Aufgabe 1: Übertragen Sie die folgenden Argumente in die Standardform, sofern sie sich noch nicht in der Standardform befinden.

1. Sein Sternzeichen ist Löwe, weil er am 5. August Geburtstag hat.

2. Das Dreieck ABC ist gleichwinklig. Folglich beträgt jeder Innenwinkel 60 Grad.

3. Ich denke; also bin ich.

4. Jede rationale Zahl kann als ein Bruch ganzer Zahlen ausgedrückt werden. Pi kann aber nicht als ein Bruch ganzer Zahlen augedrückt werden. Also ist Pi keine rationale Zahl. Pi ist aber eine Zahl. Folglich existiert mindestens eine nichtrationale Zahl.

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen über Argumente sind wahr?

1. Ein Argument kann gültig sein und doch eine falsche Konklusion haben.

2. Ein Argument kann eine wahre Konklusion haben und doch ungültig sein.

3. Ein Argument kann falsche Prämissen und eine wahre Konklusion haben und doch gültig sein.

4. Ein Argument kann wahre Prämissen und eine falsche Konklusion haben und kann doch gültig sein.

5. Ein Argument kann wahre Prämissen und eine wahre Konklusion haben und doch ungüitig sein.

Aufgabe 3: Zeige mit der Methode der Gegenbeispiele, daß die folgenden Argumente ungültig sind.

- Wenn die Arznei wirksam ist, dann wird der Patient gesund.
  Der Patient wird gesund.
  Also ist die Arznei wirksam.
  " the fallacy of affirming the consequent"

- Wenn es morgen regnet, dann wird das Spiel verschoben.
  Es regnet morgen nicht.
  Das Spiel wird nicht verschoben.
  " the fallacy of denying the antecedent"

Aufgabe 1: Übertragen Sie die folgenden Argumente in die Standardform.

1. Zwei ist eine Primzahl. Also sind nicht alle Primzahlen ungerade.

2. Es gibt kein Seeungeheuer in Loch Ness: Wenn es ein Seeungeheuer in Loch Ness gibt, dann sind dort Fauna oder Flora stark geschädigt. Aber weder die Fauna noch die Flora in Loch Ness sind stark geschädigt.

3. Backen ist Liebe. Also ist Liebe Sanella, denn Sanella ist Backen.

4. Wenn Gott allmächtig und gütig ist, dann gibt es kein Leid auf Erden. Es gibt Leid auf Erden. Folglich ist Gott nicht allmächtig oder Gott ist nicht gütig. Wenn er nicht allmächtig ist, dann hält er nicht, was er verspricht. Und wenn er nicht gütig ist, dann hält er ebenfalls nicht, was er verspricht. Also hält Gott nicht was er verspricht. [Tip: Zerlegen Sie die Argumentation in zwei Argumente]

5. Alle Raben sind schwarz. Kuno ist ein Rabe. Also ist Kuno schwarz.

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit der Methode der Gegenbeispiele, daß die folgenden Argumente ungültig sind.

1. Wenn der Himmel unbewölkt ist, dann kann Bärbel die Sterne sehen.
   Bärbel kann die Sterne sehen.
   Also ist der Himmel unbewölkt.
   ("the fallacy of affirming the consequent")

2. Wenn die Pavlovschen Hunde das Klingeln der Glocke hören, dann sondern sie vermehrt Speichelsekret ab.
   Sie hören nicht das Klingeln der Glocke.
   Also sondern sie nicht vermehrt Speichelsekret ab.
   ("the fallacy of denying the antecedent")

3. Manche Blumen sind rot und manche Blumen sind Rosen.
   Also sind manche Blumen rote Rosen.

4. Anton hat alle Logikaufgaben gelöst.
   Also erhält er den Logikschein.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ein Argument kann falsche Prämissen und eine wahre Konklusion haben und doch gültig sein.
2. Ein Argument kann eine wahre Konklusion haben und doch ungültig sein.
3. Ein Argument kann eine falsche Konklusion und wahre Prämissen haben und doch gültig sein.
4. Ein Argument kann gültig sein und doch eine falsche Konklusion haben.
5. Ein Argument kann wahre Prämissen und eine wahre Konklusion haben und doch ungültig sein.

