arbeit ist Dienst an und Herrschaft über die Sache, und er ist zugleich weder das eine noch das andere. Und darum kann und muß - immer nach Hegel - der Dienst an der Sache zur Herrschaft über sie, und die Herrschaft über sie zum Dienst an der Sache werden.

Es dürfte auf der Hand liegen, daß die logische Konstruktion widerspruchsloser Theorien (ohne solche dialektischen Einschüsse) entschieden einfacher ausfällt. Ließe man die hegelschen - dialektischen - Handlungsbegriffe einfach beiseite, so bliebe immer noch ein anspruchsvolles und konsistentes theoretisches System der Philosophie übrig. Wohl die meisten benevolenten Leser Hegels dürften ihn so gelesen und dabei viel von ihm gelernt haben. Aber damit geht auch der logische Reiz der hegelschen spekulativen (dialektischen) Urteile verloren, die ansonsten sehr wohl zur Einübung des Umgangs mit der Dialektik geeignet sind.

Bei Hegel gehören die dialektischen Begriffe ersichtlich zum System. Das zeigt, daß sie heuristisch fruchtbar sind. Und dies gerade und noch immer für die logische Bewältigung der Handlungsbegriffe, deren logische Analyse trotz aller Konjunktur des pragmatischen und pragmatistischen Denkens und bei allem Florieren so vieler "Handlungswissenschaften" noch immer sehr im argen liegt. Vielleicht gelingt es künftigen Logikern, sie als reguläre Begriffe zu konstruieren, denn bisher verfügen wir noch nicht über eine ausgearbeitete widerspruchslose Handlungslogik.

BIBLIOGRAPHIE ZUR LOGIK

1. Einführung in die Logik

Agazzi, E. (Hg.): Modern Logic - A Survey. Historical, Philosophical and Mathematical Aspects of Modern Logic and Its Applications, Dordrecht-Boston-London 1981.
Ajdukiewicz, K.: Abriß der Logik, Berlin 1958.
Becker, O.: Einführung in die Logistik, vorzüglich in den Modalkalkül, Meisenheim 1951.
Beth, E. W.: Symbolische Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften, Bern 1948.
Beth, E. W.: Aspects of Modern Logik, Dordrecht 1970.
Blanché, R.: Introduction à la logique contemporaine, Paris 1957.
Bochenski, I. M.: Grundriß der Logistik, aus dem Französischen übersetzt, neu bearbeitet und erweitert von A. Menne, Paderborn 1954
Bühler, A.: Einführung in die Logik. Argumentation und Folgerung, Freiburg-München 1992, 2. Aufl. 2000.
Carnap, R.: Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Wien 1954, 3. Aufl. 1968, ND 1973, engl. Introduction to Symbolic Logic and Its Applications, New York 1958.
Chauvineau, J.: La logique moderne, Paris 1974.
Church, A.: Introduction to Mathematical Logic I, Princeton N. J., 2. Aufl. 1956, ND 1958.
Copi, I. M.:Introduction to Logic, New York-London 1972.
Dopp, J. Notions de Logique formelle, Paris 1965, dt. Formale Logik, Einsiedeln-Zürich-Köln 1969.
Dubarle, P. Initiation à la logique, Paris-Löwen 1957.
Ebbinghaus, H.-D., J. Flum und W. Thomas, Einführung in die mathematische Logik, 4. Aufl. Heidelberg-Berlin 1996, ND.1998.
Eaton, R.: General Logic. An Introductory Survey, New York 1931, 2. Aufl. 1959.
Enderton, H. B.: A Mathematical Introduction to Logic, New York-London 1972.
Essler, W. K.: Einführung in die Logik, Stuttgart 1966, 2. Aufl. 1969.
Freudenthal, H.: Einführung in die Sprache der Logik, München-Wien 1965.
Grize, J. B.: Logique moderne, Paris 1972.
Halmos, P. R.: Algebraic Logic, New York 1962.
Hallpike, C.: Die Grundlagen primitiven Denkens, München 1990.
Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik, 6. Aufl. Stuttgart 1976.
Hilbert, D. und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, 6. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1972.
Honecker, M.: Logik. Eine Systematik der logischen Probleme, Berlin-Bonn 1927.
Jörgensen, J.: A Treatise of Formal Logic. Its Evolution and Main Branches, with Its Relations to Mathematics and Philosophy, 3 Bände, Kopenhagen-London 1931, 2. Aufl. 1962.
Klaus, G.: Einführung in die formale Logik, Berlin 1958, 2. Aufl.: Moderne Logik. Abriß der formalen Logik, 1964.
Kleene, S. C. Introduction to Metamathematics, Amsterdam-Groningen 1952.
Kneebone, G. T.: Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. An Introductory Survey, New York-Toronto-Princeton 1965.
Leblanc, L.: Introduction à la logique algébrique, Montréal 1963.
Levi-Bruhl, L.: La mentalité primitive, Paris 1921.
Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic. The Classic Algebra of Logic, New York 1918, 2. Aufl. 1960.
Lorenzen, P.: Formale Logik, Berlin 1958, 4. Aufl. 1970, engl. Formal Logic, Dordrecht 1965.
Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, 2. Aufl. 1969.
Menne, A.: Einführung in die Logik, München 1966, 2. Aufl. 1973.
Menne, A.: Einführung in die formale Logik, Darmstadt 1985.
Martin, R.: Logique contemporaine et formalisation, Paris 1962.
Mates, E.: Elementary Logic, New York 1965, 3. Aufl. 1978; dt. Elementare Logik. Prädikatenlogik der ersten Stufe, Göttingen 1969, 2. Aufl. 1978, ND. 1997.

Newton-Smith, W. H.: Logic. An Introductory Course, London 1985.
Novikov, P. S. Introduction à la logique mathématique, Paris 1964.
Pasquinelli, A.: Introduzione alla logica simbolica, Turin 1957.
Purtill, R. I.: Logic for Philosophers, New York-London 1971.
Quine, W. V. O.: Methods of Logic, New York 1950, 3. Aufl. 1962; dt. Grundzüge der Logik, Frankfurt 1969, 2. Aufl. 1974.
Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, New York 1947, 2. Aufl. 1980.
Salmon, W. C.: Logic, Englewood Cliffs, N. H. 1973. dt. Logik, Stuttgart 1983.
Schmidt, H. A.: Mathematische Gesetze der Logik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.
Sinovjew, A. und H. Wessel: Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik, München-Salzburg 1975.
Stebbing,, L. S.: A Modern Elementary Logic, London 1957.
Strawson, P. F.: Introduction to Logical Theory, London 1952.
Suppes, Introduction to Logic, Toronto-New York-London 1957.
Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik, Wien 1937, 2. Aufl. u. d. T. Einführung in die mathematische Logik, Göttingen 1966, 5. Aufl. 1977.
Varga, T.: Eléments de logique mathématique, Paris 1973.
Virieux-Reymond, A.: La logique formelle, Paris 1962.
von Freytag-Löringhoff, Br.: Logik. Ihr System und ihr Verhältnis zur Logistik, 2 Bände, Stuttgart-Berlin-Köln-Mainz 1955, 2. Aufl. 1966.
von Freytag-Löringhoff, Br.: Logik II. Definitionstheorie und Methodologie des Kalkülwechsels, Stuttgart 1967.
von Kutschera, F.: Elementare Logik, Wien-New York 1967.
von Kutschera, F. und A. Breitkopf: Einführung in die moderne Logik, Freiburg-München 1970.
Zoglauer, Th.: Einführung in die formale Logik für Philosophen, Göttingen 1997.

2. Lexika

Audi, R. (Hg.): The Cambridge Dictionary of Philosophy, Cambridge 1995. Mit zahlreichen Logikartikeln verschiedener Mitarbeiter.
Behnke, H. u. a. (Hg.): Das Fischer Lexikon Mathematik 1, 2, 2 Bände, Frankfurt a. M. 1964 - 1966.
Chauvinus, St. (Étienne Chauvin): Lexicon Philosophicum, 2. Aufl. Leeuwarden 1713, ND. mit Einl. von L. Geldsetzer in: Instrumenta Philosophica Series Lexica II, Düsseldorf 1967.
Edwards, P. (Hg.): The Encyclopedia of Philosophy, 8 Bände, New York-London 1967. Mit zahlreichen Logikartikeln verschiedner Mitarbeiter.
Feys, R. und F. B. Fitch (Hg.): Dictionary of Symbols of Mathematical Logic, Amsterdam 1969 und 1973.
Goclenius, R.: Lexicon Philosophicum, Frankfurt 1613; Goclenius, R.: Lexicon Philosophicum Graecum, Marburg 1615, ND. zusammengefaßt Hildesheim-New York 1980.
Kondakow, N. I.: Wörterbuch der Logik, hg. von E. Albrecht und G. Asser (aus dem Russ. übersetzt von H.-D. Hecker), Leipzig-Berlin 1978, 2. neubearb. Aufl. Leipzig 1983.
Kotarbinski, T. und W. Marciszewski (Hg.): Mala Encyklopedia Logiki, Wroclav-Warschau-Krakau 1970.
Marciszewski, W. (Hg.): Dictionary of Logic as Applied in the Study of Language. Concepts, Methods, Theories, Den Haag-Boston-London 1981.
Maierù, A.: Terminologia logica della tarda scolastica, Rom 1972.
Mattéi, J.-F. (Hg.): Encyclopédie Philosophique Universelle, 4 Bände, Paris 1998. Enthält zahlreiche Artikel zur Logik und Mathematik von verschiedenen Mitarbeitern.
Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch, Mannheim 1965.
Micraelius, J.: Lexicon philosophicum terminorum philosophis usitatorum, 2. Aufl. Stettin 1662, ND. mit Einl. von L. Geldsetzer in: Instrumenta Philosophica Series Lexica I, Düsseldorf 1966.
Mittelstraß, J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, 4 Bände, Band 1 Mannheim-Wien-Zürich 1980, Bände 2 - 4 Stuttgart-Weimar 1984 - 1996. Enthält zahlreiche Logikartikel verschiedener Mitarbeiter.
Naas, J. und H. L. Schmid, Mathematisches Wörterbuch, 2 Bände, Stuttgart 1962

3. Lehrbücher

Bell, J. L. und M. Machover: A Course in Mathematical Logic, Amsterdam-New York-Oxford 1977.
Chenique, F.: Comprendre la logique moderne, Paris 1974.
Dopp, J.: Notions de logique formelle, Löwen 1967.
Dürr, K.: Lehrbuch der Logistik, Basel-Stuttgart 1954.
Essler, Wilhelm und Rosa Martinez: Grundzüge der Logik. Band 1: Das logische Schließen, 4. Aufl. Frankfurt a. M. 1991.
Feys, R. Logistiek. Geformaliseeerde logica, Antwerpen-Nijmwegen 1944.
Fraissé, R.: Cours de logique mathématique, Paris 1971.
Geldsetzer, L.: Logik, Aalen 1987.
Hagemann, G.: Logik und Noetik. 11. u. 12. Aufl. bearb. von A. Dyroff, Freiburg i. Br. 1924.
Hilbert D. und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, 6. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1972.
Jeffrey, R. C.: Formal Logic. Its Scope and Limits, New York 1967, 2. Aufl. 1981.
Kleinknecht, R.: Grundlagen der modernen Definitionstheorie, Königstein 1979.
Prior, A. N.: Formal Logic, Oxford 1955.
Reisch, Gr.: Margarita Philosophica, 4. Aufl. Basel 1517, ND. mit Einl. von L. Geldsetzer in: Instrumenta Philosophica Series Thesauri I, Düsseldorf 1973. - Liber II: De principiis logices (De praedicabilibus, de praedicamentis, de propositione, de argumentatione et syllogismo simpliciter dicto, de syllogismo dialectico, de syllogismo demonstrativo, de syllogismo sophistico, de passionibus terminorum quas parva logicalia dicunt); Liber IV: De quadrivii rudimentis (De quadrivii laudibus et divisione, de divisione numeri contracti, algorithmus de minutiis vulgaribus, algorithmus de minutiis physicalibus, algorithmus cum denariis, pictilibus, seu calculis; Liber VI: De geometria speculativa (De elementis geometriae, in praxin geometriae, de principiis astronomiae, usw.
Sigwart, C.: Logik, 2 Bände Tübingen 1873 - 1878, 5. Aufl. 1924.
Smullyan, R. M.: First-Order Logic, Berlin-Heidelberg-New York 1968.
von Savigny, E.: Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren, München 1970.
Ziehen, Th.: Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik, Bonn 1920.

4. Handbücher

Barwise, J. (Hg.): Handbook of Mathematical Logic, Amsterdam-New York-Oxford 1977 und 1981.
Brunstäd, F.: Logik (Handbuch der Philosophie, hg. von A. Baeumler und M. Schröter, Abt. 1), München 1933.
Davis, J. W., D. J. Hockney und W. K. Wilson (Hg.): Philosophical Logic, Dordrecht 1969.
Gabbay, D. und F. Guenther (Hg.): Handbook of Philosophical Logic, 4 Bände, Dordrecht 1983 ff.
Hoppe, J.: Die gesammte Logik. Ein Lehr- und Handbuch, aus den Quellen bearbeitet, vom Standpunkt der Naturwissenschaften, und gleichzeitig als Kritik der bisherigen Logik, Paderborn 1868.
Kreil, A.: Handbuch der Logik, Wien 1789.
Pfänder, A. Logik, 2. Aufl. Halle 1929.
Prior, A. N.: Formal Logic, Oxford 1955, 2. Aufl. 1962.
Stegmüller, W.: Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Berlin-Heidelberg-New York 1969 - 1984. Band I: Wissenschaftliche Erklärung und Begründung, 1969, 2. Aufl. 1974, 3. Aufl. 1983; Band II/1: Theorie und Erfahrung: Begriffsformen, Wissenschaftssprache, empirische Signifikanz und theoretische Begriffe, 1970, 2. Aufl. 1974; Band II/2: Theorie und Erfahrung: Theoriestrukturen und Theoriendynamik, 1973, 2. Aufl. 1985 (engl.: 1976); Band 3 (mit M. Varga von Kibéd): Strukturtypen der Logik, 1984; Band IV/1: Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit: Personelle Wahrscheinlichkeit und Rationale Entscheidung, 1973; Band IV/2: Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit: Statistisches Schließen, Statistische Begründung, Statistische Analyse, 1973.

5. Textsammlungen

Baudry, L.: La querelle des futurs contingents, Louvain 1465 - 75. Textes inédits, Paris 1950.
Berka, K. und L. Kreiser (Hg.): Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin 1971, 3. Aufl. 1983, 4. Aufl. Berlin 1986.
de Rijk, E. M.: Logica Modernorum: A Contribution to the History of Early Terminist Logic, 4 Bände, Assen 1962 - 1967.
van Heijenoort, J. (Hg.): From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931, Cambridge, Mass. 1967.
Jager, R. (Hg.): Logic from Aristotle to Russell, Englewood Cliffs, N. J. 1963.
Kretzmann, N. und E. Stump (Hg.): Logic and the Philosophy of Language, 1988.
Przelecki, M. und R. Wojcicki (Hg.): Twenty-Five Years of Logical Methodology in Poland, Dordrecht-Boston und Warschau 1975.
Struik, D. J.: A Source Book in Mathematics, 1200 - 1800, Cambridge, Mass. 1969.

6. Bibliographie

Church, A.: A Bibliography of Symbolic Logic, in: The Journal of Symbolic Logic 1,4, 1936, S. 121 - 216.
Church, A.: Additions and Corrections to a Bibliography of Symbolic Logic, in: The Journal of Symbolic Logic 3,4, 1936, S. 178 - 204.
Lenzen, W.: Recent Work in Epistemic Logic, Amsterdam 1978.
Müller, G. H. und W. Lenski (Hg): Ω-Bibliography of Mathematical Logic, 6 Bände, Berlin 1987.
Risse, W.: Bibliographia Logica, 4 Bände Hildesheim-New York 1965 - 1979.
Ashworth, E. J.: The Tradition of Medieval Logic and Speculative Grammar From Anselm to the End of the Seventeenth Century. A Bibliography From 1836 Onwards, Toronto 1978.

7. Zeitschriften

Annals of Mathematical Logic, 1970 ff. Ab Band 24: Annals of Pure and Applied Logic, 1983 ff.
Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, 1950 ff. Ab 1988 Archive for Mathematical Logic.
Dialectica, 1947 ff.
History and Philosophy of Logic, 1980 ff.
Journal of Philosophical Logic, 1972 ff.
Logique et Analyse, Nouvelle Serie, 1958 ff.
Notre Dame Journal of Formal Logic, 1960 ff.
Rassegna Internazionale di Logica / International Logic Review, 1970 ff.
Studia Logica, 1953 ff.
The Journal of Symbolic Logic, 1935 ff.
Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1955 ff.

