

## Übungsblatt zum 13.6.2002 mit Lösungen

**Aufgabe 1:** Die Menge  $M = \{\forall x_1(R^1_{1x_1} \rightarrow R^1_{2x_1}), (\neg(R^1_{1a_2} \wedge R^1_{2a_2}) \vee \neg(R^1_{1a_2} \wedge R^1_{3a_2}))\}$  ist erfüllbar. Geben Sie **(a)** eine Interpretation an, die  $M$  erfüllt und deren Individuenbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, und geben Sie **(b)** eine Interpretation an, die  $M$  erfüllt und deren Individuenbereich, aus einer Menge geometrischer Objekte einer Blockwelt besteht.

*Lösung (z.B.):*

(a)  $I = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$

$J(a_i) = i$ , für alle natürlichen Zahlen  $i$

$J(R^1_1) = \{x : x \text{ ist gerade}\}$

$J(R^1_2) = \{x : x \text{ ist durch zwei teilbar}\}$

$J(R^1_3) = \{x : x > 10\}$

$J(R^n_m) = \emptyset$ , für alle anderen Relationsausdrücke

(b)  $I = \{\text{Tetra, Dodeka1, Dodeka2}\}$

$J(a_1) = \text{Tetra}$

[= J(a)]

$J(a_2) = \text{Dodeka1}$

[= J(b)]

$J(a_3) = \text{Dodeka2}$

[= J(c)]

$J(a_i) = \text{Tetra}$ , für alle anderen Individuenbuchstaben

[= J(d) = J(e) = J(f)]

$J(R^1_1) = \{x : x \text{ ist ein Tetraeder}\} = \{\text{Tetra}\}$

[= J(Tet)]

$J(R^1_2) = \{x : x \text{ ist klein}\} = \{\text{Tetra, Dodeka1}\}$

[= J(Small)]

$J(R^1_3) = \{x : x \text{ ist ein Dodekaeder}\} = \{\text{Dodeka1, Dodeka2}\}$

[= J(Dodec)]

$J(R^n_m) = \emptyset$ , für alle anderen Relationsausdrücke

[fixierte Interpretation]

**Aufgabe 2** (LPL-Buch: S.242): Öffnen Sie in Tarski's World die Datei "Reichenbach's World 1".

(a) Geben Sie im Sentence-Window wieder, welche Größe die Tetraeder besitzen.

(b) Drücken Sie im Sentence-Window aus, dass jeder Dodekaeder klein, mittelgroß oder groß ist.

(c) Geben Sie wieder, dass einige Dodekaeder nicht klein sind.

(d) Drücken Sie aus, dass kein Würfel groß ist.

*Lösung (z.B.):*

(a)  $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$  oder

$\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \neg \text{Small}(x))$

(b)  $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow (\text{Small}(x) \vee (\text{Medium}(x) \vee \text{Large}(x))))$  oder

$\neg \exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \neg (\text{Small}(x) \vee (\text{Medium}(x) \vee \text{Large}(x))))$

(c)  $\exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \neg \text{Small}(x))$  oder

$\neg \forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$

(d)  $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(x))$  oder

$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \neg \text{Large}(x))$

$\forall x (\neg \text{Tet}(x) \vee \text{BackOf}(x,a))$  und 3.  $\exists x (\text{Small}(x) \wedge \text{BackOf}(x, a))$ .

- (a) Konstruieren Sie eine Welt, in der alle Sätze wahr sind.
- (b) Konstruieren Sie eine Welt, in der alle Sätze falsch sind.
- (c) Konstruieren Sie eine Welt, in der die Sätze 1 und 2 wahr sind, Satz 3 aber falsch ist.
- (d) Was haben Sie mit Ihrer Lösung zu (a) gezeigt, was mit der Lösungen zu (c).

*Lösung (z.B.):*

- (a) Feld (a,1): ein kleiner Würfel mit dem Namen "a"  
Feld (a,8): ein kleiner Tetraeder
- (b) Feld (a,1): ein mittelgroßer Tetraeder  
Feld (a,8): ein kleiner Würfel mit dem Namen "a"
- (c) Feld (a,1): ein kleiner Würfel mit dem Namen "a"
- (d) Eine Lösung zu (a) zeigt, dass die Menge, die diese drei Sätze enthält, erfüllbar ist.  
Eine Lösung zu (c) zeigt, dass der dritte Satz nicht aus den ersten beiden folgt.

**Aufgabe 4** (LPL-Buch, S.300): Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die Sprache von Tarski's World. *Hinweis:* In "Bolzano's World" sind alle Sätze wahr, in "Ron's World" (d) und (e), in "Claire's World" (a), (c) und (e) und in "Peano's World" nur (e).

- (a) Jeder Tetraeder liegt vor allen Dodekaedern.
- (b) Kein Dodekaeder hat irgendetwas hinter sich liegen.
- (c) Kein Tetraeder hat dieselbe Größe wie irgendein Würfel.
- (d) Alle Dodekaeder besitzen dieselbe Größe wie irgendeiner der Würfel.
- (e) Jeder Dodekaeder mit nichts zu seiner Rechten, hat etwas zur seiner Linken liegen.

*Lösung (z.B.):*

- (a)  $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \forall y (\text{Dodec}(y) \rightarrow \text{FrontOf}(x, y)))$
- (b)  $\neg \exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \exists y \text{BackOf}(y, x))$
- (c)  $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{SameSize}(x, y)))$
- (d)  $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{SameSize}(x, y)))$
- (e)  $\forall x ((\text{Dodec}(x) \wedge \neg \exists y (\text{RightOf}(y, x))) \rightarrow \exists z \text{LeftOf}(z, x))$