Aufgabe 4: Welche der folgenden Wörter bzw. Wortgruppen drücken den Anspruch aus, daß logische Folgerung vorliegt.

1. daher	2. deshalb	3. alle	4. wenn	5. aber
6. und	7. demnach	8. somit	9. und	10. nur

- 9) $1 \in T$ 10) $\emptyset \subseteq T$ 11) $T \subseteq S$ 12) $\{1\} \in T$

Aufgabe 8: Welche der Mengen $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$ sind gleich?

Aufgabe 9: Sei $A = \{a, b\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie in der Listenschreibweise die Mengen $A \times B$ und $B \times A$ an. Gilt $A \times B = B \times A$?

Aufgabe 10: Übung zur Beweistechnik. Beweisen Sie für Mengen A,B,C:

1. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.
   (Hinweis: Sie müssen also mit Hilfe der Voraussetzung zeigen, daß ein beliebiges Element aus A auch aus C ist, d.h., aus $x \in A$ folgt $x \in C$. Vergl. Satz 1:c, Seite 288)

2. $A \cap B = B \cap A$
   (Hinweis: Vergl. Satz 2:a und Definition 2 auf Seite 290)

Aufgabe 11: Sei $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Welche der Teilmengen von $A \times B$ sind Funktionen von A nach B? Welche Funktionen sind injektiv, surjektiv?

1. $F_1 = \{< a, 1 >, < c, 3 >\}$

2. $F_2 = \{< a, 2 >, < b, 3 >, < c, 1 >\}$

3. $F_3 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$

4. $F_4 = \{< a, 3 >, < b, 2 >, < c, 1 >, < a, 3 >\}$

Aufgabe 1: Es seien: $P = \{p, q, r\}$ und $Q = \{r, s\}$

1. Geben Sie in der Listenschreibweise die Mengen $P \times Q$ und $Q \times P$ an.
2. Gilt $P \times Q = Q \times P$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:

1. Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition des geordneten Paares:
   $<2 + 2, \emptyset> \; = \{\{2 + 2\}, \{4\}, \{2^2, \emptyset\}\}$.
2. Sei $x = y$. Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition des geordneten Paares:
   $\{\{y\}\} = <x, y>$.

Aufgabe 3: Es seien: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 2, 3\}$.

$M = \{<a,1>, <a,2>, <a,3>\}$
$N = \{<4,1>, <5,2>, <6,3>, <7,2>\}$
$P = \{<1,4>, <2,5>, <3,6>\}$
$S = \{<4,1>, <5,2>, <6,3>, <7,4>\}$
$T = \{<a,1>, <b,3>, <c,2>\}$
$U = \{<a,1>, <c,2>, <b,1>\}$
$V = \{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

1. Welche der angegebenen Mengen sind Teilmengen von $A \times C$?
2. Welche der angegebenen Mengen sind Teilmengen von $B \times C$?
3. Welche der angegebenen Mengen sind Teilmengen von $C \times B$?
4. Welche dieser Teilmengen sind Funktionen von A nach B?
5. Welche dieser Teilmengen sind Funktionen von B nach C?
6. Welche dieser Teilmengen sind Funktionen von C nach B?
7. Welche dieser Funktionen sind injektiv? Welche dieser Funktionen sind surjektiv?
   Welche dieser Funktionen sind bijektiv?

Aufgabe 4:

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 9, 6\}$, C = {♥,*} und D = {♥}.
Zeigen Sie unter Verwendung der Definitionen für die Operationen der Durchschnittsbildung und der Bildung des Kartesischen Produkts, daß $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie für die Mengen A, B und C:

1. $A \cup A = A$.
2. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.

