

Vierte Sitzung

(Wiederholung: Syntax und Semantik der
Prädikatenlogik)

I. Syntax der Prädikatenlogik

Vokabular des syntaktischen Systems der PL1

Das Vokabular der PL1 besteht aus folgender Menge V:

$\{ R^1_1, R^1_2 \dots R^2_1, R^2_1 \dots ,$	[Relationsbuchstaben]
$a_1, a_2, a_3 \dots ,$	[Individuenbuchstaben]
$x_1, x_2, x_3 \dots ,$	[Individuenvariablen]
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow,$	[Satzoperatoren]
$\exists, \forall,$	[Quantoren]
$), (\quad \quad \quad \}$	[Gliederungszeichen]

Grammatik des syntaktischen Systems der PL1

(i) Ausdrücke der Gestalt $R^n_m \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ sind Satzformen der PL1.

Beispiele:

$R^1_7 a_3$

$R^4_1 a_5 a_5 a_1 a_2$

$R^2_1 x_1 a_2$

keine Satzform

$R^2_1 a_5$

keine Satzform

(ii) Wenn A und B Satzformen der PL1 sind, dann auch $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$.

Beispiele:

$$\neg R^4_1 a_5 a_5 a_1 a_2$$

$$(R^3_1 a_5 a_1 a_2 \wedge R^3_1 a_5 a_1 a_2)$$

$$(R^1_2 a_5 \rightarrow R^3_1 a_5 a_1 a_2)$$

(iii) Wenn x eine Variable, α ein Individuenbuchstabe und A eine Satzform der PL1 ist, in der x nicht vorkommt, dann ist auch $\forall x A[\alpha/x]$ eine Satzform der Prädikatenlogik.

Beispiele:

$$\forall x_2 R^2_2 x_2 a_5 \quad [x = x_2, \alpha = a_1, A = R^2_2 a_1 a_5]$$

$$\forall x_1 (R^1_2 x_1 \rightarrow R^3_1 x_1 a_1 a_2)$$

$$[x = x_1, \alpha = a_5, A = (R^1_2 a_5 \rightarrow R^3_1 a_5 a_1 a_2)]$$

(iv) Wenn x eine Variable, α ein Individuenbuchstabe und A eine Satzform der PL1 ist, in der x nicht vorkommt, dann ist auch $\exists x A[\alpha/x]$ eine Satzform der Prädikatenlogik.

Beispiel:

$\exists x_1 R^1_{1x_1}$ [$x = x_1, \alpha = a_3, A = R^1_{1a_3}$]

$\exists x_5 (R^1_{2a_5} \wedge R^3_{1a_5 a_1 a_2})$
[$x = x_5, \alpha = a_4, A = (R^1_{2a_5} \wedge R^3_{1a_5 a_1 a_2})$]

(v) Nichts sonst ist eine Satzform der PL1!

Beispiel:

- (1) $R^1 a_1$ (i)
- (2) $R^2 a_1 a_2$ (i)
- (3) $R^2 a_2 a_1$ (i)
- (4) $\neg R^2 a_2 a_1$ (3)(ii)
- (5) $(R^2 a_1 a_2 \wedge \neg R^2 a_2 a_1)$ (2)(4)(ii)
- (6) $\exists x_2 (R^2 a_1 x_2 \wedge \neg R^2 x_2 a_1)$ (5)(iii)
- (7) $(R^1 a_1 \rightarrow \exists x_2 (R^2 a_1 x_2 \wedge \neg R^2 x_2 a_1))$ (1)(6)(ii)
- (8) $\forall x_1 (R^1 x_1 \rightarrow \exists x_2 (R^2 x_1 x_2 \wedge \neg R^2 x_2 x_1))$ (7)(iii)

II. Semantik der Prädikatenlogik:

Die Interpretation

Eine *Interpretation* J über einen Individuenbereich M ist eine Funktion, deren Definitionsbereich aus den Mengen der Individuenbuchstaben und der Relationsbuchstaben des syntaktischen Systems der Prädikatenlogik besteht. Ihr Wertebereich ist der Individuenbereich M und aus ihm gebildete Mengen und Relationen.