8. Allgemeine Geschichte der Logik

Adamsohn, R.: A Short History of Logic, 1911, ND 1965.
Beth, E. W. Geschiedenis der Logica, 2. Aufl. Den Haag 1948.
Blanché, R.: La logique et son histoire d' Aristote à Russell, Paris 1970.
Bochenski, I. M.: Formale Logik. Freiburg-München 1956, 2. Aufl. 1962, 4. Aufl.1978.
Calker, F. v.: Denklehre oder Logik und Dialektik nebst einem Abriß der Geschichte und Literatur derselben, Bonn 1822.
Carrucio, E.: Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo, Turin 1958.
Dumitriu, A.: Istoria logicii, Bukarest 1969, engl. History of Logic, 4 Bände, Turnbridge Wells 1977.
Enriques, F.: Per la storia della logica, Bologna 1922.
Jacobi, G.: Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtschreibung. Ein Diskussionsbeitrag, Stuttgart 1962.
Jörgensen, J.: A Treatise of Formal Logic. Its Evolution and Main Branches with Its Relations to Mathematics and Philosophy, 3 Bände, Kopenhagen-London 1931, 2. Aufl. 1962.
Kneale, W. und M. Kneale: The Development of Logic, Oxford 1962, 2. Aufl. 1978, ND 1984.
Kotarbinski, T.: Leçons sur l' histoire de la logique, Paris 1964.
Kühtmann, A.: Zur Geschichte des Terminismus. Wilhelm von Occam, Etienne Bonnot de Condillac, Hermann v. Helmholtz, Fritz Mauthner, Leipzig 1911.
Lukasiewicz, J.: Zur Geschichte der Aussagenlogik, in:; Erkenntnis 5, 1935, S. 111 - 131.
Prantl, C. Geschichte der Logik im Abendlande, 4 in 3 Bänden, Leipzig 1855 - 1870. ND Leipzig 1927 und Graz 1955.
Robert, S.: La Logique, son histoire, ses fondements, Longueuil 1978.
Scholz, H.: Geschichte der Logik, Berlin 1931. 2. Aufl. Abriß der Geschichte der Logik, Freiburg-München 1959; engl.: Concise History of Logic, 1961.
Ueberweg, F.: System der Logik und Geschichte der logischen Lehren, Bonn 1857, 4. Aufl. Bonn 1884.
Walch, J. G.: Historia Logicae, in: Parerga Academica, Leipzig 1721, S. 453 - 848.

a. Antike

Bochenski, I. M.: Elementa Logicae Graecae, Rom 1937.
Bochenski, I. M. Ancient Formal Logic, Amsterdam 1951, ND 1968.
Corcoran, J. (Hg.): Ancient Logic and Its Modern Interpretations (Proceedings of the Buffalo Symposium on Modernist Interpretations of Ancient Logic, 1972) Dordrecht-Boston 1974.
Diogenes Laertius: Leben und Meinungen berühmter Philosophen, übers. von O. Apelt, neu hg. von K. Reich, Hamburg 1967.
Ebert Th.: Dialektiker und frühe Stoiker bei Sextus Empiricus. Untersuchungen zur Entstehung der Aussagenlogik (Hypomnemata 95), Göttingen 1991.
Frede, M.: Die stoische Logik (Abh. der Akad. d. Wiss. in Göttingen), Göttingen 1974.
Fülleborn, G. G.: Kurze Geschichte der Logik bei den Griechen, in seinen "Beiträgen zur Geschichte der Philosophie", 1. Band, Stück 4 , S. 160 ff., 3 Bände, Jena 1796 - 1799.
Hoffmann, E.: Die Sprache und die archaische Logik, Tübingen 1925.
Kapp, E.: Der Ursprung der Logik bei den Griechen, Göttingen 1965. engl. New York 1942.
Mignucci, M.: Il significato della logica stoica, Bologna 1965.
Prier, R. A.: Archaic Logic. Symbol and Structure in Heraclitus, Parmenides, and Empedocles, Paris 1976.
Senz, W.: Über die Platonische Dialektik und die Aristotelische Logik. Ein Vergleich. Zur Notwendigkeit der Konzentration auf das Platonische Denken, Frankfurt-Berlin-Bern u. a. 2000.
von Fritz, K.: Schriften zur griechischen Logik II: Logik, Ontologie und Mathematik, Stuttgart-Bad Cannstatt 1978.

b. Chinesische antike Logik

Geldsetzer, L.: Dao als metaphysisches Prinzip bei Lao Zi. Einige Gedanken zur Logik der metaphysischen Begriffsbildung, in: Monumenta Serica, Journal of Oriental Studies, hg. von R. Malek, 47, 1999, S. 237-254.
Graham, A. C. Later Mohist Logic, Ethics and Science, Hongkong-London 1978.

Shi, Hu: The Development of Logical Method in Ancient China, Shanghai 1922, 3. Aufl. 1928, ND. Ann Arbor 1974.

c. Scholastische Logik

Baudry, L.: La querelle des futurs contingents 1465 - 75. Textes inédits, Paris 1950.
de Rijk, L. M.: Logica Modernorum. A Contribution to the History of Early Terminist Logic, I, Assen 1962.
Boehner, P.: Medieval Logic. An Outline of Its Development from 1250 to c. 1400, Chicago-Manchester 1952.
Grabmann, M.: Bearbeitungen und Auslegungen der aristotelischen Logik aus der Zeit von Peter Abaelard bis Petrus Hispanus, Berlin 1937.
Henry, D. P.: Medieval Logic and Metaphysics. A Modern Introduction, London 1972.
Jacobi, K.: Die Modalbegriffe in den logischen Schriften des Wilhelm von Shyreswood und in anderen Kompendien des 12. und 13. Jahrhunderts. Funktionsbestimmung und Gebrauch in der logischen Analyse, Leiden-Köln 1980.
Kretzmann, N., A. Kenny und J. Pinborg (Hg.): The Cambridge History of Later Medieval Philosophy: From the Rediscovery of Aristotle to the Disintegration of Scholasticism, 1100 - 1600, 1982.
Kretzmann, N, (Hg.): Meaning and Inference in Medieval Philosophy, 1988.
Maierù, A.: Terminologia logica della tarda scolastica, Rom 1972.
Pinborg, J.: Logik und Semantik im Mittelalter. Ein Überblick, Stuttgart-Bad Cannstatt 1972.
Pozzi, L.: Studi di logica antica e medievale, Padua 1974.
Pütz, Chr.: Die Obligationsnlehre in der scholastischen Logik. Untersuchungen zum Einfluß der stoischen Logik auf die Lehre von den Verpflichtungen (De Obligationibus), Diss. Düsseldorf 1997, Düsseldorf 1998.
Schenk, G.: Zur Geschichte der logischen Form I, Berlin 1973.

d. Islamische Logik

Gyeke, K.: Islamic Logic. Ibn al-Tayyib's Commentary on Porphyry's Eisagoge, Albany, N. Y. 1979.
Madkour, I.: L' organon d' Aristote dans le monde arabe, Paris 1934, 2. Aufl. 1969.
Rescher, N.: Studies in the History of Arabic Logic, Pittsburgh 1963.
Rescher, N.: The Development of Arabic Logic, Pittsburgh 1964.
von Grünebaum, G. E. (Hg.): Logic in Classical Islamic Culture, Wiesbaden 1970.

e. Neuzeitliche Logik

Barone, Fr.: Logica formale e logica trascendentale I: Da Leibniz a Kant, Turin 1957.
Eberstein, W. L. Gl. Freiherr v.: Versuch einer Geschichte der Logik und Metaphysik bei den Deutschen von Leibniz bis auf die gegenwärtige Zeit, Halle 1794. Neu hg. von J. A. Eberhard u. d. T.: Versuch einer Geschichte der Fortschritte der Philosophie in Deutschland vom Ende des vorigen Jahrhunderts bis auf die gegenwärtige Zeit, 2 Bände, Halle 1794 - 1799.
Howell, W. S.: Logic and Rhetoric in England, 1500 - 1700, Princeton 1956.
Howell, W. S.: Eighteenth-Century British Logic and Rhetoric, Princeton, N. J. 1971.
Mangione, C.: La logica nel Seicento, in: L. Geymonat (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 2, Mailand 1970, 2. Aufl. 1975, ND. 1979, S. 344 - 365.
Mangione, C: Logica e fondamenti della matematica, in: L. Geymonat (Hg.). Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 3, Mailand 1971, 2. Aufl. 1975, ND. 1979, S. 126 - 167.
Risse, W.: Die Logik der Neuzeit, 2 Bände, Stuttgart-Bad Cannstatt 1964 - 1970.
Rossi, P.: Clavis Universalis. Arti mnemoniche e Logica combinatoria da Lullo a Leibniz, Mailand-Neapel 1960.

f. Moderne Logik

Dalla Chiara, M. L.: Logic in the 20th Century, Mailand 1983.
Klibanski, R. (Hg): Logique et fondements des mathématiques (La Philosophie contemporaine Band 1) Florenz 1968.
Kynast, R.: Logik und Erkenntnistheorie der Gegenwart (Philosophische Forschungsberichte 5), Berlin 1930.
Liard, L.: Les logiciens anglais contemporains, Paris 1907.

Mangione, C.: Logica e fondamenti della matematica nella prima metà dell' Ottocento, in: L. Geymonat (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 4, Mailand 1971, 2. Aufl. 1975, ND. 1079, S. 117 - 179.
Mangione, C.: La svolta della logica nell' Ottocento, in: L. Geymonat, (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifio, Band 5, Mailand 1971, 2. Aufl. 1975, ND. 1979, S. 192 - 259.
Mangione, C.: Logica e problema dei fondamenti nella seconda metà dell' Ottocento, in: L. Geymonat (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 6, Mailand 1971, 2. Aufl. 1975, ND. 1979, S. 353 - 426.
Mangione, C.: La logica nel ventisimo secolo I, in: L. Geymonat (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 8, Mailand 1972, ND. 1976, S. 193 - 401.
Mangione, C.: La logica nel ventesimo secolo II, in: L. Geymonat (Hg.), Storia del pensiero filosofico e scientifico, Band 9, Mailand 1972, ND 1976, S. 139 - 273.
McCall, S. (Hg.): Polish Logic 1920 - 1939, Oxford 1967.
Mostowski, A.: Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundation of Mathematics in 1930 - 1964, Oxford 1966.
Poggi, St.: I sistemi dell' esperienza. Psicologia, logica e teoria della scienza da Kant a Wundt, Bologna 1977.
Nedlich, L.: Die Lehre von der Quantifikation des Prädikats in der neueren englischen Logik, Leipzig 1885.
Stammler, G.: Deutsche Logikarbeit seit Hegels Tod als Kampf von Mensch, Ding und Wahrheit, I: Spekulative Logik, Berlin 1936.
Styazhkin, N. I.: History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, Cambridge, Mass.-London 1969.
Wolenski, J.: Logic and Philosophy in the Lvow-Warsaw School, Dordrecht-Boston-London 1990.

9. Klassiker der Logik

a. Antike

Aristoteles, Organon. Deutsche Ausgabe in: Werke in deutscher Übersetzung, begr. von E. Grumach, hg. von H. Flashar, Darmstadt 1984 ff.; französische Ausgabe hg. von J. Tricot, 5 Bände Paris 1946 - 1950; italienische Ausgabe hg. von G. Colli in: Opere Bände 1 und 2, Rom-Bari 1973. - J. Wiesner (Hg.): Aristoteles. Werk und Wirkung I: Aristoteles und seine Schule, Berlin-New York 1985.
Aristoteles: Analytica priora et posteriora, hg. von W. D. Ross und L. Minio-Paluello, Oxford 1964.
Aristoteles: Categoriae et De interpretatione, hg. von L. Minio-Paluello, Oxford 1949.
Aristoteles, Topica et Sophistici Elenchi, hg. von W. D. Ross, Oxford 1958.
- Alexander von Aphrodisias: In Aristotelis Analyticorum priorum librum I Commentarium, hg. von M. Wallies, Berlin 1883.
- Alexander von Aphrodisias: In Aristotelis Topicorum libros VIII Commentaria, hg. von M. Wallies, Berlin 1891; ND der Ausgabe Venedig 1541 mit Einleitung von S. Ebbesen, Stuttgart-Bad Cannstatt 1996.
- Ammonios: In Aristotelis Analyticorum priorum librum I Commentarium, hg. von M. Wallis, Berlin 1899.
- Ammonius: In Aristotelis de interpretatione, hg. von A. Busse, Berlin 1897.
- Philoponos: In Aristotelis Analytica priora Commentaria, hg. von M. Wallis, Berlin 1905.
- Philoponos: In Aristotelis analytica posteriora, hg. von M. Wallies, Berlin 1909; ND der Ausgabe Venedig 1542 mit Einleitung von K. Verrycken und C. Lohr, Stuttgart-Bad Cannstatt 1994.
- Philoponos: In Aristotelis categorias, hg. von A. Busse, Berlin 1898.
- Lukasiewicz, Jan: Aristotle's Syllogistics from the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford 1951, 2. Aufl. 1957.
- Patzig, G.: Die aristotelische Syllogistik. Logisch-philologische Untersuchungen über das Buch A der 'Ersten Analytiken', Göttingen 1959, 3. Aufl. 1969, engl. Dordrecht 1968.
- Simplicius: In Aristotelis categorias, hg. von C. Kalbfleisch, Berlin 1907. ND der Ausgabe Venedig 1540 mit Einl. von R. Thiel und Ch. Lohr, Stuttgart-Bad Cannstatt 1999.
Augustinus: De Dialectica, hg. von J. Pinborg, Dordrecht-Boston 1975.
Boethius: Opera, 2, Bände Venedig 1491 -.1492; Opera in: J.-P. Migne, Hg., Patrologia latina Band 63 - 64, Turnholt 1891. - K. Dürr: The Propositional Logic of Boethius, Amsterdam 1951.

Boethius, Anicius Manlius: In Aristotelis de interpretatione, 2. Aufl. hg. von . Meiser, Leipzig 1880.
Boethius, Anicius Manlius: De hypotheticis syllogismis, hg. von L. Obertello, Brescia 1969.
Boethius, Anicius Manlius: In Isagogen Porphyrii Commenta, hg. von S. Brandt, Leipzig 1906, ND New York 1966.
Boethius, Anicius Manlius, De institutione arithmetica libri duo; De Institutione musica libri quinque, hg. von G. Friedlein, Leipzig 1867, ND. Frankfurt 1966.
Cicero, De Inventione, De Oratore und Topica, in: Scripta quae manserunt Omnia I/1 und 2, hg. von C. F. W. Mueller, Leipzig 1889 - 1898.
Galen: Institutio Logica, hg. von C. Kalbfleisch, Leipzig 1896; Einführung in die Logik, hg. und übers. von J. Mau, Berlin 1960; übers. von E. Orth, Rom 1938; übers. von J. S. Kieffer, Baltimore 1964.
Gong-sun Long: H. Schleichert: Gong Sun Long. Ein antiker sprachtheoretischer Text aus China, in: Conceptus 13, Nr. 32, 1979, S. 3 - 22.
Plutarch: De communibus notitiis contra Stoicos, in: Plutarchi Moralia Vol. 6,2, hg. von M. Pohlenz und R. Westman, Leipzig 1959.
Plutarch: De Stoicorum repugnantiis, in: Plutarchi Moralia, Vol. 6,2, hg. von C. Hubert, Leipzig 1954.
Porphyrios: Opuscula selecta, hg. von A. Nauk, Leipzig 1886.
Porphyrios, Isagoge (Einführung in das aristotelische Organon), lat Übersetzung von Boethius, in den Aristoteles-Ausgaben.
Porphyrios: Isagoge et In Aristotelis Categorias Expositio per Interrogationem et Responsionem, hg. von A. Busse, Berlin 1887.
Proclus, In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii, hg. von G. Friedlein, Leipzig 1873.
Psellos, Michael: Synopsis organi Aristotelici (griech. Text mit lat. Übers.), hg.v von E. Ehinger, Wittenberg 1597.
Psellos, Michael: Stoici paralogismi, in: Commentators and Commentaries on Aristotle's Sophistici Elenchi, Band 3, Leiden 1981.
Psellos, Michael: Philosophica minora, 2 Bände, hg. von J. M. Duffy und D. J. O'Meara, Leipzig 1989 - 1992.
Sextus Empiricus: Opera, hg. von H. Mutschmann, Leipzig 1912-1958, (mit Zusätzen von J. Mau), Bände 1 und 3, Leipzig 1958 und 1954, Band 4 Indices, bearb. von K. Janacek, 2. Aufl. Leipzig 1962; griech.-engl. Ausgabe, übers. von R. G. Bury, London 1917 und 1933.
Sextus Empiricus: Grundriß der pyrrhonischen Skepsis, übers. von M. Hossenfelder, Frankfurt 1968.
Theophrastos: Die logischen Fragmente des Theophrast, hg. von A. Graeser, Berlin-New York 1973.
- J. M. Bochenski: La logique de Théophraste, Freibourg 1947, ND New York 1987.