Aufgabe 1: Spezifizieren Sie die folgenden Mengen in der Prädikatschreibweise:

1. $A = \{a, e, i, o, u\}$
2. $B = \{$Asien, Australien, Afrika, Amerika, Europa$\}$
3. $C = \{3, 4, 5\}$
4. $D = \{$Dienstag, Donnerstag$\}$
5. $E = \{9, 9, 3^2\}$

Aufgabe 2: Spezifizieren Sie die folgenden Mengen in der Listenschreibweise:

1. $A = \{x : x - 2 = 5\}$
2. $B = \{x : x$ ist ein Buchstabe des Wortes "Laubbaum"$\}$
3. $C = \{x : x$ ist derzeitige Hauptstadt der BRD$\}$
4. $D = \{x : x$ ist cin Umlaut$\}$
5. $E = \{x : x$ ist ein Mann und x ist kein Sohn$\}$

Aufgabe 3: Welche der folgenden Mengen sind leer?

1. $A = \{\varnothing\}$
2. $B = \{x : x \neq x\}$
3. $C = \{x : x$ ist rund und x ist quadratisch$\}$
4. $D = \{x : x$ ist eine Frucht$\}$
5. $E = \{x : x$ ist ein federloser Zweibeiner$\}$

Aufgabe 4: Welche der fünf Mengen sind gleich?

$A = \{x : x > x \text{ und } x \in \mathbb{N}\}$ $B = \varnothing$ $C = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ $D = \{\varnothing\}$ $E = \{\varnothing, \varnothing\}$

Aufgabe 5: Es seien: $M = \{x \mid x$ ist eine Primzahl$\}$ und $y = 17$. Gilt $y \subseteq M$?

Aufgabe 6: Welche der sechs Mengen sind gleich? Von welchen Mengen ist D Teilmenge?

$A = \{a, b\}$	$B = \{c, b, a, c\}$	$C = \{a, b, \{c\}\}$
$D = \{a, b, b, a\}$	$E = \{b, c, e\}$	$F = \{\{c\}, b, b\}$

Aufgabe 7: Es seien: $M = \{\square, \heartsuit, \bigcirc\}$, $N = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $O = \{\{\bigcirc, \square\}, \heartsuit\}$, $P = \{\{\bigcirc\}, \square, \heartsuit, \varnothing, \bigcirc\}$.
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

1. $\{\bigcirc\} \in M$
2. $\{\bigcirc\} \subseteq M$
3. $\alpha \in N$
4. $\alpha \subseteq N$
5. $M \subseteq P$
6. $M \subseteq O$
7. $O \subseteq P$
8. $\{\bigcirc, \square\} \subseteq O$
9. $\varnothing \subseteq O$
10. $\varnothing \in O$
11. $\varnothing \in P$
12. $\{\bigcirc\} \in P$

Aufage 1) Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? (Vergl.S. 52)

1. David besiegte Goliath mit einer Steinschleuder.
2. Sein Reich möge kommen.
3. Haben Sie 5 Minuten Zeit für mich?
4. $2 + 2 = 7$
5. Kauf dir doch einen Volvo!
6. Es ist unmöglich, aus einer Krähe eine Amsel zu machen.

Aufgabe 2) Betrachten Sie die folgenden Sätze:

1. Weil im November 1989 die Grenze zwischen der DDR und der BRD geöffnet wurde, haben Besucher aus der DDR in Göttingen sehr viele Bananen gekauft. Zeige anhand dieses Satzes, daß "weil" kein wahrheitsfunktionaler Satzoperator ist (daß also durch "weil" das Prinzip der Wahrheitsfunktionalität verletzt wird)! Vorausgesetzt sei, daß das Kontextinvarianzprinzip gilt.

2. Es ist notwendig, daß 12 größer als 3 ist.
   Zeige, daß nach "notwendig, daß" das Extensionalitätsprinzip verletzt wird! (Hinweis: 12 = die Anzahl der Apostel. Vorausgesetzt sei, daß das Kontextinvarinanzprinzip gilt.)