M und J haben folgende Eigenschaften:

- (i) M ist eine nicht-leere Menge von Individuen
- (ii) J weist jedem Individuenbuchstaben α ein Element aus M zu.
- (iii) J weist jedem Relationsbuchstaben R^n eine n -stellige Relation $J(R^n) \subseteq M^n$ zu. Insbesondere weist J einem (einstelligen) Prädikatbuchstaben R^1 eine Teilmenge $J(R^1)$ von M zu.

(i) M ist eine nicht-leere Menge von Individuen

Beispiele:

$M = \{x : x \text{ ist ein Mensch und } x \text{ ist blond}\}$

$M = \{2, 4, 6, 8\}$

$M = \{x : x \text{ ist eine Menge}\}$

$M = \{\text{Tet1, Tet2, Dodec, Cube}\}$

(ii) J weist jedem Individuenbuchstaben α ein Element aus M zu.

Beispiel bzgl. $M = \{\text{Tet1, Tet2, Dodec, Cube}\}$:

$J(\text{"a}_1\text{"}) = \text{Tet1}$ $J(\text{"a}_i\text{"}) = \text{Tet1},$

$J(\text{"a}_2\text{"}) = \text{Tet2}$ für alle $i > 5$

$J(\text{"a}_3\text{"}) = \text{Cube}$

$J(\text{"a}_4\text{"}) = \text{Cube}$

$J(\text{"a}_5\text{"}) = \text{Cube}$ [Dodec besitzt keinen Namen]

(iii) J weist jedem Relationsbuchstaben R^n eine n -stellige Relation $J(R^n) \subseteq M^n$ zu.
Insbesondere weist J einem (einstelligen) Prädikatbuchstaben R^1 eine Teilmenge $J(R^1)$ von M zu.

Beispiel bzgl. $M = \{\text{Tet1}, \text{Tet2}, \text{Cube}, \text{Dodec}\}$:

$$J(R^1_1) = \{x : x \text{ ist groß}\}$$

$$J(R^1_2) = \{x : x \text{ ist klein}\}$$

$$J(R^1_5) = \{x : x \text{ ist ein Tetraeder}\}$$

$$J(R^2_1) = \{\langle x, y \rangle : x \text{ ist kleiner als } y\}$$

$$J(R^2_3) = \{\langle x, y \rangle : x \text{ liegt links von } y\}$$

$$J(R^3_1) = \{\langle x, y, z \rangle : x \text{ liegt zwischen } y \text{ und } z\}$$

$$J(R^n_m) = \emptyset, \text{ für alle anderen Relationsausdrücke}$$

a-Variante zu einer Interpretation *J*:

Sei α ein Individuenbuchstabe, sei *J* eine Interpretation über einen Individuenbereich *M*.

Eine α -Variante von *J* ist eine Interpretation *J'* über *M*, die mit *J* in allem übereinstimmt außer unter Umständen in dem, was dem Individuenbuchstaben α zugewiesen wird. Es gilt also unter Umständen: $J(\alpha) \neq J'(\alpha)$.

Achtung! Diese Definition lässt auch zu, dass eine Interpretation *J* α -Variante von sich selber ist. In diesem Falle haben wir: $J(\alpha) = J'(\alpha)$, d.h. *J* = *J'*.

Beispiel: a_2 -Variante bzgl. J

$[M = \{x : x \text{ ist eine nat\u00fcrliche Zahl}]$

$$J("a_1") = 1$$

$$J("a_2") = 2$$

$$J("a_3") = 4$$

...

$$J(\mathbb{R}^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

$$J'("a_1") = 1$$

$$J'("a_2") = 9$$

$$J'("a_3") = 4$$

...

$$J'(\mathbb{R}^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

Beispiel: a_2 -Variante bzgl. J

$[M = \{x : x \text{ ist eine nat\u00fcrliche Zahl}]$

$$J("a_1") = 1$$

$$J("a_2") = 2$$

$$J("a_3") = 4$$

...

$$J(\mathbb{R}^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

$$J'("a_1") = 1$$

$$J'("a_2") = 2$$

$$J'("a_3") = 4$$

...