b. Mittelalter

Abaelard, Pièrre: Dialectica, hg. von L. M. de Rijk, Assen 1956.
Abaelard, Pièrre: Abaelardiana Inedita, hg. von L. Minio-Paluello (12th Century Logic: Texts and Studies 2), Rom 1958.
Al-Gazali: Logica Algazelis. Introduction and Critical Text, hg. von C. H. Lohr, in: Traditio 21, 1965, S. 223 - 290.
Anselm von Canterbury: Monologion, Proslogion und De Veritate, in: Opera Omnia, hg. von F. S. Schmitt, Edinburgh 1946.
Avicenna: The Propositional Logic of Avicenna. A Translation from as-Shifa al Qiyas, hg. von N. Shebaby; Dordrecht-Boston 1973. - A. M. Goichon: Introduction à Avicenne. Son épitre des definitions, Paris 1933.
Bacon, Roger: Summulae Dialectices, hg. von R. Steele, in: Opera hactenus inedita Rogeri Baconi, Fasc. 15), Oxford 1940.
Buridanus, Johannes: Compendium totius Logicae, Venedig 1499, ND Frankfurt 1965.
Burleigh, Walter: De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior, with a Revides Adition of the Tractatus Brevior, hg. von P. Boehner, St. Bonaventure, N. Y. 1955.
Cusanus, Nikolaus: De docta ignorantia / Die belehrte Unwissenheit, hg. von P. Wilpert und H. G. Senger, 3 Bände, 2. Aufl. Hamburg 1977 - 1979.
Cusanus, Nikolaus: De coniecturis / Mutmaßungen, hg. von W. Happ und J. Koch, 1971.
Cusanus, Nikolaus: Die mathematischen Schriften, hg. von J. und J. E. Hofmann, Hamburg 1952, 2. Aufl. 1980.
Duns Scotus, Johannes: Opera Omnia, hg. von L. Wadding, 12 Bände, Lyon 1639; Opera Omnia, hg. von C. Balic, 2 Bände, Vatikanstadt 1950. - M. Fernández García: Lexicon Scholasticum philosophico-

theologicum, in quo termini, definitiones, distinctiones et effata a Joanne Duns Scoto exponuntur, declarantur, Quaracchi 1910, ND. Hildesheim-New York 1974.
John of Salisbury, Metalogicon, hg. von C. C. J. Webb, Oxford 1929.
Johannes Venator Anglicus: Logica, hg. von L. M. de Rijk, 2 Bände, Stuttgart-Bad Cannstatt 1999.
Lullus, Raimundus (Ramon Llull): Opera ea, quae ad inventam ab ipso artem universalem scientiarum artiumque omnium ... pertinent, Straßburg 1617 u. ö. - C. Ottaviano: L'ars compendiosa de R. Lulle, Paris 1930.
Lullus, Raimundus: Logica Nova, Logicalia Parva, Dialecticae Introductiones, De Quinque Praedicabilibus, Liber de Natura, Palma de Mallorca 1744, ND Frankfurt 1971.
Ockham, William of: Expositio aurea et admodum utilis super Artem Veterem, Bologna 1496.
Ockham William of: Tractatus de Praedestinatione et de Praescientia Dei et de Futuris Contingentibus, hg. von P. Boehner, St. Bonaventure, N. Y. 1945.
Ockham, William of: Philosophical Writings. A Selection, hg. von P. Boehner, Edinburgh-Toronto-New York 1957, ND 1959.
Ockham, William of: Summa Totius Logicae, Oxford 1675, neu hg. von P. Boehner, St Bonaventure N. Y. 1951 - 1954. - L. Baudry: Lexique philosophique de Guillaume d' Ockham. Étude des notions fondamentales, Paris 1958.
Paulus Venetus, Logica Magna, Venedig 1499.
Petrus Hispanus: Summulae logicales, Venedig 1572, ND. Hildesheim-New York 1982; Summulae Logicales, hg. von I. M. Bochenski, Rom 1947; Tractatus, Called Afterwards Summulae logicales, First Critical Edition from the Manuscripts with an Introduction by L.M. de Rijk, Assen 1972.
William of Sherwood, Introductiones in logicam /Einführung in die Logik, lat.-dt. hg. von H. Brands und Chr. Kann, Hamburg 1995.
William of Shyreswood: Die Introductiones in Logicam, hg. von M. Grabmann, München 1937; neu hg. von C. H. Lohr, P. Kunze und B. Mussler, in: Traditio 39, 1983, S. 219 - 299.

c. Neuzeit und Moderne

Acontius, Jacobus: De methodo, hoc est de recta investigandarum tradendarumque artium ac scientiarum ratione / Über die Methode, d. h. über die recht Forschung und Lehre in den Künsten und Wissenschaften, 2. Aufl. Genf 1582, ND. mit dt. Übers. von A. von der Stein und Einl. von L. Geldsetzer in: Instrumenta Philosophica Series Hermeneutica IV, Düsseldorf 1971.
Alsted, Johann Heinrich: Compendium I systematis logici, II gymnasii logici, Herborn 1611.
Alsted, Johann Heinrich: Logicae systema harmonicum, Herborn 1615.
Alsted, Johann Heinrich: Claris artis lullianae et verae logices duos in libellos tributa, Straßburg 1633.
Arnauld, Antoine und Pierre Nicole: La Logique ou l' Art de Penser: contenant, outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement, Paris 1662; hg. von A. Fouillé, Paris 1877, neue Ausgabe hg. von P. Clair und F. Girbal, Paris 1965; ND der 5. Aufl. Paris 1683 hg. von P. Roubinet, Lille 1964.
Bolzano, Bernard, Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter, 4 Bände Sulzbach 1837. Neu in B. Bolzano-Gesamtausgabe, hg. von J. Berg, Bände 11 - 14 , Stuttgart-Bad Cannstatt 1985 ff. - Grundlegung der Logik. Ausgewählte Paragraphen aus der Wissenschaftslehre I und II, hg. von F. Kambartel, Hamburg 1963, 2. Aufl. 1978.
Bolzano, Bernard: Paradoxien der Unendlichkeit, hg. von Fr. Prihonsky, Leipzig 1851 (engl. hg. von D. A. Steele, London 1950).
Bolzano, Bernard: Funktionenlehre, hg. von K. Rychlik, Prag 1930.
Boole, George: The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay toward a Calculus of Deductive Reasoning, Cambridge 1847, ND Oxford 1948 und 1951, New York 1965.
Boole, George: An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities, Cambridge 1854, ND New York 1961.
Boole, George: Studies in Logic and Probability, hg. von R. Rhees, London 1952.
Bovillus, Carolus (Charles Bouillé), Liber de intellectu, De sensibus, De nihilo, Ars oppositorum, De generatione, De sapiente, De duodecim numeris, Philosophicae epistolae, De perfectis numeris, De mathematicis rosis, De mathematicis corporibus, De mathematicis supplementis, Paris 1510, ND Stuttgart-Bad Cannstatt 1970.
Burali-Forti, Cesare: Logica mathematica, Mailand 1894, 2. Aufl. 1919.

Carnap, Rudolf: Logische Syntax der Sprache, Wien 1934, 2. Aufl. Wien-New York 1968; engl. London-New York 1937, neu übersetzt von A. Smeaton, London N. J. 1959, 6. Aufl. 1964.
Carnap, Rudolf: The Formalization of Logic, Cambridge, Mass. 1943.
Carnap, Rudolf: Meaning and Necessity, a Study in Semantics and Modal Logic, Chicago 1947.
Carroll, Lewis: Mathematical Recreations of Lewis Carroll. Symbol Logic and the Game of Logic, New York 1958.
Carroll, Lewis: Das Spiel der Logik, hg. von P. Good, aus dem Englischen übers. von M. Zöllner, 2. Aufl. Stuttgart-Bad Cannstatt 1999.
Clauberg, Johannes, Logica vetus et nova, Duisburg 1556, auch Amsterdam 1654.
Condillac, Etienne Bonnot de: Logique ou les premiers développements de l' art de penser, Paris 1792.
Couturat, Louis: L' Algèbre de la Logique, Paris 1905, 2. Aufl. 1914, ND Hildesheim 1965.
de Morgan, Augustus: Formal Logic, or The Calculus of Inference, Necessary and Probable, London 1847, neue Ausgabe London 1926.
Dalgarno, Gregor: Ars Signorum, vulgo Charakter Universalis et Lingua Philosophica, London 1661; auch in: The Works, hg. von T. Maitland, Edinburgh 1834.
de Morgan, Augustus: On the Syllogism and Other Logical Wrintings, hg. von P. Heath, London 1966.
Descartes, René: Discours de la méthode, Leiden 1637.
Descartes, René: Regulae ad directionem ingenii, (postum) Amsterdam 1701.
Frege, Gottlob: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle 1879, ND Darmstadt 1974; ND hg. von I. Angelelli: Begriffsschrift und andere Aufsätze, 2. Aufl. Hildesheim 1964.
Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, 2 Bände, Jena 1893 - 1903; ND Darmstadt 1962.
Frege, Gottlob: Über Sinn und Bedeutung, in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100, 1892, S. 25 - 50. ND in der nachstehenden Sammlung.
Frege, Gottlob: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, hg. von G. Patzig, Göttingen 1962, 7. Aufl. 1994.
Fries, Jakob Friedrich: System der Logik. Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbststudium, Heidelberg 1811, 2. Aufl. 1819, 3. Aufl. 1837, ND. Leipzig 1914. Auch in: Sämtliche Schriften, hg. von G. König und L. Geldsetzer, Band 7, Aalen 1971.
Gassendi, Pierre: Institutio logicae, et philosophiae Epicuri syntagma, London 1660, auch 1668.
Gassendi, Pierre, Syntagma philosophicum: Logica, in: Opera Omnia, Band 1, Lyon 1658, ND. Stuttgart-Bad Cannstatt 1964.
Gödel, Kurt: Collected Works, New York-Oxford 1986.
Gomperz, Heinrich: Zur Psychologie der logischen Grundtatsachen, Leipzig-Wien 1897.
Hamilton, William: Lectures on Metaphysics and Logic, 4 Bände, hg. von H. L. Mansel und J. Veitch, Edinburgh und London 1859 - 1860, 2. Aufl. 1861 - 1866. ND mit Einleitung von F. O. Wolf, Stuttgart-Bad Cannstadt 1969 f.
Hegel, Georg Friedrich Wilhelm: Wissenschaft der Logik, 2 Bände 1812 - 1813. Auch in: Gesammelte Werke Band 11, hg. von F. Hogemann und W. Jaeschke, Hamburg 1978.
Hilbert, David und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, 3. Aufl. Berlin 1949..
Husserl, Edmund: Logische Untersuchungen, 2 Bände, Halle 1900 - 1901, 2. Aufl. 1928, ND in 3 Bänden, Tübingen 1968, 6. u. 7 Aufl. 1993.
Husserl, Edmund: Erfahrung und Urteil. Untersuchungen zur Genealogie der Logik, ausgearbeitet von L. Landgrebe, Prag 1939.
Isenkrahe, C.: Zum Problem der Evidenz. Was bedeutet, was leistet sie? Kempten-München 1917.
Jevons, William Stanley: Pure Logic, or The Logic of Quality apart from Quantity, London 1864.
Jevons, William Stanley: Elementary Lessons in Logic: Deductive and Inductive, London-New York 1870, 22. Aufl. 1913; Dt. übers. von H. Kleinpeter: Leitfaden der Logik, 2. Aufl. Leipzig 1913, 3. Aufl. mit einem Anhang über die neuere Logik, 1924.
Jevons, William Stanley: On the mechanical performance of logical inference, 1870.
Jevons, William Stanley: The Principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Method, London 1874, 7. Aufl. 1906.
Jungius, Joachim: Logica Hamburgensis, Hamburg 1638, ND 1957. - Logicae Hamburgensis Additamenta cum Annotationibus, hg. von W. Risse, Göttingen 1977.
Kant, Immanuel: Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen, hg. von G. B. Jäsche, Königsberg 1800, 2. Aufl. Leipzig 1876, 3. Aufl. hg. von W. Kinkel 1920; auch in der Akad.-Ausg. Band IX, Berlin-Leipzig 1923.

Kant, Immanuel, Logica di Vienna, a cura di Bruno Bianco, Mailand 2000.
Kant, Immanuel: Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren erwiesen, Königsberg 1762.
- R. Stuhlmann-Laisz: Kants Logik, Berlin-New York 1976.
Keynes, John N.: Studies and Exercices in Formal Logic, London 1887, 4. Aufl. 1906.
Knutzen, Martin: Elementa Philosophiae Rationalis seu Logicae, Königsberg-Leipzig 1747.
Kries, J. v.: Logik. Grundzüge einer kritischen und formalen Urteilslehre, Tübingen 1916.
Lambert, Johann Heinrich: Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung u. Bezeichnung d. Wahren u. dessen Unterscheidung v. Irrthum u. Schein, 2 Bände, Leipzig 1764, ND Hildesheim 1965.
Lambert, Johann Heinrich: Logische u. Philosophische Abhandlungen, hg. von J. Bernoulli, Berlin 1782.
Lambert, Johann Heinrich: De universaliori calculi idea. Disquisitio cum adnexo specimine, in: Nova Acta Eruditorum 1765, S. 441 - 473.
Leibniz, Gottfried Wilhelm: Meditationes de cognitione, veritate et ideis, 1684, in: Philosophische Schriften, hg. von C. I. Gerhardt, Band 4, S. 422 ff.
Leibniz, Gottfried Wilhelm: Dissertatio de arte combinatoria, in qua ex arithmeticae fundamentis complicationum et transpositionum doctrina novis praeceptis exstruitur, Leipzig 1666, auch Frankfurt 1690.
Leibniz, Gottfried Wilhelm: Specimen calculi universalis, sowie Specimen calculis universalis addenda, 1681, in: Philosophische Schriften, hg. von C. I. Gerhardt, Band 7, S. 221 - 243.
Leibniz, Gottfried Wilhelm; Nova methodus pro maximis et minimis (= Differentialkalkül), in: Acta Eruditorum 3, 1684, S. 467-473. Dazu auch Leibniz: Historia et origo calculi differentialis (1714), hg. von C. I. Gerhardt, Hannover 1846.
Leibniz, Gottfried Wilhelm: De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum (= Integralkalkül), in: Acta Eruditorum 5, 1686, SA. 292 - 300.
Leibniz, Gottfried Wilhelm: Mathesis universalis, 1695, in: Mathematische Schriften, hg. von C. I. Gerhardt, Band 7.
- L. Couturat: La Logique de Leibniz d' après des documents inédits, Paris 1901.
- H. Herring (Hg.): Leibniz. Fünf Schriften zur Logik und Metaphysik, Stuttgart 1966, 2. Aufl. 1971.
- Parkinson, G. H. R. (Hg.): Leibniz. Logical Papers. A Selection, Oxford 1966.
- Peckhaus, V.: Logica mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wieder entdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert Berlin 1997
Lewis, Clarence Irving: A Survey of Symbolic Logic, Berkeley 1918.
Lewis, Clarence Irving und H. L. Cooper: Symbolic Logic, New York 1932, 2. Aufl. New York 1959.
Lesniewski, Stanislaw: On the Foundations of Mathematics, in: Band 1 der Collected Works, 2 Bände, hg. von S. J. Surma u. a., Dordrecht-Boston-London 1992.
Lipps, Theodor: Grundzüge der Logik, Hamburg-Leipzig 1893.
Lotze, Rudolf Hermann, Logik, Leipzig 1843, 2. Aufl. 1880.
Lukasiewicz, Jan: Elements of Mathematical Logic, Warschau-London 1963.
Lukasiewicz, Jan, Selected Works, hg von L. Borkowski, Amsterdam-Warschau 1970.
Lullus, Raimundus (Ramon Llull), Opera ea quae ad inventam ab ipso artem universalem ... pertinent, Straßburg 1617.
McColl, Hugh: Symbolic Logic and its Applications, London 1906.
Meinong, Alexius, Über Annahmen, Leipzig 1902, 2. Aufl.1910.
Meinong, Alexius: Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit. Beiträge zur Gegenstandstheorie und Erkenntnistheorie, Leipzig 1915.
Melanchthon, Philipp: De Dialectica libri quattuor, Wittenberg 1531; Compendium Dialecticae ac Rhetoricae, Eisleben 1580.
Mill, John Stuart: A System of Logic, Ratiocinative and Inductive. Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation, 2 Bände, London 1843, 8. Aufl. 1872; Book I-III hg. von J. M. Robson, Toronto 1973; dt. System der deduktiven und induktiven Logik, übers. von Th. Gomperz, 3 Bände, 2. Aufl. Leipzig 1884 - 1885.
Peano, Guiseppe: Selected Works, hg. von C. Kennedy, London 1973.
Peirce, Charles Sanders: Collected Papers, hg. von C. Hartshorne und P. Weiss, 6 Bände, Cambridge, Mass. 1931 - 1935, Bände 7 - 8 hg. von A. W. Burks, 1958, 2. Aufl. 1960.
Peirce, Charles Sanders, The New Elements of Mathematics, 4 Bände, hg. von C. Eisele, Den Haag-Paris-Atlantic Highlands, N. J. 1976.
Pfänder, Alexander: Logik, 1921, 2. Aufl. Halle 1929, 3. Aufl. in Gesammelte Schriften, München-Tübingen 1963.
Piaget, Jean.: Etudes sur la logique de l' enfant, 3. Aufl. Neuchâtel-Paris 1948.