3. Es ist in der BRD allgemein bekannt, daß Kohl deutscher Bundeskanzler ist. Zeige, daß "es ist in der BRD allgemein bekannt" das Wahrheitsfunktionalitätsprinzip verletzt. Vorausgesetzt sei, daß das Kontextinvarianzprinzip gilt.

Aufgabe 3) Geben Sie einen zweistelligen, dreistelligen und einen vierstelligen Relationsausdruck der natürlichen Sprache an. (Vergl.S. 58)

Aufgabe 1: Welcher Ausdruck der natürlichen Sprache könnte die Funktion f_4 aus Figur 1(S. 67) ausdrücken?

Aufgabe 2: Geben Sie aussagenlogische Argumentformen für folgende Argumente an:

1. Entweder sind die Synoptiker als authentische Quelle zu betrachten, oder das Johannesevangelium ist als authentische Quelle zu betrachten. Das Johannesevangelium ist nicht als authentische Quelle zu betrachten. Deshalb sind die Synoptiker als authentische Quelle zu betrachten.

2. Wenn die Geldmenge um weniger als 5 % ansteigt, dann sinkt die Inflationsrate. Da die Geldmenge um ca. 10 % ansteigt, wird die Inflationsrate nicht sinken. (Politiker aus GB)

3. Wenn Rußland unsicher wäre, wie die USA auf einen Angriff auf Westeuropa reagieren, und wenn Rußlands Absicht wäre, Westeuropa einzunehmen, dann würde es lokale Kriegsgründe inszenieren. Da sie das aber nicht getan haben, können sie nicht beabsichtigen, Westeuropa einzunehmen. (Presse GB)

4. Wenn die Zivilbevölkerung im Falle eines Atomkrieges nicht verteidigt werden kann, dann benötigen wir keine Zivilverteidigung. Wir benötigen jedoch Zivilverteidigung, wenn die Abschreckung eine glaubwürdige Strategie sein soll. Deshalb ist die Abschreckung keine glaubwürdige Strategie. (Campaign for Nuclear Disarmament)

Aufgabe 3: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition, daß die folgenden Ausdrücke aussagenlogische Satzformen sind.

1. $((p_1 \vee p_2) \rightarrow \neg p_3)$

2. $((p_1 \vee (p_3 \& p_5)) \rightarrow p_4)$

Aufgabe 4: Warum ist $(p_1 \oplus p_2)$ keine aussagenlogische Satzform? Begründen Sie dies im Detail unter Rückgriff auf die Definition.

Aufgabe 5: Führen Sie einen Induktionbeweis für die folgende Behauptung durch:
Für alle $n \in N$ gilt: $(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2}$
Hinweis: In der Induktionsbasis ist $n = 0$ zu nehmen, die Behauptung ist also zunächst für 0 zu beweisen. Im Induktionsschritt ist die Induktionshypothese:
$(1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)) = \frac{(n-1)n}{2}$

Aufgabe 6: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition, daß die folgenden Ausdrücke keine prädikatenlogische Satzformen sind.

1. $Ux((\neg R^2_1 a_1 x \& R^2_2 a_1 x) \rightarrow R^2_1 a_1 a_1))$
2. $Ux_1(Ux_1 R^2_1 x_1 a_2 \vee Ex_2 R^2_2 a_1 x_2)$

Aufgabe 7: Geben Sie prädikatenlogische Argumentformen für die folgenden Argumente an.

1. Babies sind unlogisch.
   Niemand wird verachtet, der Krokodile beherrschen kann.
   Unlogische Personen werden verachtet.
   Deswegen können Babies Krokodile nicht beherrschen.
2. Kein Altphilologe glaubt an das Paritätsprinzip.
   Jeder glaubt an das Paritätsprinzip oder ist polygam.
   Keine Diätfachfrau ist polygam.
   Also gibt es jemanden, der weder Altphilologe noch polygam ist.
3. Die Materialien der Natur, die von keinen meschlichen Tätigkeiten berührt werden, gehören niemandem. Daraus folgt, daß etwas nur dadurch zu Eigentum von jemand werden kann, indem er es bearbeitet und seinen natürlichen Zustand verändert. Daraus folgere ich, daß alles, was jemand durch seine Arbeit verbessert ihm und ihm alleine gehört. (John Locke)