$$J'(\mathbb{R}^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

Beispiel: *keine* a_2 -Variante bzgl. J
[M = {x : x ist eine natürliche Zahl}]

$$J("a_1") = 1$$

$$J("a_2") = 2$$

$$J("a_3") = 4$$

...

$$J(R^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

$$J'("a_1") = 1$$

$$J'("a_2") = 2$$

$$J'("a_3") = 6$$

...

$$J'(R^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

... aber eine a_3 -Variante

Beispiel: *keine* a_1 -Variante bzgl. J
[M = {x : x ist eine natürliche Zahl}]

$$J("a_1") = 1$$

$$J("a_2") = 2$$

$$J("a_3") = 4$$

...

$$J(R^1_1) = \{x : x = 1\}$$

...

$$J'("a_1") = 1$$

$$J'("a_2") = 2$$

$$J'("a_3") = 4$$

...

$$J'(R^1_1) = \{x : x = 2\}$$

...

Interpretationen in Tarski's World:

(i) M ist eine nicht-leere Menge mit maximal 12 Individuen, wobei jedes Individuum ein Würfel, Tetraeder oder Dodekaeder ist.

Beispiel:

$M = \{\text{Cube}, \text{Dodec1}, \text{Dodec2}\}$

[wobei Cube ein Würfel ist, Dodec1 und Dodec2 Dodekaeder sind]

(ii) J weist jedem Individuenbuchstaben α (*max.* 6) ein Element aus M zu.

Beispiel:

$J(a) = \text{Cube}$

$J(b) = \text{Cube}$

$J(d) = \text{Dodec1}$

["c", "e" und "f" werden hier nicht verwendet und gehören in diesem Fall nicht zum Vokabular]

(iii) J weist den Relationsbuchstaben wie folgt Teilmengen, 2-stellige oder 3-stellige Relationen bzgl. M zu:

Einstellige Relationsausdrücke:

$J(\text{Tet}) = \{x : x \text{ ist ein Tetraeder}\}$

$J(\text{Dodec}) = \{x : x \text{ ist ein Dodekaeder}\}$

$J(\text{Cube}) = \{x : x \text{ ist ein Würfel}\}$

$J(\text{Small}) = \{x : x \text{ ist klein}\}$

$J(\text{Medium}) = \{x : x \text{ ist mittelgroß}\}$

$J(\text{Large}) = \{x : x \text{ ist groß}\}$

Zweistellige Relationsausdrücke:

$J(\text{Smaller}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist kleiner als } y \}$

$J(\text{Larger}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist größer als } y \}$

$J(\text{SameSize}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist so groß wie } y \}$

$J(\text{SameShape}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ hat Form wie } y \}$

$J(\text{LeftOf}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist links von } y \}$

$J(\text{RightOf}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist rechts von } y \}$

Zweistellige Relationsausdrücke:

...

$J(\text{FrontOf}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ liegt vor } y \}$

$J(\text{BackOf}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ liegt hinter } y \}$

$J(\text{SameCol}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist in Spalte von } y \}$

$J(\text{SameRow}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ ist in Reihe von } y \}$

$J(\text{Adjoins}) = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ liegt (direkt) neben } y \}$

Dreistellige Relationsausdrücke:

$J(\text{Between}) = \{ \langle x, y, z \rangle : x \text{ liegt zw. } y \text{ und } z \}$

Die Sprache von Tarski's World enthält keine weiteren Relationsausdrücke.

Die Interpretation der Relationsausdrücke ist in Tarski's World in gezeigter Weise fixiert.

Die Bewertungsfunktion

Eine prädikatenlogische Bewertung v_J - gegeben eine Interpretation J über einen Individuenbereich M - ist eine Funktion, die als Definitionsbereich die Menge der Satzformen des syntaktischen Systems der Prädikatenlogik hat, als Wertebereich die Menge der Wahrheitswerte $\{W, F\}$.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Individuenbuchstaben; sei R^n ein n-stelliger Relationsbuchstabe.

v_J hat folgende Eigenschaften:

(i) $v_J(R^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = W$ gdw.
 $\langle J(\alpha_1), J(\alpha_2) \dots J(\alpha_n) \rangle \in R^n$

Beispiel bzgl. $M = \{\text{Cube}, \text{Tet1}, \text{Tet2}\}$:

$J(a_1) = \text{Tet1}, J(a_2) = \text{Tet2}, J(a_3) = \text{Cube} \quad [\dots]$

$J(R^1_1) = \{x : x \text{ ist W\u00fcrfel}\} = \{\text{Cube}\} \quad [\dots]$

$v_J(R^1_1 a_3) = W:$ $\langle J(a_3) \rangle \in J(R^1_1)$
 $\text{Cube} \in \{\text{Cube}\}$

$v_J(R^1_1 a_1) = F:$ $\langle J(a_1) \rangle \notin J(R^1_1)$
 $\text{Tet1} \notin \{\text{Cube}\}$

Beispiel bzgl. $M = \{\text{Tet1}, \text{Tet2}, \text{Cube}\}$:

$$J(a_1) = \text{Tet1}, \quad J(a_2) = \text{Tet2}, \quad J(a_3) = \text{Cube} \quad [\dots]$$

$$J(R^2_1) = \{\langle x, y \rangle : x \text{ ist kleiner als } y\} \\ = \{\langle \text{Tet1}, \text{Tet2} \rangle, \langle \text{Tet1}, \text{Cube} \rangle\} \quad [\dots]$$

$$v_J(R^2_1 a_1 a_2) = W: \langle J(a_1), J(a_2) \rangle \in J(R^2_1) \\ \langle \text{Tet1}, \text{Tet2} \rangle \in \{\langle \text{Tet1}, \text{Tet2} \rangle, \langle \text{Tet1}, \text{Cube} \rangle\}$$

$$v_J(R^2_1 a_3 a_1) = F: \langle J(a_3), J(a_1) \rangle \notin J(R^2_1) \\ \langle \text{Cube}, \text{Tet1} \rangle \notin \{\langle \text{Tet1}, \text{Tet2} \rangle, \langle \text{Tet1}, \text{Cube} \rangle\}$$

(ii) Wenn A, B Satzformen der PL sind, so gilt:

- $v_J(A \wedge B) = W$, wenn $v_J(A) = v_J(B) = W$, und $v_J(A \wedge B) = F$ sonst;
- $v_J(A \vee B) = F$, wenn $v_J(A) = v_J(B) = F$, und $v_J(A \vee B) = W$ sonst;
- $v_J(A \rightarrow B) = F$, wenn $v_J(A) = W$ und $v_J(B) = F$, $v_J(A \rightarrow B) = W$ sonst;
- $v_J(\neg A) = W$, wenn $v_J(A) = F$, und $v_J(\neg A) = F$, wenn $v_J(A) = W$

(iii) Sei α ein Individuenbuchstabe, sei x eine Variable, sei A eine Satzform der Prädikatenlogik; dann gilt:

$v_J(\forall x A[\alpha/x]) = W$, wenn für alle α -Varianten J' von J gilt: $v_{J'}(A) = W$,

$v_J(\forall x A[\alpha/x]) = F$ sonst

(iv) Sei α ein Individuenbuchstabe, sei x eine Variable, sei A eine Satzform der Prädikatenlogik; dann gilt:

$v_J(\exists x A[\alpha/x]) = W$, wenn für *mindestens* eine α -Variante J' von J gilt: $v_{J'}(A) = W$

$v_J(\exists x A[\alpha/x]) = F$ sonst

Definition prädikatenlogischer Erfüllung

Sei M eine Menge von prädikatenlogischen Satzformen, und sei A eine prädikatenlogische Satzform.

Sei J eine Interpretation, für die $v_J(A) = W$, bzw. $v_J(S) = W$ für alle $S \in M$, dann sagen wir auch, dass J A *erfüllt* bzw. dass J M *erfüllt*.

Eine Interpretation, die A bzw. M erfüllt, heißt *Modell von A* bzw. *Modell von M*.

Definition prädikatenlogischer Folgerung

Sei M eine Menge von prädikatenlogischen Satzformen, und sei A eine prädikatenlogische Satzform.

Gilt für jede Interpretation J : wenn $v_J(S) = W$ für alle $S \in M$, dann auch $v_J(A) = W$, so sagen wir, dass A aus M *prädikatenlogisch* folgt.