Piaget, Jean und B. Inhelder: De la logque de l' enfant à la logique de l' adolescent. Essai sur la construction des structures opératoires formelles, Paris 1955, 2. Aufl. 1970; dt Von der Logik des Kindes zur Logik des Heranwachsenden. Essay über die Ausformung der formalen operativen Strukturen, Olten-Freiburg 1977, Stuttgart 1980.
Piaget, J. und B. Inhelder: La genèse des structures logiques élémentaires. Classifications et sériations. Neuchâtel-Paris 1959, 5. Aufl. 1991; dt. Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen, 2 Bände, Düsseldorf 1973.
Ploucquet, Gottfried: Sammlung der Schriften, welche den logischen Calcul des Herrn Professor Ploucquet betreffen, hg. von F. A. Bök, Tübingen 1773.
Post, Emil Leon: Solvability, Provability, Definability. The Collected Works, hg. von M. Davis, Boston-Basel-Berlin 1994.
Prior, Arthur Norman: Formal Logic, 2. Aufl. Oxford 1961.
Quine, Willard Van Orman: Mathematical Logic, Cambridge, Mass. 1961.
Quine, Willard Van Orman: From a Logical Point of View, 2. Aufl. Cambridge, Mass. 1961; dt. Von einem logischen Standpunkt. Neun logisch-philosophische Essays, Frankfurt 1979.
Ramsay, Frank Plumpton: Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics, London 1978.
Ramus, Petrus (Pièrre de la Ramée): Dialecticae Institutiones. Aristotelicae Animadversiones, Paris 1543, ND hg. von W. Risse, Stuttgart-Bad Cannstatt 1964; franz.:. Dialectique, 1555, hg. von M. Dassonville, Genf 1964.
Robinson, Abraham: Selected Papers, Amsterdam-New York-Oxford 1979.
Russell, Bertrand: The Principles of Mathematics, Cambridge 1903.
Russell, Bertrand: Logic and Knowledge. Essays 1901 - 1950, hg. von R. Ch. Marsh, London 1956.
Schröder, Ernst: Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik), 1. Band, Leipzig 1890, ND New York 1966.
Sigwart, Christoph, Logik, 2 Bände Tübingen 1873 - 1878. 4. Aufl. hg. von H, Maier, 1911.
Skolem, Thoralf Albert: Selected Works in Logic, Oslo-Bergen-Tromsö 1970.
Tarski, Alfred: Logique, sémantique, metamathématique 1923 - 1974, Paris 1972 - 1974.
Trendelenburg, Friedrich Adolf: Logische Untersuchungen, 2 Bände, Berlin 1840, 3. Aufl. 1870.
Tschirnhausen, Walther Graf von: Medicina mentis, sive tentamen genuinae logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates, Amsterdam 1687, 2. Aufl. als Medicina mentis sive artis inveniendi praecepta generalia, Leipzig 1695. ND (zus. mit der "Medicina corporis" von 1686) Hildesheim 1964, auch dt. hg. von J. Haussleiter, Leipzig 1963.
Ueberweg, Friedrich: System der Logik und Geschichte der logischen Lehren, Bonn 1857, 5. Aufl. hg. von J. Bona Meyer 1882.
Venn, John: On the Diagrammatic and Mechanical Representations of Propositions and Reasoning, 1880.
Venn, John: Symbolic Logic, London-Cambridge 1881, 2. Aufl. 1894, ND. New York 1971.
Vieta, Franciscus: In Artem Analyticam Isagoge seu Algebra Nova, Tours 1591, franz.: Introduction en l' art analytique, ou nouvelle algèbre de Francois Viète, Paris 1630; engl. in: J. Klein: Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra, Cambridge, Mass. 1968; dt. hg. von K. Reich und H. Gericke: F. Viète, Einführung in die neue Algebra, München 1973.
von Neumann, John: Collected Works, hg. von A. H. Taub, Oxford-London-New York 1961.
von Pauler, A.: Logik. Versuch einer Theorie der Wahrheit, Berlin-Leipzig 1929.
Wallis, John: Institutio Logicae, ad communes usus accomodata, Oxford 1687, ND in Opera Mathematica Band 2, Oxford 1693, ND. Hildesheim New -York 1972.
Whitehead, Alfred North und Bertrand Russell: Principia Mathematica, 3 Bände Cambridge 1910 -1913, 2. Aufl. 1925 - 1927, ND 1978. Diess.: Einführung in die mathematische Logik. Die Einleitung in die Principia Mathematica, Berlin-München 1932, ND Wien-Berlin 1984 und Frankfurt 1986.
Wilkins, John: An Essay towards a Real Charakter and a Philosophical Language, London 1668, ND Menston 1968.
Wittgenstein, Ludwig: Tractatus Logico-Philosophicus (1921), in: Werkausgabe Band 1, 4. Aufl. Frankfurt a. M. 1988.
- Brockhaus, Richard: Pulling Up the Ladder. The Metaphysical Roots of Wittgenstein's Tractatus Logico-Philosophicus, La Salle 1991.
- Brosch, Annette: Die Logik des Tractatus, Frankfurt a. M. 1995.
- Goeres, R.: Die Entwicklung der Philosophie Ludwig Wittgensteins unter besonderer Berücksichtigung seiner Logikkonzeptionen, Diss. phil. Düsseldorf 1999, Würzburg 2000.

- Kripke, Saul: Wittgenstein on Rules and Private Language. An Elementary Exposition, Oxford 1982. Dt.: Wittgenstein über Regeln und Privatsprache. Eine elementare Darstellung, Frankfurt a. M. 1987.
- Wright, Crispin: Wittgenstein on the Foundations of Mathematics, Cambridge, Mass. 1980.
Wolff, Christian: Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes und ihrem richtigen Gebrauch in der Erkenntnis der Wahrheit, Halle 1712, 14. Aufl. 1754, ND hg. von H. W. Arndt, Hildesheim 1965.
Wolff, Christian: Philosophia rationalis sive logica methodo scientifica pertractata et ad usum scientiarum atque vitae aptata, Frankfurt u. Leipzig 1728, 3. Aufl. 1740.
Zabarella, Jacobus: Opera Omnia quae ad perfectam Logicae cognitionem aquirendam spectare censentur utilissima, 17. Aufl. Venedig 1617.

d. Indische Logik

Barlingay, D. S. S.: A Modern Introduction to Indian Logic, New Delhi 1965, 2. Aufl. 1976.
Guha, D. C.: Navya Nyaya System of Logic. Some Basic Theories and Techniques, Varanasi 1968, Delhi 1979.
Maitra, S. K.: Fundamental Questions of Indian Metaphysics and Logic, Calcutta 1956, 2. Aufl. 1974.
Matilal, B. K.: Epistemology, Logic, and Grammar in Indian Philosophical Analysis, Den Haag-Paris 1971.
Randle, H. N.:Indian Logic in the Early Schools. A Study of the Nyayadarshana in Its Relations to the Early Logic of Other Schools, London 1930.
Stcherbatsky, T.: Buddhist Logic, 2. Bände Leningrad 1932.
Stcherbatsky, T.: Erkenntnistheorie und Logik nach der Lehre der späteren Buddhisten, 2 Bände, München 1924 (aus dem Russischen St. Petersburg 1903 - 1909).
Sugiura, S.: Hindu Logic as Preserved in China and Japan, hg. von E. A. Singer, Philadelphia-Boston 1900.
Vidyabhusana, S.: A History of Indian Logic. Ancient, Medieval, and Modern Schools, Calcutta 1921, Delhi 1971.

10. Schwerpunktthemen der Logik

1. Argumentation

Wohlrapp, H. (Hg.): Wege der Argumentationsforschung, Stuttgart-Bad Cannstatt 1995.
Zoglauer, Th.: Normenkonflikte. Zur Logik und Rationalität ethischen Argumentierens, Stuttgart-Bad Cannstatt 1998.

2. Axiom, Axiomatik

E. Agazzi, Introduzione ai problemi dell' assiomatica, Mailand 1961.
R. Blanché, L' axiomatique, Paris 1955; engl. Axiomatics, London 1962, 2. Aufl. 1966
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, in: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, 13. Aufl. 1987.

3. Bedeutung

Asher, W. O.: Reference and Theory Change. The Impact of the Theory of Reference on the Incommensurability Problem, Ann Arbor 1988.

Bartels, A.: Bedeutung und Begriffsgeschichte, Paderborn 1994.

Bunge, M.: Treatise on Basic Philosophy, Band I: Sense and Reference, Dordrecht 1974.

Carnap, R.: Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic, Chicago 1947, 2. Aufl. 1956; dt.:Bedeutung und Notwendigkeit. Eine Studie zur Semantik und modalen Logik, Wien-New York 1972.

Devitt, M.: Designation, New York 1981.

Frege, G.: Über Sinn und Bedeutung, in: Zeitschrift für Philosophie, 100, 1892, S. 25-50; auch in: G. Frege: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, hg. von G. Patzig, 4. Aufl. Göttingen 1975.

Putnam, H.: The Meaning of "Meaning", in: K. Gunderson (Hg.), Language, Mind and Knowledge, Minneapolis 1975; dt.: Die Bedeutung von "Bedeutung", Frankfurt 1979, 2. Aufl. 1990.

Schubert, A.: Untersuchungen zur stoischen Bedeutungslehre, Göttingen 1994.

4. Begriff

Cassirer, E.: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik, Berlin 1910, 2. Aufl. 1923, ND Darmstadt 1976, 5. Aufl. 1980.

Cassirer, E.: Zur Theorie des Begriffs, in: Kant-Studien 33, 1928, S. 129 - 136.

Combes, M.: Le Concept de concept formel (Publications de la Fac. des Lettres et Sciences humaines de Toulouse, Série A,, tome B), 1969.

Dubislav, W.: Die Definition, 3. erw. Auflage Leipzig 1931.

Dürr, E. Von der Bildung der Begriffsinhalte, Zürich-Leipzig 1916.

Frege, G.: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, hg. von G. Patzig, 6. Aufl. Göttingen 1986.

Goguen, J. A.: The Logic of Inexact Concepts, in: Synthese 19, 1969, S. 325 - 373.

Grassmann, R. Die Begriffslehre oder Logik, Stettin 1872.

Frisch, J. C.: Extension and Comprehension in Logic, New York 1969.

Hempel, C. G. und P. Oppenheim: Der Typusbegriff im Lichte der neuen Logik, Leiden 1936.

Höffding, H.: Der Relationsbegriff. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung, Leipzig 1922.

Höffding, H.: Der Totalitätsbegriff. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung, Leipzig 1917.

Horn, E.: Der Begriff des Begriffs. Die Geschichte des Begriffes und seine metaphysische Deutung, München 1932.

Karzel, H. und K. Sörensen (Hg.): Wandel von Begriffsbildungen in der Mathematik, 1986.

Kedrow, B. M.: Über Inhalt und Umfang eines sich verändernden Begriffs, dt. von S. Wollgast, Berlin 1956.

Knüfer, C.: Grundzüge der Geschichte des Begriffs "Vorstellung" von Wolff bis Kant. Ein Beitrag zur Geschichte der philosophischen Terminologie, Halle 1911, ND Hildesheim-New York 1975.

Koenne, W.: Statischer und dynamischer Aufbau der Begriffe. Untersuchungen zu den Grundlagen des begrifflichen Denkens, Wien 1974.

Lyotard, J.-F.: Le différend, Paris 1983.

Niiniluoto, I. und R. Tuomela: Theoretical Concepts and Hypothetico-Inductive Inference, Dordrecht 1973.

Noerreklit, L.: Concepts. Their Nature and Significance for Metaphysics and Epistemology, Odense 1973.

Noiré, L.: Logos: Ursprung und Wesen der Begriffe, Leipzig 1885.

Pawlowski, T.: Concept Formation in the Humanities and The Social Science, Dordrecht.-Boston-London 1980.

Pearce, G. und P. Maynard (Hg.): Conceptual Change, Dordrecht-Boston 1973.

Schmidt, S. J.: Bedeutung und Begriff, 1969.

Schock, R.: New Foundations for Concept Theory, Uppsala 1969.

Scholz, H. und H. Schweizer, Die sogenannten Definitionen durch Abstraktionen (Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften hg. v. H. Scholz, Band 3), Leipzig 1935.

Schwartz, R.: Der Begriff des Begriffs in der philosophischen Lexikographie. Ein Beitrag zur Begriffsgeschichte (Phil. Diss. Düsselddorf), München 1983.
Tuomela, R.: Dispositions, Dordrecht-Boston 1978.
von Juhos, B.: Über die Grundlage der Gewissheit des reinen Denkens. Erkenntnistheoretische Voraussetzungen von Definition und Deduktion, Wien 1928.
Walter-Klaus, E.: Inhalt und Umfang. Untersuchungen zur Geltung und zur Geschichte der Reziprozität von Extension und Intension, Hildesheim-Zürich-New York 1987.
Wittenberg, A. I.: Vom Denken in Begriffen. Mathematik als Experiment des reinen Denkens, Basel-Stuttgart 1957.

5. Begründung

Albert, H.: Traktat über kritische Vernunft (1. Kapitel: Das Problem der Begründung: "Münchhausen-Trilemma"), Tübingen 1968.
Audi, R.: The Structure of Justification, Cambridge 1993.
Barthelborth, Th.: Begründungsstrategien. Ein Weg durch die analytische Erkenntnistheorie, Berlin 1996.
Janich, P. (Hg.): Methodische Philosophie. Beiträge zum Begründungsproblem der exakten Wissenschaften, 1984.
Kambartel, F.: Theorie und Begründung, 1973, 2. Aufl. 1976.
Kuhlmann, W.: Reflexive Letztbegründung, 1985.
Lenk, H.: Philosophische Logikbegründung und rationaler Kritizismus, in: H. Lenk (Hg.): Metalogik und Sprachanalyse, 1973.
Ros, A.: Begründung und Begriff. Wandlungen des Verständnisses begrifflicher Argumentationen, 3 Bände, 2. Aufl. Hamburg 1999.
Schlick, M.: Über das Fundament der Erkenntnis, in: Erkenntnis 4, 1934, S. 79 - 99.
Spinner, H. F.: Begründung, Kritik und Rationalität. Zur philosophischen Grundlagenproblematik des Rechtfertigungsmodells der Erkenntnis und der kritizistischen Alternative, Band I, Braunschweig 1977.
Wolandt, G.: Letztbegründung und Tatsachenbezug, 1983.

6. Berechenbarkeit

Boolos, George und Richard C. Jeffrey: Computability and Logic, 3. Aufl. Cambridge 1989.
Cutland, N.: Computability, Cambridge 1980.
Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit, 3.Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1978

7. Deduktion

Anderson, J. M. und H. W. Johnstone: Natural Deduction. The Logical Basis of Axiom Systems, Belmont 1962.
Dopp, J.: Logiques construites par une méthode de déduction naturelle, Löwen-Paris 1962.
Prawitz, D.: Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study, Stockholm-Göteborg-Uppsala 1965.