Aufgabe 8: Geben Sie prädikatenlogische Satzformen der folgenden Aussagen an. (Vergl. S. 308)

1. Jede Frau trägt manchmal einen Ring an einem Finger.
2. Manche Frau trägt machmal keinen Ring an keinem Finger.
3. Manche Frau trägt niemals einen Ring an einem Finger, und mache Frau trägt immer einen Ring an allen Fingern.
4. Einige Personen mögen alles Unmoralische, alles Illegale und einiges, was dick macht.
5. Jeder ist sein eigener Freund.
6. Pferdeköpfe sind Säugetierköpfe.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß die folgenden Satzform die Funktion f_{10} von Figur 1 (S. 67) ausdrückt:

(es ist nicht der Fall, daß ----, und ===) oder (es ist nicht der Fall, daß ----, und es nicht der Fall, daß ===)

Aufgabe 2: Geben Sie für die Funktion f_6 einen Ausdruck an, der diese Funktion in der natürlichen Sprache bezeichnet.

Aufgabe 3: Welche zweistelligen Wahrheitsfunktionen werden jeweils durch die folgenden Ausdrücke der natürlichen Sprache ausgedrückt? (Beziehen Sie sich auf die Numerierung auf S. 67, Figur 1)

1. aber
2. obwohl
3. weder ... noch

Aufgabe 4: Geben Sie entsprechende aussagenlogische Argumentformen für folgendende Argumente an. (Verwenden Sie für den Satzoperator "genau dann, wenn" das Zeichen "$\leftrightarrow$". Man nennt dieses Zeichen das Zeichen für das Bikonditional)

1. Adorno begreift die Gesellschaft genau dann in Kategorien, die ihre Herkunft aus der Logik Hegels nicht verleugnen, wenn Adorno eine an Hegel erinnernde Ausdrucksweise verwendet. Adorno begreift die Gesellschaft in Kategorien, die ihre Herkunft aus der Logik Hegels nicht verleugnen. Also verwendet Adorno eine an Hegel erinnernde Ausdrucksweise.
2. Entweder sind menschliche Handlungen kausal determiniert oder menschliche Handlungen sind zufällige Ereignisse. Es gibt keinen freien Willen, wenn menschliche Handlungen kausal determiniert sind. Es ist aber nicht der Fall, daß menschliche Handlungen zufällige Ereignisse sind und es einen freien Willen gibt. Folglich gibt es keinen freien Willen.
3. Gottlob amüsiert sich, falls Kurt sich amüsiert, und Raimund amüsiert sich, falls Gottlob sich amüsiert. Wenn Alfred sich amüsiert, wenn weder Willard noch Rudolf sich amüsieren, dann amüsiert sich Kurt, Weder Willard noch Rudolf amüsieren sich, aber es ist nicht der Fall, daß Alfred sich nicht amüsiert. Also amüsiert sich Raimund.
4. Wenn Bärbel ins Kino geht, dann schaut sie sich "E.T." an oder "Vom Winde verweht" an. Bärbel geht ins Kino, schaut sich aber nicht "Vom Winde verweht" an. Also ist "E.T." ein erfolgreicher Film oder "E.T." ist kein erfolgreicher Film.
5. Wenn die Baumringe richtig identifiziert sind und die Keule einheimisch ist, dann ist die Ajo-Kultur genau dann früher als die Tula-Kultur, wenn die Tula-Kultur gleichzeitig mit der gegenwärtigen Ausgrabung ist oder sich aus ihr ableitet. Die Ayo-Kultur ist früher als die Tula-Kultur, aber weder ist die Tula-Kultur gleichzeitig mit der Ausgrabung, noch leitet sie sich aus der Ausgrabung ab. Infolgedessen ist es nicht der Fall, daß die Baumringe richtig identifiziert sind und die Keule einheimisch ist.

