Erste Sitzung

(Wiederholung)

Zur Syntax und Semantik der Aussagenlogik

1. Das syntaktische System der AL
   - Vokabular / Grammatik

2. Die Semantik der AL
   - Belegung / Bewertungsfunktion
   - aussagenlogische Folgerung / Äquivalenz / Tautologie / Widerspruch

3. Die Wahrheitstafelmethode

1. Das syntaktische System der AL

Die Syntax ist die Lehre von den wohlgeformten bzw. grammatischen Ausdrücken einer Sprache sowie des (inneren) Aufbaus dieser Ausdrücke.

Sie sagt uns,

(a) welche Zeichen es in einem System gibt

(b) welche Folgen von Zeichen wohlgeformt sind

(c) wie die unterschiedlichen Zeichenfolgen zusammenhängen

Das syntaktische System der Aussagenlogik besteht aus:

(a) einem *Vokabular*, d.h. eine Menge einfacher oder nicht-zusammengesetzter Zeichen

(b) einer *Grammatik*, d.h. einer Menge von Regeln, die bestimmen, welche Kombinationen von Zeichen aus dem Vokabular zulässig sind und welche andererseits als unzulässig auszuschliessen sind.

(a) Das Vokabular der Aussagenlogik:

(i) die Satzbuchstaben: p_1, p_2, p_3

(ii) die logischen Zeichen: $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$

(iii) die Gliederungszeichen:), (

[Wir verwenden anstelle des “&“ im weiteren das Zeichen “$\wedge$“]

Folgende Zeichenfolgen sind z.B. Zeichenfolgen (Ausdrücke) der AL:

1. $\wedge\ p_1 p_1 \wedge \wedge ($
2. $(p_1 \wedge p_3)$

Folgende Zeichenfolgen sind z.B. keine Ausdrücke der AL:

1. (p_1Ä)
2. $\forall x_1\ (R^1{}_1 x_1 \rightarrow R^1{}_2 x_1)$

(b) Die Grammatik der Aussagenlogik

Alle und nur solche Ausdrücke über dem Vokabular der Aussagenlogik sind Satzformen, die folgenden beiden Bedingungen genügen:

(i) p_1, p_2, p_3 ... sind Satzformen der Aussagenlogik

(ii) Wenn A und B Satzformen der Aussagenlogik sind, dann sind dies auch $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$

Ist “p_1“ eine Satzform der AL?

(1)	p_1	(i)	ja

Ist "$\neg p_1 \vee p_1$" eine Satzform der AL?

(1)	p_1	(i)
(2)	$\neg p_1$	(1), (i)
(3)	$\neg p_1 \vee p_1$	(2)(1),(ii) ja

Ist "$((p_2 \rightarrow p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2))$" eine Satzform der AL?

(1)	p_2	(i)
(2)	p_3	(i)
(3)	p_1	(i)
(4)	$(p_2 \rightarrow p_3)$	(1)(2),(ii)
(5)	$(p_1 \wedge p_2)$	(3)(1),(ii)
(6)	$\neg(p_1 \wedge p_2)$	(5),(ii)
(7)	$((p_2 \rightarrow p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2))$	(4)(6),(ii) ja

2. Die Semantik der Aussagenlogik

In der Syntax geht es um die Form sprachlicher Ausdrücke. Die Semantik beschäftigt sich dagegen mit der Bedeutung sprachlicher Ausdrücke und dem Verhältnis von Sprache und Wirklichkeit.

(a) Belegung

Eine Funktion b von der Menge der Satzbuchstaben in die Menge {W, F} der Wahrheitswerte heißt *Belegung*.

Beispiel:

$b(p_1) = W$
$b(p_2) = F$
$b(p_3) = F$
$b(p_4) = F$
$b(p_i) = W$, für alle $i > 4$

(b) Bewertungsfunktion:

Eine aussagenlogische Bewertung v_b, gegeben eine Belegung b, ist eine Funktion von der Menge der Satzformen der AL in die Menge {W, F} der Wahrheitswerte, für die folgendes gilt:

(i) Wenn A ein Satzbuchstabe ist, dann ist $v_b(A) = b(A)$.

Beispiel:

$b(p_1) = W$	$v_b(p_1) = W$
$b(p_2) = F$	$v_b(p_2) = F$
$b(p_3) = F$	$v_b(p_3) = F$
$b(p_4) = F$	$v_b(p_4) = F$
...	...

(ii) Wenn A eine Satzform ist, dann gelte:

$v_b(\neg A) = W$, wenn $v_b(A) = F$, und

$v_b(\neg A) = F$, wenn $v_b(A) = W$

A	$\neg$A
W	F
F	W

(iii) Wenn A und B Satzformen sind, dann gelte:
$V_b(A \wedge B) = W$, wenn $v_b(A) = v_b(B) = W$
$V_b(A \wedge B) = F$ sonst

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

(iii) Wenn A und B Satzformen sind, dann gelte:
$V_b(A \vee B) = F$, wenn $v_b(A) = v_b(B) = F$
$V_b(A \vee B) = W$ sonst

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

(iii) Wenn A und B Satzformen sind, dann gelte:
$V_b(A \rightarrow B) = F$, wenn $v_b(A) = W$ und $v_b(B) = F$
$V_b(A \rightarrow B) = W$ sonst

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Aussagenlogische Folgerung:

Sei M eine Menge von Satzformen der Aussagenlogik, sei A eine Satzform der Aussagenlogik.

Wenn für jede Belegung b gilt: Falls $v_b(S) = W$ für alle $S \in M$, dann $v_b(A) = W$, dann sagen wir: A *folgt aussagenlogisch* aus M.

Aussagenlogische Äquivalenz:

Seien A und B Satzformen der Aussagenlogik.

Falls gilt, (a) dass A aussagenlogisch aus B folgt und (b) dass B aussagenlogisch aus A folgt, dann heißen A und B *aussagenlogisch äquivalent*.

Tautologie:

Sei A eine Satzform der Aussagenlogik.

Gelte für alle Belegungen b: $v_b(A) = W$, dann heißt A *Tautologie* oder *aussagenlogische Wahrheit*.

Widerspruch:

Sei A eine Satzform der Aussagenlogik.

Gelte für alle Belegungen b: $v_b(A) = F$, dann heißt A *Widerspruch* oder *Kontradiktion*.