8. Dialektik

Adorno, Th. W.: Negative Dialektik, Frankfurt a. M. 1966, 2. Aufl. 1975.
Becker, W.: Hegels Begriff der Dialektik und das Prinzip des Idealismus. Zur systematischen Kritik der logischen und phänomenologischen Dialektik, Stuttgart 1969.
Becker, W. und W. Essler: Konzepte der Dialektik, 1981.
Diemer, A.: Elementarkurs Philosophie: Dialektik, Düsseldorf 1976.
Dubarle, D. und A. Doz: Logique et dialectique, Paris 1972.
Foulquié, P.: La dialectique, Paris 1949.
Gurvitch, G.: Dialectique et sociologie, Paris 1962, dt.: Dialektik und Soziologie, übers. von L. Geldsetzer, Neuwied-Berlin 1965.
Hartkopf, W.: Studien zur Entwicklung der modernen Dialektik, 3 Bände, Meisenheim 1972 - 1976.
Heintel, E. Grundriß der Dialektik, 2 Bände, 1984.
Heiß, R.: Wesen und Formen der Dialektik, Köln-Berlin 1959.
Hubig, C.: Dialektik und Wissenschaftslogik. Eine sprachphilosophisch-handlungstheoretische Analyse, Berlin-New York 1978.

Israel, J.: Der Begriff Dialektik, 1980.
Janke, W.: Historische Dialektik. Destruktion dialektischer Grundformen von Kant bis Marx, Berlin-New York 1977.
Kosik, K.: Dialectics of the Concrete, Dordrecht-Boston 1977.
Kulenkampf, A.: Antinomie und Dialektik. Zur Funktion des Widerspruchs in der Philosophie, Stuttgart 1970.
Popper, K. R.: What is Dialectic? in: Mind 49, 1940, S. 403 - 426, ND in: Conjectures and Refutations, 3. Aufl. London 1969, SA. 312 - 335.
Röd, W.: Dialektische Philosophie der Neuzeit, 2 Bände, München 1974.
Simon-Schäfer, R.: Dialektik. Kritik eines Wortgebrauchs, Stuttgart-Bad Cannstatt 1973.
Viertel, W.: Eine Theorie der Dialektik, 1983.

9. Entscheidung
Jeffrey, R.: Logik der Entscheidungen, Wien-München 1967.
Resnik, M.: Choices. An Introduction to Decision Theory, 4. Aufl. Minneapolis 1997.
Rescher, N. (Hg.): The Logic of Decision and Action, Pittsburgh 1967.
Spohn, W.: Grundlagen der Entscheidungstheorie, Kronberg 1978.

10. Hypothetisches Urteil
Linneweber-Lammerskitten, H.: Untersuchungen zur Theorie des hypothetischen Urteils, Diss. Bonn 1987, Münster 1988.
Naville, E.: La logique de l' hypothèse, Paris 1880.

11. Identität
Drexler, A.: Abbildung und Identität. Zum Begriff der Intelligibilität, Bern-Berlin u. a. 2000.
Hirsch, E.: The Concept of Identity, New York-Oxford 1982.
Meyerson, E.: Identité et réalité, 2. Aufl. Paris 1912.
Schirn, M.: Identität und Synonymie, Stuttgart-Bad Cannstatt 1975.
von Kutschera, F.: Probleme der Identität, in: Facta Philosophica 1/1, 1999.
Wiggins, D.: Substance and Sameness, Oxford 1980.

12. Individuum, Individuation
Assenmacher, I.: Die Geschichte des Individuationsprinzips in der Scholastik, Leipzig 1926.
Böhle, R.: Der Begriff des Individuums bei Leibniz, Meisenheim 1978.
Lorenz, K. (Hg.): Identität und Individuation, 2. Bände, Stuttgart 1982.
Munitz, M. K. (Hg.): Identity and Individuation, New York 1971.
Strawson, P.: Individuals. An Essay in Descriptive Metaphysics, London 1959; dt.: Einzelding und logisches Subjekt. Ein Beitrag zur deskriptiven Metaphysik, Stuttgart 1972.

13. Induktion
Hintikka, J. und R. Suppes (Hg.): Aspects of Inductive Logic, Amsterdam 1966.
Nowak, R. J.: Local Induction, Dordrecht-Boston 1976.
Rescher, N.: Induktion. Zur Rechtfertigung induktiven Schließens, München-Wien 1987.
Skyrms, B.: Einführung in die induktive Logik, Frankfurt a. M. 1987.
Stegmüller, W.: Das Problem der Induktion, Darmstadt 1986.
Swain, M. (Hg.): Induction, Acceptance, and Rational Belief, Dordrecht-Boston 1970.
Venn, J.: The Principles of Empirical or Inductive Logic, London-New York 1889, 2. Aufl. London 1907, ND. New York 1973.

14. Infinites
Couturat, L.: De l' infini mathématique, Paris 1896.
McGuiness, B.: The Infinite in Mathematics. Logico-Mathematical Writings, Dordrecht-Boston-London 1978.

15. Intentionalität
Grillo, E.: Intentionalité et signifiance. Une approche dialogique, Bern-Berlin u. a. 2000.
Hintikka, J.: The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities, Dordrecht-Boston 1975.

16. Intuition
Fitting, M. C.: Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, Amsterdam 1969.
Heyting, A.: Intuitionism. An Introduction, 3. Aufl.Amsterdam 1872.
König, Jos.: Der Begriff der Intuition, Halle 1926.
McCloskey, M.: Irrwege der Intuition in der Physik, in: Spektrum der Wissenschaft, Juni 1983, S. 88 -99.
Wesley, R. E.: The Foundation of Intuitionistic Mathematics, Amsterdam 1965.

17. Junktoren bzw. logische Konstanten
Jackson, F. Conditionals. Oxford 1987.
Lenk, H.: Kritik der logischen Konstanten. Philosophische Begründungen der Urteilsformen vom Idealismus bis zur Gegenwart, Berlin 1968.
Pareigis, B.: Categories and Functors, New York 1970.

18. "Der Lügner"
Brendel, Elke: Die Wahrheit über den Lügner, Berlin 1993.
Koyré, A.: Épiménide le Menteur, Paris 1947.
Martin, R. L.: The Paradox of the Liar, Yale University 1970.
Martin, R. L. (Hg.): Recent Essays on Truth and the Liar Paradox, Oxford-New York 1984.
Rivetti Barbò, F.: L' antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo (da Peirce a Tarski), Mailand 1961.
Rüstow, A.: Der Lügner. Theorie, Geschichte und Auflösung, Leipzig 1910.

19. Kalkül
Boole,, G.: The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning, Cambridge 1847, ND. Oxford 1948 und 1951, New York 1965.
Ploucquet, Gottfried: Sammlung der Schriften, welche den logischen Calcul des Herrn Professor Ploucquet betreffen, hg. von F. A. Bök, Tübingen 1773.
Richter, M. M.: Logikkalküle, Stuttgart 1978.
Schröter, K.: Ein allgemeiner Kalkülbegriff, Leipzig 1941, ND. Hildesheim 1970.

20. Kopula
Grote, A.: Über die Funktion der Copula. Eine Untersuchung der logischen und sprachlichen Grundlagen des Urteils, Leipzig 1935.

21 Modelle
Addison W. u.a. (Hg.): The Theory of Models, Amsterdam 1965.
Badiou, A.: Le concept de modèle, Paris 1969.
Bell, J. L. und A. B. Slomson: Models and Ultraproducts, London-New York 1971.
Chang, Ch. und H. J. Keisler, Model Theory, Amsterdam 1973, 3. Aufl. Amsterdam-New York-London 1990.
Freudenthal H. (Hg.): The Concept and the Role of Model in Mathematics and Natural and Social Sciences, Dordrecht-Boston 1961.
Hodges, W.: Model Theory, Cambridge 1993.
Keisler, H.J.: Model Theory for Infinitary Logic, Amsterdam-London 1971.
Prestel, A.: Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie, Braunschweig-Wiesbaden 1986.
Robinson, A.: Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell' algebra, Turin 1974.
Rothmaler, P.: Einführung in die Modelltheorie, Heidelberg-Berlin-Oxford 1961.
Sacks, G.: Saturated Model Theory, Reading, Mass. 1972.

22. Möglichkeit, mögliche Welten, "counterfactuals", "modalities"
Engelen, E.-M.: Das Feststehende bestimmt das Möglich. Semantische Untersuchungen zu Möglichkeitsurteilen, Stuttgart-Bad Cannstatt 1999.
Gallinger, A.: Das Problem der objektiven Möglichkeit. Eine Bedeutungsanalyse, Leipzig 1912.
Goodman, Nelson: Ways of Worldmaking, Indianapolis 1978.
Hintikka, J.: The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities, Dordrecht-Boston 1975.
Lewis, D.: Counterfactuals, Oxford 1973.
Lewis, D.: On the Plurality of Worlds, Oxford 1986.
Nortmann, U.: Modale Syllogismen, mögliche Welten, Essentialismus. Eine Analyse der aristotelischen Modallogik, Berlin-New York 1996.
Picci, C. (Hg.): Leggi di natura, modalità, ipotesi. La logica del ragionamento controfattuale, Mailand 1976.

23. Notwendigkeit
Carnap, R.: Meaning and Necessity, Chicago 1947, erw. Aufl. Chicago 1956.
Kripke, S. A.: Naming and Necessity, in: D. Davidson und G. Harman (Hg.): Semantics of Natural Language, Dordrecht 1972, 2. Aufl. Dordrecht-London 1977, 3. Aufl. Oxford-Cambridge, Mass. 1980; dt. Name und Notwendigkeit, Frankfurt 1981.
Schwartz, Stephen (Hg.): Naming, Necessity, and Natural Kinds, Ithaca, N. Y. 1977.

24. Negation
Wansing, H. (Hg.): Negation. A Notion in Focus, Berlin-New York 1996.

25. Paradoxe (s. o. "der Lügner")
Bolzano, B.: Paradoxien des Unendlichen, hg. von F. Prihonsky, Leipzig 1851, ND Darmstadt 1964.
Colie, R. L.: Paradoxia Epidemica. The Renaissance Tradition of Paradox, Princeton, N. J. 1966.
de Morgan, A.: A Budget of Paradoxes, 2 Bände, hg. von S. de Morgan, London 1872, 2. Aufl. 1915, ND Freeport N. Y. 1969.
Geyer, P. und R. Hagenbüchle (Hg.): Das Paradox. Eine Herausforderung des abendländischen Denkens, Tübingen 1992.
Grünbaum, A.: Modern Science and Zeno`s Paradoxes, Middletown 1967.
Hughes, P. und G. Brecht: Die Scheinwelt des Paradoxons. Eine kommentierte Anthologie in Wort und Bild, Braunschweig 1978.
Kempner, A. J. Paradoxes and Common Sense, New York 1959.
Lange, V. N.: Physikalische Paradoxa und interessante Aufgaben (aus dem Russischen 1967), Leipzig 1974.
Mackie, J. L.: Truth, Probability, and Paradox, Oxford 1973.
Quine, W. V. O.: The Ways of Paradox and Other Essays, 2. Aufl.Cambridge, Mass.- London 1976.
Sainsbury, R. M.: Paradoxes, Cambridge 1988; dt. Paradoxien, Stuttgart 1993, 2. Aufl. 1995.
Salmon, W. Zeno's Paradoxes, New York 1970.
Slaatte, H. A.: The Pertinence of the Paradox. The Dialectics of Reason-in-Existence, New York 1968.
Teensma, E.: The Paradoxes, Assen 1969.
Ul-Haque, I.: A Critical Study of Logical Paradoxes, Peshawar 1970.

26. Pragmatik
Ajdukiewicz, K.: Pragmatic Logic (aus dem Polnischen von O. Wojtasiewicz), Dordrecht 1974.
Böhler, D., T. Nordenstam und G. Skirbekk (Hg.): Die pragmatische Wende. Sprachspielpragmatik oder Transzendentalpragmatik? Frankfurt 1986.
Stachowiak, H. (Hg.): Pragmatik. Handbuch des pragmatischen Denkens. I: Pragmatisches Denken von den Ursprüngen bis zum 18. Jahrhundert, Hamburg 1968; II: Der Aufstieg pragmatischen Denkens im 19. und 20. Jahrhundert, Hamburg 1987; III: Allgemeine philosophische Pragmatik, Hamburg 1989; IV: Sprachphilosophie, Sprachpragmatik und formative Pragmatik, Hamburg 1993; V: Pragmatische Tendenzen in der Wissenschaftstheorie, Frankfurt 1995.

27. Prognose

Goodman, Nelson: Fact, Fiction and Forecast, 4. Aufl. Cambridge, Mass. 1983; dt. Voraussicht und Verstehen. Ein Versuch über die Ziele der Wissenschaft, Frankfurt 1981.
Hempel, C. G.: The Function of General Laws in History (1942), in: Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science, New York-London 1965, S. 231 - 243.
Lenk, H.: Erklärung, Prognose, Planung, Freiburg 1972.
Popper, K. R.: Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge, London 1963, 4. Aufl. 1972, ND. 1991.

28. Relation

Burkamp, W.: Begriff und Beziehung. Studien zur Grundlegung der Logik, Leipzig 1927.
Geach, P. und G. H. von Wright: On an Extended Logic of Relations, Helsinki 1952.
Höffding, H. Der Relationsbegriff. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung, Leipzig 1922.
Cavarnos, C.: The Classical Theory of Relations. A Study in the Methaphysics of Plato, Aristotle, and Thomism, Belmont, Mass. 1975.
Horstmann, R. P.: Ontologie und Relationen. Hegel, Bradley, Russell und die Kontroverse über interne und externe Beziehungen, Königstein 1984.
Mugnai, M.: On Leibniz' Theory of Relations, in: Studia Leibnitiana, Sonderheft 15, 1988, S. 144-161.

29. Semantik (s. o. "Bedeutung")

Bar-Elli, G.: The Sense of Reference. Intentionality in Frege (Perspektiven der analytischen Philosophie 10), Berlin-New York 1996.
Cann, Ronnie: Formal Semantics. An Introduction, Cambridge 1993.
Carnap, R.: Introduction to Semantics. Studies in Semantics I, Cambridge, Mass. 1942.
Carnap, R.: Formalization of Logic. Studies in Semantics II, Cambrige, Mass. 1943, 2. Aufl. 1947 (mit dem vorgenannten zusammen).
Coffa, Alberto: The Semantic Tradition from Kant to Carnap. Cambridge 1991.
Conte, A. G. , R. Hilpinen und G. H. v. Wright (Hg.): Deontische Logik und Semantik, Wiesbaden 1977.
Dale, J.: Meinongian Logic. The Semantics of Existence and Nonexistence (Perspektiven der analytischen Philosophie 11), Berlin-New York 1996.
Epstein, R. L.: The Semantic Foundation of Logic I (Propositional Logic), Dordrecht-Boston-London 1990.
Gochet, P.: Outline of a Nominalist Theory of Propositions. An Essay in the Theory of Meaning, Dordrecht-Boston 1980.
Kripke, S. A.: Naming and Necessity, in: D. Davidson und G. Harman (Hg.): Semantics of Natural Language, Dordrecht 1972, 2. Aufl. Dordrecht-London 1977, dt.Name und Notwendigkeit, Frankfurt 1981.
Lyons, J.: Semantik, 2 Bände, München 1980 - 1983.
Morris, Ch. W.: Foundations of the Theory of Signs, Chicago 1938, 12. Aufl. 1966; dt. Grundlagen der Zeichentheorie. Ästhetik und Zeichentheorie, München 1972, 3. Aufl. Frankfurt-Berlin-Wien 1979.
Morris, Ch. W.: Signs, Language, and Behavior, New York 1946, 2. Aufl. 1955; dt. Zeichen, Sprache und Verhalten, Düsseldorf 1973, Frankfurt-Berlin-Wien 1981.
Runggaldier, Edm.: Zeichen und Bezeichnetes, Berlin-New York 1985.
Schüssler, R.: Untersuchungen zur semantischen Unbestimmtheit, Duisburg 1995.
Stegmüller, W.: Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik, Wien 1957.
Tugendhat, E. und U. Wolf, Logisch-semantische Propädeutik, Stuttgart 1983, 2. Aufl. 1986.
von Kutschera, J.: Einführung in die intensionale Semantik, Berlin 1967.
Wendel, H.-J.: Benennung, Sinn, Notwendigkeit. Eine Untersuchung über die Grundlagen kausaler Theorien des Gegenstandsbezugs, Frankfurt 1987.

30. Schließen (Inference)

Hintikka, J. und P. Suppes: Information and Inference, Dordrecht-Boston 1970.
Rosenkrantz, R. D.: Inference, Method and Decision, Dordrecht-Boston 1977.

31. Syntax
Carnap, Rudolf: Logische Syntax der Sprache, Wien 1934, 2. Aufl. Wien-New York 1968; engl. The logical Syntax of Language, London-New York 1937, neu übersetzt von A. Smeaton 1959, 6. Aufl. 1964.
Chomsky, Noam: Aspekte der Syntax-Theorie, Frankfurt a. M. 1972.