Aufgabe 1: Geben Sie die Audrücke an, die durch 1. - 7. bezeichnet werden!

1. $R_2^5 a_5("a_5"/"x_7")$
2. $R_7^5 a_5("x_7"/"a_5")$
3. $a_3("a_3"/"a_5")$
4. $a_3("a_3"/"a_3")$
5. $(\neg U x_1 R_2^1 x_1 \vee R_2^1 a_1)("a_1"/"a_2")$
6. $(\neg U x_1 R_2^1 x_1 \vee R_2^1 a_1)("x_1"/"x_5")$
7. $(R_1^1 a_1 \& R_1^2)("a_1"/"x_1")$

(Vergl. §9)

Aufgabe 2: Beweisen Sie:

1. $\{\neg p_{17}; \neg p_{28}\} \models_{al} \neg(p_{17} \vee p_{28})$
2. $\{(p_1 \longrightarrow p_2)\} \models_{al} (\neg p_1 \vee p_2)$
3. $\{p_1\} \models_{al} \neg\neg p_1$
4. $\{(p_1 \& p_2)\} \models_{al} (p_1 \& p_2)$

(Vergl. §11 und S. 149)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ aus $(p_1 \& p_2)$ aussagenlogisch folgt und umgekehrt!
Hinweis: Dies ist eine der Formeln von De Morgan. Vergl. §11 und S. 309 Aufg. 3

Aufgabe 1: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition der aussagenlogischen Folgerung, daß gilt:

1. $\{(p_1 \rightarrow p_2)\} \models_{al} (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$
2. $\{\neg(p_1 \& p_2), p_1\} \models_{al} \neg p_2$

Aufgabe 2: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition der aussagenlogischen Äquivalenz, daß zwischen den beiden folgenden aussagenlogischen Satzformen aussagenlogische Äquivalenz besteht: $\neg(p_1 \vee p_2)$, $(\neg p_1 \& \neg p_2)$

Aufgabe 3: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition der aussagenlogischen Wahrheit, daß folgende Satzform eine Tautologie ist: $((p_1 \& p_2) \rightarrow (p_2 \& p_1))$

Aufgabe 1: Zeigen Sie unter Rückgriff auf dic Definition, daß die folgenden Ausdrücke aussagenlogische Satzformen sind.

1. $\neg ((p_1 \,\&\, p_3) \vee \neg p_2)$
2. $(p_1 \rightarrow p_{55})$
3. $(p_5 \vee \neg ((p_3 \,\&\, p_5) \rightarrow p_1))$

Aufgabe 2: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition, daß die folgenden Ausdrücke keine aussagenlogischen Satzformen sind.

1. $(p_1 \,\&\, p_7 \rightarrow p_2)$
2. $((p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \rightarrow \forall)$
3. $(p_1\ K\ (p_1 \quad p_1))$

Aufgabe 3: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition, daß die folgenden Ausdrücke prädikatenlogische Satzformen sind.

1. $\forall x_1\, \exists x_2\, (R^2{}_1 x_1 x_2)$
2. $(\forall x_2\, R^3{}_5 a_1 x_2 a_3 \vee \exists\, x_2\, (R^1{}_1 x_2 \,\&\, R^2{}_1 x_2 a_1))$
3. $\exists x_1\, R^1{}_1 x_1 \rightarrow R^1{}_1 a_3$

Aufgabe 6: Geben Sie entsprechende prädikatenlogische Satzformen für folgende Sätze an (Hinweis: $R^2{}_1 x_1 x_2$: x_1 ist eine Ursache von x_2):

1. Alles hat eine Ursache.
2. Etwas ist Ursache von allem.
3. Etwas wird von allem verursacht.
4. Alles ist Ursache von etwas.

Aufgabe 7: Geben Sie die Ausdrücke an, die durch die Ersetzung hervorgehen.