32. Struktur, "Aufbau"
Carnap, R.: Der logische Aufbau der Welt. Scheinprobleme in der Philosophie, Berlin 1928, 4. Aufl. 1974, ND Frankfurt 1979; engl. The Logical Structure of the World. Pseudoproblems in Philosophy, London-Berkeley, Cal. 1967.
Dilthey, W.: Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften, Leipzig-Berlin 1927, auch in: Ges. Schr. VII, 7. Aufl. Stuttgart 1979.
Hartmann, N.: Der Aufbau der realen Welt. Grundriß einer allgemeinen Kategorienlehre, Berlin 1940.
Kambartel, F.: Erfahrung und Struktur. Bausteine zu einer Kritik des Empirismus und Formalismus, Frankfurt a. M. 1968, 2. Aufl. 1976.
Lautman, A.: Essai sur les notions de structure et d' existence en mathématique, 2 Bände, Paris 1938.
McMullin, E.: Construction and Constraint, Notre Dame 1988.
Naumann, H. (Hg.): Der moderne Strukturbegriff. Materialien zu seiner Entwicklung, Darmstadt 1973.
Schwemmer, O.: Handlung und Struktur. Zur Wissenschaftstheorie der Kulturwissenschaften, Frankfurt a. M. 1987.
Suppe, F.: The Structure of Scientific Theories, Urbana-Chicago-London 1977.
Van Dalen, D.: Logic and Structure, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

33. Syllogismus, Syllogistik
Bird, O.: Syllogistic and Its Extensions, Englewood Cliffs, N. J. 1964.
Clark, M.: The Place of Syllogistic in Logical Theory, Nottingham 1980.
Ebbinghaus, K.: Ein formales Modell der Syllogistik des Aristoteles, Göttingen 1964.
Englebretsen, G.: Three Logicians. Aristotle, Leibniz, and Sommers and the Syllogistic, Assen 1981.
Englebretsen, G. (Hg.). The New Syllogistic, New York 1987.
Lukasiewicz, J.: Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford 1951, 2. Aufl. 1957, ND New York 1987.
Patzig, G.: Die aristotelische Syllogistik. Logisch-philologische Untersuchungen über das Buch A der 'Ersten Analytiken', Göttingen 1959, 3. Aufl. 1969, engl. Dordrecht 1968.
Platzeck, E.-W.: Klassenlogische Syllogistik. Ein geschlossenes Verbandssystem definiter Klassen, Paderborn 1984.
Pozzi, L.: Da Ramus a Kant. Il dibattito sulla sillogistica, Mailand 1981.
Thom, P.: The Syllogism, München 1981
Thompson, B. E. R.: An Introduction to the Syllogisnm and the Logic of Proportional Quantifiers, New York 1992.
Wieland, W.: Die aristotelische Theorie der Syllogismen mit modal gemischten Prämissen, in: Phronesis 20, 1975, S. 77 - 92.

34. Typentheorie
Cocchiarella, N. B.: The Development of the Theory of Logical Types and the Notion of a Logical Subject in Russell's Early Philosophy, in: Synthese 45, 1980, S. 71 - 115, ND in: Logical Studies in Early Analytical Philosophy, Columbus, Ohio, 1987, S. 19 -63.
Copi, I. M.: Introduction to the Theory of Types, London 1971.

35. Unentscheidbarkeit
Davis, M. D. (Hg.): The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions, New York 1965
Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme, in: Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931; engl: On Formally Undicidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems, New York 1962.
Stegmüller, W.: Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung, Wien 1959.

Tarski, A., A. Mostowski und R. M. Robinson (Hg.): Undecidable Theories, Amsterdam 1953, ND 1974.
Urquhart, A.: The Undecidability of Entailment and Relevant Implication, in: Journal for Symbolic Logic 49, 1984, S. 1059 - 1073.

36. Wahrheit

Davidson, D.: Inquiries into Truth and Interpretation, Oxford 1985.
Dummett, M.: Truth and Other Enigmas, London 1978. Dt.: Wahrheit. Fünf philosophische Aufsätze, Stuttgart 1982.
Hoven, A.: Wege zur Wahrheit. Eine typologische Studie über Wahrheitstheorien (Phil. Diss. Düsseldorf), Frankfurt-Bern-New York-Paris 1989.
Kuipers, T. A. F. (Hg.): What is Closer-to-the-Truth? A Parade of Approaches to Truthlikeliness, Amsterdam 1987.
Niiniluoto, I.: Truthlikeliness, Dordrecht 1987.
Perler, D.: Der propositionale Wahrheitsbegriff im 14. Jahrhundert, Berlin-New York 1992.
Puntel, L. B. (Hg.), Der Wahrheitsbegriff. Neue Erklärungsversuche, Darmstadt 1987.
Puntel, L. B.: Wahrheitstheorien in der neueren Philosophie, Darmstadt 1993.
Putnam, H.: Vernunft, Wahrheit und Geschichte, Frankfurt a. M. 1982.
Quine, W. V. O.: The Persuit of Truth, London 1990, 2. Aufl. 1992.
Rescher, N.: The Coherence Theory of Truth, Washington 1973.
Tarski, A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, in: Studia Philosophica 1, 1935, S. 261-405.
Tarski, A.: Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik (1944), in: G. Skirbekk, Wahrheitstheorien, Frankfurt a. M. 1977, S. 140 - 188.
Skirbekk, G. Hg.): Wahrheitstheorien. Eine Auswahl aus den Diskussionen über Wahrheit im 20. Jahrhundert, Frankfurt a. M. 1977.
Walker, R.: The Coherence Theory of Truth. Realism, Anti-Realism, Idealism, London-New York 1989.
Wright, C.: Truth and Objectivity, Cambridge, Mass. 1992.

37. Wahrscheinlichkeit

Adams, E. W.: The Logic of Conditionals. An Application of Probability to Deductive Logic, Dordrecht-Boston 1975.
Agassi, E.: (Hg.): Probability in the Sciences, Dordrecht-Boston-London 1988.
Bayes, T.: An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances (1763), in: W. E. Deming (Hg.): Facsimiles ot Two Papers by Bayes, New York-London 1940 und 1963.
Byrne, E. F.: Probability and Opinion. A Study in the Medieval Presuppositions of Post-Medieval Theories of Probability, Den Haag 1968.
Carnap, R.: Logical Foundations of Probability, Chicago, Ill. 1950, 2. Aufl. London 1971.
Carnap, R.: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit, bearbeitet von W. Stegmüller, Wien 1959, 2. Aufl. 1970.
Dale, A. I.: A History of Inverse Probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson, New York-Heidelberg 1991, 2. Aufl. 1995.
David, F. N.: Games, Gods and Gambling. The Origines and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era, London 1962.
de Laplace, P. S.: Essai philosophique sur les probabilités, Paris 1814; dt Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, Leipzig 1886, hg. von R. v. Mises 1932.
Eells, E. und B. Skyrms (Hg.): Probability and Conditionals. Belief Revision and Rational Decision, Cambridge-New York 1994.
Fine, T. L.: Theories of Probability. An Examination and Foundations, New York 1973.
Fries, J. K.: Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Braunschweig 1842, auch in: Sämtliche Schriften, hg. von G. König und L. Geldsetzer, Band 14, Aalen 1974.
Goldberg, S.: Probability. An Introduction, Englewood Cliffs 1960.

Hacking, J.:The Emergence of Probability. A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference, London 1975, 2. Aufl. Cambridge-New York 1984.
Hald, A.: A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, New York 1990.
Jeffrey, R. C.: Probability and the Art of Judgment, Cambridge-New York 1992.
Keynes, J. M.: A Treatise on Probability, London 1921, 2. Aufl. New York 1979.
King, A. C. und C. B. Read: Pathways to Probability. History of the Mathematics of Certainty and Chance, New York 1963.
Kyburg, H. E. und H. E. Smokler (Hg): Studies in Subjective Probability, New York-London-Sydney 1964, 2. Aufl. Huntington, N. Y 1980.
Lenzen, Wolfgang: Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik, Wien-New York 1980.
Madonna, L. C.: La filosofia della probabilità nel pensiero moderno. Dalla 'Logique de Port-Royal' a Kant, Rom 1988.
Maher, P.: Betting on Theories, Cambridge-New York 1993.
Popper, K. R.: A World of Propensities, Bristol 1990, dt. Eine Welt der Propensitäten, Tübingen 1995.
Reichenbach, H.: Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die mathematische Darstellung der Wirklichkeit, Leipzig 1916. Umgearbeitet als "Wahrscheinlichkeitslehre", in Ges. Werke, Band 7, 1994.
Schneider, I. (Hg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte, Darmstadt 1988, ach berlin 1989.
von Kries, J.: Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung, Freiburg 1886.
von Mises, R.: Statistik und Wahrheit, Wien 1928, 4, Aufl. Wien-New York 1972.
von Plato, J.: Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective, Cambridge 1994, 2. Aufl. 1995.
Stegmüller, W.: Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band IV/1: Personelle Wahrscheinlichkeit und Rationale Entscheiduzng, Berlin 1973; Band IV/2: Statistisches Schließen, Statistische Begründung, Statistische Analyse, Berlin 1973.
Suppes, P.: Probabilistic Metaphysics, Oxford 1984.
Venn, J.: The Logic of Chance, New York 1866, 4. Aufl. 1962.
Vickers, J. M.: Belief and Probability, Dordrecht-Boston 1976.
Wright, G. und P. Ayton: Subjective Probability, Chichester-New York 1994.

38. Widerspruch

Crahay, F.: Le formalisme logico-mathématique et le problème du non-sens, Paris 1957.
Priest, G.: In Contradiction, Dordrecht 1987.
Lupasco, S.: Logique et Contradiction, Paris 1947.
Raspa, V.: In-contraddizione. Il principio di contraddizione alle origini della nuova logica, Triest 1999.
Wolff, M.: Der Begriff des Widerspruchs. Eine Studie zur Dialeketik Kants und Hegels, Königstein 1981.
Zwergel, H. A.: Principium contradictionis. Die aristotelische Begründung des Prinzips vom zu vermeidenden Widerspruch und die Einheit der Ersten Philosophie, Meisenheim 1972.

11. Philosophie der Logik

Davis, J. W., Hockney, D. J. und W. K. Wilsonn (Hg.): Philosophical Logic, Dordrecht-Boston 1969.
Eley, C. Philosophie der Logik, Darmstadt 1985.
Geldsetzer, L.: Logik, Aalen 1987.
Grassmann, R.: Die Logik und die anderen logischen Wissenschaften, Stettin 1890.
Haack, S.: Philosophy of Logics, Cambridge 1978.
Körner, S. (Hg.): Philosophy of Logic, Oxford 1976.
Lambert, K.: Philosophical Problems in Logic. Some Recent Developments, Dordrecht-Boston 1970.
Putnam, H.: Philosophy of Logic, New York 1971.
Quine, W. V. O.: Philosophy of Logic, Englewood Cliffs 1953..
Rescher, N.: Topics in Philosophical Logic, Dordrecht-Boston 1968.
Seebohm, Th.: Philosophie der Logik, Freiburg 1984.

Stelzner, W. (Hg.): Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien 1989 und 1991, Berlin-New York 1993.
Strawson, P. D. (Hg.): Philosophical Logic, Oxford 1967, 2. Aufl. 1968.
von Kutschera, F.: Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Untersuchungen über die Grundlagen der Logik, Berlin-New York 1985.
Vuillemin, J.: La logique et le monde sensible, Paris 1971.

12. Angewandte Logik der Einzelwissenschaften

Bucher, Th. G.: Einführung in die angewandte Logik, Berlin-New York 1987.
Comte, A.: Cours de philosophie positive I - VI, Paris 11830 - 1842, neu hg. von M. Serris, F. Dagognet und A. Sinaceur, Paris 1975.
Carnap, R.: Einführung in die die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Wien 1954, 3. Aufl. 1968, ND 1973; engl. Introduction to Symbolic Logic and its Applications, New York 1958.
Cassirer, E.: Zur Logik der Kulturwissenschaften, fünf Studien, Göteborg 1942, ND Darmstadt 1971.
Diemer, A.: Die Begründung des Wissenschaftscharakters der Wissenschaft im 19. Jahrhundert. Die Wissenschaftstheorie zwischen klassischer und moderner Wissenschaftskonzeption, in: A. Diemer (Hg.): Beiträge zur Entwicklung der Wissenschaftstheoerie im 19. Jahrhundert, Meisenheim 1968.
Dummett, M.: The Logical Basis of Metaphysics, London 1991.
Feyerabend, P. K.: Against Method. Outline of an Anarchistic Theory of Knowledge, in: M. Radner und S. Winokur (Hg.), Analysis of Theories and Methods of Physics and Psychology, Minneapolis 1970, erw. Aufl. London 1975, dt. Wider den Methodenzwang. Skizze einer anarchistischen Wissenschaftstheorie, Frankfurt 1976, 4. Aufl. 1993.
Geldsetzer, L.: Die Philosophie der Philosophiegeschichte im 19. Jahrhundert. Zur Wissenschaftstheorie der Philosophiegeschichtsschreibung und -betrachtung, Meisenheim 1968.
Geldsetzer, L.: Die Geisteswissenschaften - Begriff und Entwicklung, in: H. Rombach (Hg.): Wissenschaftstheorie I, Freiburg-Basel-Wien 1974, S. 141 -151.
Geldsetzer, L.: Hermeneutik, in: H. Seiffert und G. Radnitzky (Hg.): Handlexikon zur Wissenschaftstheorie, München 1989, S. 127- 139.
Geldsetzer, L.: Logik der Interpretation, in: Akten des 9. Deutschen Kongresses für Philosophie, Meisenheim 1972, S. 117 - 130.
Geldsetzer, L.: Über die logische Natur des historischen Urteils, in. Annali della Facoltà di Lettere e Filosofia dell' Università di Napoli 30, 1987-88, S. 99 - 118.
George, L.: Die Logik als Wissenschaftslehre dargestellt, Berlin 1868.
Jammer, M.: The Conceptual Development of Quantum Mechanics, New York 1974.
König, G.: Klassische und moderne Naturwissenschaft, in: H. Rombach (Hg.), Wissenschaftstheorie I, Freiburg-Basel-Wien 1974, S. 131 - 141.
Laudan, L.: Theories of Scientific Method from Plato to Mach, in: History of Science 7, 1968, S. 1 - 63.
Mittelstaedt, P.: Quantum Logic, Dordrecht-Boston-London 1978.
Mönnich, U. (Hg.): Aspects of Philosophical Logic. Some Logical Forays into Central Notions of Linguistics and Philosophy, Dordrecht-Boston-London 1981.
Moulines, C. U.: Eine strukturalistische Modellierung der empirischen Wissenschaft, in: Facta Philosophica 1/1, 1999.
Newton, I.: Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, ND London 1960; dt. Mathematische Principien der Naturlehre, hg.von J. P. Wolfers, Berlin 1872, ND. Darmstadt 1963.
Popper, K. R.: Logik der Forschung. Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft, Wien 1935, 10. Aufl. Tübingen 1994; engl. The Logic of Scientific Discovery, London 1959, 10. Aufl. 1980.
Poincaré. H.: Science et Méthode, Paris 1908; dt. Wissenschaft und Methode, Leipzig-Berlin 1914, ND Stuttgart 1873.
Radbruch, K.: Mathematik in den Geisteswissenschaften, Göttingen 1989.
Rickert, H.: Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung. Eine logische Einleitung in die historischen Wissenschaften, Tübingen-Leipzig 1902, 5. Aufl. 1929.
Schurz, G. (Hg.): Erklären und Verstehen in der Wissenschaft, München 1988.
Sneed, J. D.: The Logical Structure of Mathematical Physics, Dordrecht 1971, 2. Aufl. 1979.
Sternberg, K.: Zur Logik der Geschichtswissenschaft, Berlin 1914, 2. Aufl. Charlottenburg 1925.

Suppes, P. (Hg.): Logic and Probability in Quantum Mechanics, Dordrecht-Boston 1976.
Tavanec, P. V. (Hg.): Problems of the Logic of Scientific Knowledge, Dordrecht-Boston 1969.
Topitsch, E. (Hg.): Logik der Sozialwissenschaften, Köln-Berlin 1965, 10. Aufl. Meisenheim 1980.
Wundt, W.: Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung, 3 Bände Stuttgart 1890, 2. Aufl. 1924.

13. Logische und Philosophische Grundlagen der Mathematik

Barker, S.: Philosophy of Mathematics, Englewood Cliffs 1964.
Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg-München 1954.
Becker, O.: Das mathematische Denken der Antike. Mit einem Nachtrag von G. Patzig, 2. Aufl. Göttingen 1966.
Becker, O.: Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, Tübingen 1973.
Beeth, E. W.: Les fondements logiques des mathématiques, Paris 1955.
Benacerraf, Paul und Hilary Putnam (Hg.): The Philosophy of Mathematics. Selected Essays, 2. Aufl. Cambridge 1983.
Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik, 2 Bände, Berlin 19343 - 1939.
Bourbaki, N.: Eléments de mathématique I, Paris 1939.
Bourbaki, N.: Eléments d' histoire des mathématiques, Paris 1960.
Brunschvicg, L.: Les étapes de la philosophie mathématique, Paris 1912, 4. Aufl. 1949.
Brouwer, L. E. J.: Philosophy and Foundations of Mathematics, in: Collected Works Band 1, hg. von A. Heyting, Amsterdam-Oxford-New York 1975.
Cantor, G. F. L. Ph.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, hg. von E. Zermelo, Berlin 1932, ND. Hildesheim 1962, darin: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, 1879 - 1884; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895 - 1897.
Carnap, R. : Foundations of Logic and Mathematics, Chicago 1939, 4. Aufl. 1955; dt. Grundlagen der Logik und Mathematik, München 1973.
Casari, E.: Questioni di filosofia della matematica, Turin 1973.
Cavaillès, J.: Philosophie mathématique, Paris 1962.
Cellucci, C. (Hg.): La filosofia della matematica, 2. Aufl. Mailand 1963.
Combes, M.: Les fondements des mathématiques, Paris 1971.
Courant, R. und H. Robbins, What is Mathematics?, London-New York-Toronto 1948; deutsch: Was ist Mathematik? Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.
Curry, H. B.: Leçons de logique algébrique, Paris-Löwen 1952.
Curry, H. B.: Foundations of Mathematical Logic, New York 1963, ND 1977.
Curry, H. B. und R. Feys: Combinatory Logic, Amsterdam 1958.
Dedekind, J. W. R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 7. Aufl. 1965, ND. 1969.
Dedeking, J. W. R.: Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig 1888, 10. Aufl. 1965, ND. 1969.
Detlefson, Michael (Hg.): Proof and Knowledge in Mathematics, London 1992.
Dieudonné, J. Abrégé d' histoire des mathématiques 1700 - 1900, Paris 1977.
Euklid: The Thirteen Books of Euclid's Elements, transl. from the text of Heiberg by T. L. Heath, 3 Bände, Cambridge 1908.
Fraenkel, A. A. und Y. Bar Hillel: Foundations of Set Theory, Amsterdam 1958.
Frege, G.: Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884, neu hg. von Chr. Thiel, Hamburg 1986; engl. hg. von J. L. Austin, Oxford 1950.
Frege, G.: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, 2 Bände, Jena 1893 - 1903.
Gonseth, F.: Philosophie mathématique, Paris 1939.
Grassmann, H. G.: Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik wie auch Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert, Leipzig 1844, 2. Aufl. 1878.
Hartmann, N.: Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklidkommentars, Giessen 1909.
Hatcher, W. S.: The Logical Foundations of Mathematics, Oxford 1982.

Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik
Heyting, A.: Intuitionism, an Introduction, Amsterdam 1956, 3. Aufl. 1971.
Hilbert, David: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899.
Hilbert, David und Paul Bernays: Grundlagen der Mathematik, 2 Bände Berlin 1934 - 1939, 2. Aufl. Berlin -Heidelberg-New York 1968 und 1970.
Hintikka, J. (Hg.): The Philosophy of Mathematics, London 1969.
Kitcher, Philip: The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford 1983.
Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Berlin 1924.
Kleene, S. C.: Introduction to Metamathematics, Amsterdam 1952, 11. Aufl. 1981.
Klibanski, R. (Hg.): Logique et fondements des mathématiques (La Philosophie Contemporaine Band 1), Florenz 1968.
Kneebone, G. T.: Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics. An Introductory Survey, London-Toronto-New York-Princeton, Mass. 1963.
König, G. (Hg.): Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert. Göttingen 1990.
Körner, St.: The Philosophy of Mathematics, London 1968; deutsch: Philosophie der Mathematik. Eine Einführung, München 1968.
Kyburg, H. E.: The Logical Foundations of Statistical Inference, Dordrecht-Boston 1974.
Ladrière, J.: Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparantés, Löwen 1957.
Lorenzen, P.: Metamathematik, Mannheim 1962.
Mau. J.: Zum Problem des Infinitesimalen bei den antiken Atomisten, Berlin 1954.
Max, I. uind W. Stelzner (Hg.): Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium 1993, Berlin-New York 1995.
Meschkowski, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens, 3. Aufl. Braunschweig 1963.
Meschkowski, H.: Denkweisen großer Mathematiker, Braunschweig 1961.
Mostowski, A.: The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics, Warschau 1955.
Mostowski, A.: Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on the Development of Mathematical Logik and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930 - 1964, Oxford 1966.
Oberschelp, A.:Elementare Mengenlehre und Logik. Meisenheim a. Gl. 1974.
Oberschelp, A.: Aufbau des Zahlensystems, 3. Aufl. Göttingen 1976.
Peano, Giuseppe: Arithmetices Principia nova methodo exposita, Rom 1889.
Peano, Giuseppe: Notations de logique mathématique, Turin 1894.
Peano, Giuseppe: Formulario matematico, ND Rom 1960, franz.: Formulaire de mathématiques, Turin 1895 - 1908.
Peckhaus, V.: Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie, Göttingen 1990.
Putnam, Hilary: Mathematics, Matter and Method (Philosophical Papers 1), Cambridge 1975.
Quine, W. V. O.: Mathematical Logic, New York 1940, 2. Aufl. Cambridge, Mass. 1951.
Quine, W. V. O.: Set Theory and Its Logic, Cambridge, Mass. 1963, 2. Aufl. 1969; dt.: Mengenlehre und ihre Logik, Braunschweig 1973, 2. Aufl. Frankfurt-Berlin-Wien 1978.
Ramsey, F. P.: The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, hg. von R. B. Braithwaite, London 1931.
Rasiowa, H. und R. Sikorski: The Mathematics of Metamathematics, 3. Aufl. Warschau 1970.
Rieger, L.: Algebraic Methods of Mathematical Logic, Prag-New York-London 1967.
Riemann, G. F. B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Göttingen 1867.
Rosenbloom, P.: The Elements of Mathematical Logic, New York 1950.
Robinson, A.: Non-Standard Analysis, Amsterdam-London 1966.
Rosser, J. B.: Logic for Mathematicians, New York 1953, 2. Aufl. 1978.
Schütte, K.: Beweistheorie, Berlin 1960.
Schubert, H.: Kategorien, 2 Bände Berlin 1970.
Skolem, T.: Abstract Set Theory, Notre Dame 1962.
Skolem, T. u. a.: Mathematical Interpretations of Formal Systems, Amsterdam 1955.
Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik, Wien 1937, 5. Aufl. 1977.
Thiel, C. (Hg.): Erkenntnistheoretische Grundlagen der Mathematik, Hildesheim 1982.
van Heijenoort, J. (Hg.): From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931, Cambrige, Mass. 1967.

Waismann, F.: Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik, Wien 1936, 3. Aufl. 1970; engl.: Introduction to Mathematical Thinking. The Formation of Concepts in Modern Mathematics, New York 1951, 4. Aufl. 1966.
Wang, Hao: A Survey of Mathematical Logic, Peking 1962, auch Amsterdam 1963.
Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft (Handbuch der Philosophie IV/V), 2 Bände, München 1926, 6. Aufl. 1990; engl. Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, N. J. 1949.
Whitehead, A. N.: A Treatise of Universal Algebra with Applications, Cambridge 1898.
Wittgenstein, Ludwig: Remarks on the Foundations of Mathematics, übers. und hg. von G. E. M. Anscombe, Oxford 1956.
Wittgenstein, Ludwig: Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, Mass. 1980.
Wilder, R. L.: Introduction to the Foundations of Mathematics, New York-London 1967.

14. Speziallogiken

1. Absolute Logik

Barwise, K. J.: Absolute Logics and $L_{\infty, \omega}$, in: Annals of Mathematical Logic 4, 1972, S. 309 - 340.

2. Algebraische Logik

Halmos, P. R.: Algebraic Logic, New York 1962.

3. Alltagslogik

Kienpointner, M.: Alltagslogik. Struktur und Funktionen von Argumentationsmustern, Stuttgart-Bad Cannstatt 1992.

4. Aussagenlogik

Ebert, Th.: Dialektiker und frühe Stoiker bei Sectus Empiricus. Untersuchungen zur Entstehung der Aussagenlogik, G öttingen 1991.
Gochet, P.: Outline of a Nominalist Theory of Propositions. An Essay in the Theory of Meaning and in the Philosophy of Logic, Dordrecht-Boston-London 1980.
Rautenberg, W.: Klassische und nichtklassische Aussagenlogik, Braunschweig-Wiesbaden 1979.
Schmidt, H. A.: Mathematische Gesetze der Logik (Vorlesungen über Aussagenlogik), Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

5. Deduktive Logik

Ackermann, R. J.: Modern Deductive Logic. An Introduction to its Techniques and Significance, London 1970.
Leblanc, H.: An Introduction to Deductive Logic, New York-London 1954.
Lewis, C. I.: A Survey of Deductive Logic, Berkeley 1918.

6. Deontische Logik, Normenlogik, Präferenzlogik

Al-Hibri, Azizah: Deontic Logic. A Comprehensive Appraisal an a New Proposal, Washington 1978.
Cornides, T.: Ordinale Deontik. Zusammenhänge zwischen Präferenztheorie, Normlogik und Rechtstheorie, Wien-New York 1974.
Danielsson, S.: Preference and Obligation. Studies in the Logic of Ethics, Uppsala 1969.
Di Bernardo, G.: Introduzione alla logica dei sistemi normativi, Bologna 1972.
Fehige, Chr. und U. Wessels (Hg.): Preferences (Perspektiven der analytischen Philosophie, 19), Berlin-New York 1998.
Hansson, B.: Preference Logic. Philosophical Foundations and Applications in the Philosophy of Science, Lund 1970.
Hilpinen, R. (Hg.): Deontic Logic. Introductory and Systematic Readings, Dordrecht 1971, 2. Aufl. 1981.
Hilpinen, R. (Hg.): New Studies in Deontic Logic. Norms, Actions, and the Foundations of Ethics, Dordrecht-Boston-London 1981.

Huber, O.: Zur Logik multidimensionaler Präferenzen in der Entscheidungstheorie, Berlin 1977.
Kalinowski, J.: Einführung in die Normenlogik (aus dem Franz.), Frankfurt 1973.
Krelle, W. Präferenz- und Entscheidungstheorie, Tübingen 1968.
Lenk, H. (Hg.): Normenlogik. Grundprobleme der deontischen Logik, Pullach 1974.
Lorenzen, P.: Normative Logic and Ethics, Mannheim 1969.
Mally, E.: Grundgesetze des Sollens. Elemente der Logik des Willens, Graz 1926.
Menger, K.: Moral, Wille und Weltgestaltung. Grundlegung zur Logik der Sitten, Wien 1934; engl.: Morality, Decision and Social Organization. Towards a Logic of Ethics, Dordrecht-Boston 1974.
Rescher, N.: The Logic of Commands, London 1966.
Schwerzel, I.: Historische und systematische Untersuchungen zur deontischen Logik, (Diss.) München 1968.
Stuhlmann-Laeisz, R.: Das Sein-Sollen-Problem. Eine modallogische Studie, Stuttgart-Bad Cannstatt 1982.
von Kutschera, F.: Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen, Freiburg 1973.

7. Dialektische Logik (vgl. auch Parakonsistente Logik)

Essler, W. K. und W. Becker: Konzepte der Dialektik, Frankfurt 1981.
Geldsetzer, L.: Hegel tra logica classica e dialettica. In: Annali della Facoltà di Lettere e Filosofia dell' Università di Napoli, 27, 1985-1986, S. 29-47.
Geldsetzer, L.: Über das logische Prozedere in Hegels Phänomenologie des Geistes, in: Jahrbuch für Hegelforschung Band 1, 1995, S. 43 - 80.
Günther, G.: Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik, Band I, Hamburg 1976.
Günther, G.: Das Problem einer Formalisierung der transzendental-dialektischen Logik. Unter besonderer Berücksichtigung der Logik Hegels, in: Hegel-Studien Beih. 1, 1964, S. 65 - 123.
Inciarte, F.: Die Reflexionsbestimmungen im dialektischen Denken. Eine Untersuchung über das Positive an der Unwahrheit der menschlichen Erkenntnis, Diss. Köln 1957.
Klaus, G.: Moderne Logik. Abriß der formalen Logik, Berlin 1958. 8. Aufl. Einführung in die formale Logik 1972.
Krohn, W.: Die formale Logik in Hegels 'Wissenschaft der Logik'. Untersuchungen zur Schlußlehre, München 1972.
Marconi, D. (Hg.): La formalizzazione della dialettica. Hegel, Marx e la logica contemporanea, Turin 1979.
Peterson, U.: Die logische Grundlegung der Dialektik. Ein Beitrag zur exakten Begründung der spekulativen Philosophie, München 1980.
Rescher, N. und R. Brandon: The Logic of Inconsistency. A Study in Non-Standard Possible-World Semantics and Ontology, Oxford 1980.
Routley, R.: Dialectical Logic, Semantics and Metamathematics, in: Erkenntnis 14, 1979, S. 301- 331.
Verra, V.: La dialettica nel pensiero contemporaneo, Bologna 1976.
von Hartmann, Ed.: Über die dialektische Methode. Historisch-kritische Untersuchungen, 2. Aufl. Bad Sachsa 1910.

8. Dialogische Logik

Drieschner, R.: Untersuchungen zur dialogischen Deutung der Logik (Diss.), Hamburg 1966.
Kindt, W.: Eine abstrakte Theorie von Dialogspielen (Diss.) Freiburg 1973.
Krabbe, E. C. W.: Studies in Dialogical Logic (Diss.), Groningen 1982.
Lorenzen, P. und K. Lorenz: Dialogische Logik, Darmstadt 1978.
Wenzel, G.: Dialog und Logik. Die Entwicklung des Denkens vom vorintelligenten Verhalten zur künstlichen Intelligenz, Ehningen 1990.

9. Entscheidungslogik
Jeffrey, R. C.: The Logic of Decision, New York 1965, 2. Aufl. Chicago, Ill. 1990; dt. Logik der Entscheidungen, Wien-München 1967.
Luce, R. D. und H. Raiffa: Games and Decisions. Introduction and Critical Survey, New York 1957, 7. Aufl. 1967.
Rescher, N. (Hg.): The Logic of Decision and Action, Pttsburgh 1967.
von Wright, G. H.: The Logic of Preference. An Essay, Edinburgh 1963.

10. Epistemische Logik
Blau, U.: Glauben und Wissen, Diss. München 1969.
Ginet, C.: Knowledge, Perception and Memory, Dordrecht-Boston 1957.
Hintikka, H.: Knowledge and Belief. An Introduction to the Logic of the Two Notions, Ithaca, N. Y. 11962.
Lenzen, W.: Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik, Wien-New York 1980.
Malcolm, N.: Knowledge and Certainty. Essays and Lectures, Englewood Cliffs, N. J. 1963, 2. Aufl. 1957.
Schuppe, W.: Erkenntnistheoretische Logik, Bonn 1878.

11. Forschungslogik
Popper, Karl Raimund: Logik der Forschung, 10. Aufl. Tübingen 1994; engl. The Logic of Scientific Discovery, London 1959.

12. Fragen-Logik
Aqvist, L.: A new Approach to the Logical Theory of Interrogatives, Tübingen 1965 u. 1975.
Belnap, N. und T. B. Steel: The Logic of Questions and Answers, New Haven-London 1976; dt: Logik von Frage und Antwort, Braunschweig-Wiesbaden 1985.
Walther, J.: Logik der Fragen, Berlin-New York 1985.

13. Freie Logik
Bencivenga, E. (Hg.): Le logiche libere, Turin 1976.
Bencivenga, E.: "Free Logics", in: Gabbay/Guenther, Handbook of Philosophical Logic, Band 3, S. 373-426.
Lambert, Karel (Hg.): Philosophical Applications of Free Logic, New York-Oxford 1991.

14. Fuzzi Logic bzw. Vagheitslogik
Balmer, T. T. und Pinkal, M. (Hg.): Approaching Vagueness. Amsterdam-New York-Oxford 1983.
Black, M.: Margins of Precision. Essays in Logic and Language, Ithaka, N. Y.-London 1970.
Goguen, J. A.: The Logic of Inexact Concepts, in: Synthese 19, 1969, S. 325 - 373.
Sheffler, I.: Beyond the Letter. A Philosophical Inquiry Into Ambiguity, Vagueness and Metaphor in Language, London-Boston-Henley 1979.
Weiss, S.: The Sorites Antinomy. A Study in the Logic of Vagueness and Measurement, Diss. Chapel Hill, N. C. 1973.
Zadeh, L. A.: Fuzzy Logic and Approximate Reasoning, in: Synthese 30, 1975, S. 407 - 428.