1. $R^2{}_1 a_5 x_1$ ("a_1"/ "x_1")
2. $R^2{}_1 a_5 x_1$ ("x_1"/ "a_1")
3. $\forall x_1((R^1{}_1 x_1 \,\&\, R^1{}_1 a_5) \rightarrow R^3{}_1 a_5 x_1 a_2)$ ("x_1"/ "a_5")
4. $\forall x_1(R^1{}_1 x_1 \,\&\, R^1{}_1 a_5) \rightarrow R^3{}_1 a_5 x_1 a_2$ ("x_1"/ "a_5")

Interpretation J: Gegeben sei das syntaktische System der Prädikatenlogik. Sei J eine Interpretation über den Individuenbereich M, wobei M = {Fido, Bert, Kuno, Karl, Gustav}. Gegeben M, sei J folgendermaßen spezifiziert:

J("a_1") = Fido	J("a_4") = Karl
J("a_2") = Bert	J("a_5") = Gustav
J("a_3") = Kuno	für alle i > 5: J("a_i") = Bert

J("R^1_1") = {x : x ist ein Hund} = {Fido}
J("R^1_2") = {x : ist ein Truthahn} = {Bert}
J("R^1_3") = {x : x ist ein Rabe} = {Kuno, Karl, Gustav}
J("R^1_4") = {x : x ist schwarz} = {Fido, Kuno, Karl, Gustav}
J("R^2_1") = {<x, y> : x ist größer als y}= {<Bert, Fido>, <Bert, Kuno>, <Bert, Karl>, <Bert, Gustav>, <Fido, Kuno>, <Fido, Karl>, <Fido, Gustav>, <Gustav, Kuno>, <Gustav, Karl>}
J("R^2_2") = {<x, y> : x hackt y ein Auge aus} = $\varnothing$
J("R^2_3") = {<x, y> : x liebt y} = {<Bert, Fido>, <Fido, Bert>, <Karl, Gustav>, <Kuno, Kuno>}
J("R^3_1") = {<x, y, z> : x lacht mit y über z} = {<Kuno, Karl, Fido>, <Karl, Kuno, Fido>, <Kuno, Karl, Bert>, <Karl, Kuno, Bert>, <Kuno, Karl, Karl>, <Karl, Kuno, Karl>, <Kuno, Karl, Kuno>, <Karl, Kuno, Kuno>}
für alle weiteren Relationsausdrücke R^m_n: J("R^m_n") = $\varnothing$

Aufgabe 1: Lösen Sie bezüglich der Interpretation J folgende Aufgaben:

1. Übersetzen Sie die folgenden fünf Sätze in die natürliche Sprache:
   - R: $R^1_2a_2$
   - S: $(R^3_1a_3a_4a_2 \& R^3_1a_4a_3a_7)$
   - T: $\forall x_1 (R^1_3x_1 \rightarrow R^1_4x_1)$
   - U: $\neg\exists x_1\exists x_2 ((R^1_3 x_1 \& R^1_3x_2) \& R^2_2 x_1x_2)$
   - V: $\forall x_1 (R^1_3x_1 \rightarrow \neg\exists x_2 (R^1_3 x_2 \& R^2_2 x_1x_2))$

2. Beweisen Sie, daß folgende Sätze unter J wahr sind:
   - R: $\neg R^2_3a_1a_5$
   - S: $(R^1_3a_3 \rightarrow R^1_4a_3)$
   - T: $\neg\forall x_1 (R^1_4x_1 \rightarrow R^1_3x_1)$

3. Beweisen Sie, daß folgende Sätze unter J falsch sind:
   - R: $\exists x_1(R^1_2x_1 \& \forall x_2R^2_1x_1x_2)$
   - S: $\forall x_1(R^3_1a_3a_4x_1 \vee R^3_1a_4a_3x_1)$
   - T: $((R^1_1a_1 \& R^1_2a_2) \& R^2_2a_1a_2)$

Aufgabe 2: Wir beziehen uns auf die Menge N der natürlichen Zahlen als Individuenbereich. Betrachten Sie die Satzform S: $\exists x_1 (R^2{}_1 a_3 x_1 \,\&\, R^1{}_1 x_1)$.