15. Hermeneutische Logik
Bollnow, O. F.: Zum Begriff der hermeneutischen Logik, in: Argumentationen, Festschrift für Josef König, hg. von H. Delius und G. Patzig, Göttingen 1964.

16. Induktive Logik
Carnap, R.: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit (bearbeitet von W. Stegmüller), Wien 1959.
Essler, W. K.: Induktive Logik. Grundlagen und Voraussetzungen, Freiburg-München 1970.
Foster, M. H. und M. L. Martin (Hg.): Probability, Confirmation, and Simplicity. Readings in the Philosophy of Inductive Logic, New York 1966.
Hintikka, J. und P. Suppes (Hg.): Aspects of Inductive Logic, Amsterdam 1966.

Jeffrey, R. C.(Hg.): Studies in Inductive Logic and Probability, 2 Bände, Berkeley-Los Angeles-London 1980.
Kuipers, T. A. F.: Studies in Inductive Probability and Rational Expectation, Dordrecht -Boston 1978.
Luckenbach, S. A. (Hg.): Probablities, Problems, and Paradoxes. Readings in Inductive Logic, Encino and Belmont, Calif. 1972.
Skyrms, B.: Choice and Chance: An Introduction to Inductive Logic, Belmont, Calif. 1966.
Stegmüller, W.: Das Problem der Induktion: Humes Herausforderung und moderne Antworten, in: H. Lenk (Hg.): Neue Aspekte der Wissenschaftstheorie, Braunschweig 1971, S. 13 - 74. Nachdruck in: W. Stegmüller: Das Problem der Induktion - Der sogenannte Zirkel des Verstehens, Darmstadt 1975, S. 1-62.
Vetter, H.: Wahrscheinlichkeit und logischer Spielraum. Eine Untersuchung zur induktiven Logik, Tübingen 1967.
Swain, M. (Hg.): Induction, Acceptance, and Rational Belief, Dordrecht 1970.

17. Intuitionistische Logik
Fitting, M. C.: Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, Amsterdam 1969.

18. Juristische Logik
Engisch, K.: Logische Studien zur Gesetzesanwendung, Heidelberg 1943, 3. Aufl. 1963.
Geldsetzer, L.: Die dogmatische Hermeneutik der Jurisprudenz bei Thibaut und ihre geschichtlichen Voraussetzungen, Düsseldorf 1966 (auch als Einleitung zum Nachdruck von A. F. J. Thibaut, Theorie der logischen Auslegung des römischen Rechts, 2. Aufl. Altona 1806, in: Instrumenta Philosophica Series Hermeneuticva II, Düsseldorf (Stern-Verlag) 1966.
Kalinowski, J.: Introduction à la logique juridique. Élements de sémiotique juridique, logique des normes, et logique juridique, Paris 1965: dt. Einführung in die Normenlogik, Frankfurt a. M. 1973.
Klug, U.: Juristische Logik, Berlin-Heidelberg-New York 1951, 4. Aufl. 1982.
Perelman, C. (Hg.): Études de logique juridique, 5 Bände, Brüssel 1966 - 1973.
Schneider, E.: Logik für Juristen. Die Grundlagen der Denklehre und der Rechtsanwendung, Berlin 1965.
Schreiber, R.: Logik des Rechts, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.
Lindahl, L.:Position and Change. A Study in Law and Logic, Dordrecht-Boston 1977.
Tammelo, I.: Law, Outline of Modern Legal Logic, Wiesbaden 1969.
Tammelo, I. und G. Moens: Logische Verfahren der juristischen Begründung. Eine Einführung, Wien-New York 1976.
Vieweg, Th.: Topik und Jurisprudenz. Ein Beitrag zur rechtswissenschaftlichen Grundlagenforschung, München 1953, 5. Aufl. 1974.
Wagner, H. und K. Haag: Die moderne Logik in der Rechtswissenschaft, Bad Homburg 1970.
Weinberger, O.: Rechtslogik. Versuch einer Anwendung moderner Logik auf das juristische Denken, Wien-New York 1970.
Weinberger, O.: Logische Analyse der Jurisprudenz, Berlin 1979.

19. Klassenlogik
Glubrecht, J.-M., A Oberschelp und G. Todt: Klassenlogik, Mannheim-Wien-Zürich 1983.

20. Kombinatorische Logik
Curry, H. B.: Grundlagen der kombinatorischen Logik (Diss. Göttingen 1930), in: American Journal of Mathematics 52, 1930, S. 509 - 536 und 789 - 834.
Curry, H. B. und R. Feys: Combinatory Logic I, Amsterdam 1958, ND 1968.
Curry, H. B. und J. R. Hindley, J. P. Seldin: Combinatoric Logic II, Amsterdam-London 1972.
Fitch, F. B.: Elements of Combinatoric Logic, New Haven-London 1974.
Hindley, J. R., B. Lercher und J. P. Seldin: Introduction to Combinatory Logic, Cambridge 1972, ital. Introduzione alle logica combinatoria, Turin 1975.

21. Komplexe Logik

Zinovjev, A. A.: Komplexe Logik. Grundlagen einer logischen Theorie des Wissens, Braunschweig 1970; engl. Foundations of the Logical Theory of Scientific Knowledge (Complex Logic), Dordrecht-Boston 1973.

22. Konstruktive Logik

Hass, G. Konstruktive Einführung in die formale Logik, Mannheim-Wien-Zürich 1984.

Lorenzen, P. und O. Schwemmer: Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie, Mannheim-Wien-Zürich 1973, 2. Aufl. 1975.

Mayer, G.: Die Logik im Deutschen Konstruktivismus. Die Rolle formaler Systeme im Wissenschaftsaufbau der Erlanger und Konstanzer Schule (Diss.), München 1981.

23. Kumulative Logik

Degen, J. W.: Systeme der kumulativen Logik, München-Wien 1983.

24. Mathematische Logik (s. o. logische und philosophische Grundlagen der Mathematik)

Asser, G.: Einführung in die mathematische Logik, 3 Bände, Leipzig-Frankfurt-Zürich-Thun 1959-1981.

Barwise, J. (Hg.): Handbook of Mathematical Logic, Amsterdam-New York-Oxford 1977.

Bell, J. L. und M. Machover: A Course in Mathematical Logic, Amsterdam-New York-Oxford 1977.

Beth, E. W.: Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics, Dordrecht-Boston 1965.

Boole, George: The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning, Neue Ausgabe Oxford 1951.

Church, A.: Introduction to Mathematical Logic I, 2. Aufl. Princeton, N. J. 1956, ND. 1958.

Ebbinghaus, H.-D., J. Flum und W. Thomas: Einführung in die mathematische Logik, 4. Aufl. Heidelberg-Berlin 1996, ND 1998

Curry, H. B.: Foundations of Mathematical Logic, New York 1963, 2. Aufl. 1977.

Frege, Gottlob: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle 1879.

Frege, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884.

Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffschriftlich abgeleitet, 2 Bände, 1893-1903.

Frege, Gottlob: Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß hg. von G. Gabriel, 2. Aufl. Hamburg 1978.

Geymonat, L.: Storia e filosofia dell' analisi infinitesimale, Turin 1947.

Grzegorczyk, A.: An Outline of Mathematical Logic. Fundamental Results And Notions Explained With All Details, Dordrecht 1974.

Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik. Klassische Prädikatenlogik, Stuttgart 1963, 6. Aufl. 1976.

Kleene, S. C.: Mathematical Logic, New York 1967.

Kreisel, G. und J. L. Krivine: Modelltheorie. Eine Einführung in die mathematische Logik und Grundlagentheorie (aus dem Französischen 1967), Berlin-Heidelberg-New York 1972.

Largeault, J.: Logique mathématique, Paris 1972.

Lukasiewicz, J.:Elements of Mathematical Logic, Oxford-London-Edinburgh 1963.

Mangione, C.: Elementi di logica matematica, Turin 1965.

Manin, Y. I.: A Course in Mathematical Logic, übers. aus dem Russ. von N. Koblitz, New York, Heidelberg-Berlin 1977.

Mendelson, E.: Introduction to Mathematical Logik, Princeton, N. J. 1964, 2. Aufl. New York 1979, 3. Aufl. Monterey, Cal. 1983.

Monk, J. D.: Mathematical Logic, New York-Heidelberg-Berlin 1976.

Prestel, A.: Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie, Braunschweig-Wiesbaden 1986.

Quine, W. V. O.: Mathematical Logic, New York 1940, 2. Aufl. Cambridge, Mass. 1951.

Rautenberg, W.: Einführung in die Mathematische Logik, Braunschweig-Wiesbaden 1996.

Robbin, J. W.: Mathematical Logic. A First Course, New York 1969.

Rogers, R.: Mathematical Logic and Formalized Theories. A Survey of Basic Concepts and Results, Amsterdam-London 1971.

Rosenbloom, P. C.: The Elements of Mathematical Logic, New York 1950.
Rosser, B. J.: Logic for Mathematicians, New York 1978.
Russell, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie, Wiesbaden o. J.
Russell, Bertrand und Alfred North Whitehead: Principia Mathematica, 1910-1913. Vorwort und Einleitungen, Frankfurt 1986.
Scholz, H. und G. Hasenjäger: Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.
Shoenfield, J. R.: Mathematical Logic, Reading, Mass. 1967.
Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik, Göttingen 1966, 5. Aufl. 1977.
Wang, Hao: A Survey of Mathematical Logic, Peking 1962, auch Amsterdam 1963.

25. Mehrwertige Logik
Ackermann, R.: Introduction to Many-Valued Logics, London-New York 1967.
Blau, U.: Die dreiwertige Logik der Sprache. Ihre Syntax, Semantik und Anwendung in der Sprachanalyse, Berlin-New York 1978.
Dunn, J. M. und G. Epstein (Hg.): Modern Uses of Multiple-Valued Logic, Dordrecht -Boston 1977.
Reichenbach, H.: Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, Berkeley-Los Angeles 1944; dt.: Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik, Basel 1949.
Rescher, N.: Many-Valued Logic, New York 1969.
Rosser, J. B. und A. R. Turquette: Many-Valued Logics, Amsterdam 1952, ND Westport, Conn. 1977.
Zinovjew, A. A.: Philosophical Problems of Many-Valued Logics (aus dem Russischen 1960), Dordrecht-Boston 1963; dt.: Über mehrwertige Logik. Ein Abriß, Berlin-Braunschweig-Basel 1968.

26. Mereologische Logik
Clay, R. E.:Contributions to Mereology, Diss University of Notre Dame, 1961.
Eberle, R. A.: Nominalistic Systems, Dordrecht 1970.
Husserl, Edm.: Logische Untersuchungen II (darin: Zur Lehre vom Ganzen und Teilen), Halle 1900, 5. Aufl. 1968, S. 225 - 293.
Leonard, H. S.: Singular Terms. Diss. Harvard University 1930.
Lésniewski, S.: Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik (aus dem Russischen Moskau 1916), in: Fundamenta Mathematica 14, 1929 S. 1 - 81.
Luschei, E. C.: The Logical Systems of Lésniewski, Amsterdam 1962.

27. Metalogik
Borkowski, L.: Formale Logik. Logische Systeme - Einführung in die Metalogik (aus dem Polnischen 1968), Berlin 1976, 2. Aufl. München 1977

28. Modallogik (s. o. "mögliche Welten")
Aquist, L.: Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Properties, Uppsala 1971.
Carnap, R.: Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic, Chicago-Toronto-London 1947, 2. Aufl. 1956; dt.: Bedeutung und Notwendigkeit. Eine Studie zur Semantik und modalen Logik, Wien-New York 1972.
Feys, R.: Modal Logics, Löwen-Paris 1965.
Hintikka, J.: Models for Modalities. Selected Essays, Dordrecht 1969.
Hughes, G. E. und M. J. Cresswell: Introduction to Modal Logic, London 1972, dt.: Einführung in die Modallogik, Berlin-New York 1978.
Konyndyk, K.: Introductory Modal Logic, Notre-Dame, Ind. 1986.
Segerberg, K.: Essay in Classical Modal Logic, 3 Bände, Uppsala 1971.
von Wright, G. H.: An Essay in Modal Logic, Amsterdam 1951.

29. Natürliche Logik
Tennant, N. W.: Natural Logic, Edinburg 1978, 2. Aufl. 1990.

30. Nicht-aristotelische Logik
Günther, G.: Idee und Grundriß einer nicht-Aristotelischen Logik. Band 1: Die Idee und ihre philosophischen Voraussetzungen, Hamburg 1959.

31. Operative Logik
Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin-Göttungen-Heidelberg 1955.

32. Parakonsistente Logik
Bremer, Manuel: Wahre Widersprüche. Einführung in die Parakonsistente Logik, Sankt Augustin 1998.
Priest, Gr.: Paraconsistent Logic, in: D. Gabbay und F. Guenther, Hg. Handbook of Philosophical Logic, 2. Aufl. Dordrecht 1983 ff.
Priest, G., R. Routley und J. Norman (Hg.): Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent. München-Hamden-Wien 1989.
Rescher, N. und R. Brandom: The Logic of Inconsistency. A Study in Non-Standard Possible-World Semantics and Ontology, Oxford 1980.

33. Performative Logik
Austin , J. L.: How to Do Things with Words (Harvard-Vorlesungen 1955), hg. von J. O. Urmson, Oxford-Cambrige, Mass. 1962 und New York 1965, 2. Aufl. 1976; dt. Zur Theorie der Sprechakte, Stuttgart 1972.
Lambert, K. (Hg.): The logical way of doing things, New Haven 1969.

34. Pragmatische Logik
Ajdukiewicz, K.: Pragmatic Logic (aus dem Polnischen übers. von O. Wojtasiewicz), Dordrecht-Boston 1974.

35. Pyramidale Logik
Geldsetzer, L.: Logik, Aalen 1978.

36. Quantenlogik
Mittelstaedt, P. : Quantum Logic, Dordrecht-Boston-London 1978.

37. Reflexive Logik
Blanché, R.: Raison et discours. Défence de la logique réflexive, Paris 1967.

38. Relatedness-Logik
Epstein, R. L.: Relatedness and Implication, in: Philosophical Studies 36, 1979, S. 137 - 173.

39. Relationenlogik
Russell, B.: The Logic of Relations. In: ders.: Logic and Knowledge, Essays 1901 - 1950, hg. von R. C. Marsh, London 1956, S. 2-38, ND 1988.
Schulthess, P.: Relation und Funktion. Eine systematische und entwicklungsgeschichtliche Untersuchung zur theoretischen Philosophie Kants, Berlin-New York 1981.

40. Relevanzlogik
Anderson, A. R. und N. D. Belnap: Entailment. The Logic of Relevance and Necessity, I Princeton, N. J.-London 1975 , II (Mithg. J. M. Dunn) Princeton-Oxford 1992.
Read, S.: Relevant Logic. A Philosophical Examination of Inference, Oxford-New York 1988.
Routley, R., V. Plumwood, R. K. Meyer und R. T. Brady: Relevant Logics and Their Rivals. I: The Basic Philosophical and Semantical Theory, Atascadero, Cal. 1982.

41. Symbolische Logik
Agazzi, E.: La Logica simbolica, Brescia 1964.

Beth, E. W.: Formal Methods. An Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic, Dordrecht-Boston 1962.
Fitch, F. B.: Symbolic Logic. An Introduction, New York 1952.
Lewis, Clarence Irving: A Survey of Symbolic Logic, Berkeley 1918.
Lewis, Clarence Irving und H. L. Cooper: Symbolic Logic, New York 1932, 2. Aufl. New York 1959.

42. Temporale Logik (Tense Logic)
Gabbay, D. M.: Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics, Dordrecht 1976.
Pizzi, C. (Hg.): La logica del tempo, Turin 1974.
Prior, A. N.: Time and Modality, Oxford 1957, ND Westport 1979.
McArthur, R. P.: Tense Logic, Dordrecht-Boston 1976.
van Benthem, J. F. A. K.: The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse, Dordrecht-Boston-London 1983.

43. Transzendentale Logik
Barone, F.: Logica formale e trascendentale. I. Da Leibniz a Kant. II. L'algebra della logica, Turin 1957.
Hossenfelder, M.: Kants Konstitutionstheorie und die Transzendentale Deduktion, Berlin-New York 1978.
Husserl, E.: Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft (Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 10), Halle 1929, Studienausgabe Tübingen 1981.