1. Geben Sie eine Interpretation J^1 über N an, die die Satzform S erfüllt.
2. Geben Sie eine Interpretation J^2 über N an, die die Satzform S nicht erfüllt.
3. Geben Sie eine Satzform S', die von der Interpretation J^2 erfüllt wird.
4. Konstruieren Sie eine a_3-Variante $J^{1\prime}$ von J^1 über N, die die Satzform S nicht erfüllt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition der prädikatenlogischen Folgerung, daß gilt:

1. $\{\forall x_1(R^1{}_1 x_1 \rightarrow R^1{}_2 x_1), R^1{}_1 a_1\} \models_{pl} R^1{}_2 a_1$
2. $\{(R^1{}_1 a_1 \vee R^1{}_2 a_2)\} \models_{pl} \exists x_2 \exists x_1 (R^1{}_1 x_1 \vee R^1{}_1 x_2)$

Aufgabe 4: Zeigen Sie mittels des Baumkalküls, daß gilt:

1. $\neg (p_1 \vee \neg p_2)$
   $(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \,\&\, p_3))$

   ---

   p_3

2. $(\neg p_1 \,\&\, (p_2 \vee p_3))$

   $((\neg p_1 \,\&\, p_2) \vee p_3)$

3. $(p_3 \vee \neg p_2)$
   $((p_1 \,\&\, p_3) \vee (\neg p_1 \,\&\, \neg p_3))$

   $(p_1 \,\&\, \neg p_2)$

Aufgabe 1: Beweisen Sie die prädikatenlogischen Äquivalenzen Ä1 und Ä2 auf Seite 181.

Aufgabe 2: 1) Zeigen Sie mittels des Baumkalküls, daß $(p_1 \vee p_2)$ und $\neg(\neg p_1 \& \neg p_2)$ wechselseitig auseinander ableitbar sind.
2) Anstatt Satzformen der Aussagenlogik (oder der Prädikatenlogik) selbst abzuleiten, können wir auch schematische Ableitungen durchführen, und zwar anhand von Variablen für Satzformen. Solche Ableitungsschemata stehen dann für konkrete Ableitungen, in denen die metasprachlichen Satzformenvariablen durch objektsprachliche Satzformen ersetzt sind. Ein Ableitungsschema ist wie eine Ableitung, außer daß sie anstatt Satzformen Variablen für Satzformen enthält. Daß etwa eine Satzform A aus sich sebst, also aus A, ableitbar ist, zeigen wir auf folgende Weise:
1 A Prämisse
2 ¬ A negierte Konklusion
x
Seien nunmehr A,B,C und D aussagenlogische Satzformen. Zeige im Baumkalkül folgende Behauptungen:

1. Aus $(A \rightarrow B)$ und A ist B ableitbar. (Diese Ableitungsfigur heißt modus ponens; oft wird der modus ponens als eigene Ableitungsregel verwendet und heißt dann auch Abtrennungsregel.)
2. Aus $(A \rightarrow B)$ und $(B \rightarrow C)$ ist $(A \rightarrow C)$ ableitbar.
3. Aus $(((A\&B) \rightarrow C) \rightarrow D)$ ist $((A \rightarrow C) \rightarrow D)$ ableitbar.

3) Zeigen Sie für 1), 2) und 3), daß jeweils die letzte Satzform aus der davorstehenden Satzformenmenge im Baumkalkül prädikatenlogisch ableitbar ist:

1. $\{Ux_1(R^1_1x_1 \rightarrow R^1_2x_1), Ux_2R^1_1x_2\}; R^1_2a_1,$
2. $\{Ux_1(R^1_1x_1 \rightarrow R^1_2x_1), Ux_2R^1_1x_2\}; Ux_1R^1_2x_1,$
3. $\{Ux_1(R^1_1x_1 \rightarrow R^1_2x_1), Ux_2R^1_1x_2\}; Ux_3R^1_2x_3.$

Vergl. S.312 und §14