

Konjunktionsbeseitigung (\wedge Elim):

$$\begin{array}{l} | (A \wedge B) \\ | \dots \\ > | A \end{array} \qquad \begin{array}{l} | (A \wedge B) \\ | \dots \\ > | B \end{array}$$
Konjunktionseinführung (\wedge Intro):

$$\begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ | B \\ | \dots \\ > | (A \wedge B) \end{array} \qquad \begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ | B \\ | \dots \\ > | (B \wedge A) \end{array}$$
Disjunktionsbeseitigung (\vee Elim):

$$\begin{array}{l} | (A \vee B) \\ | \dots \\ | \quad \underline{| A} \\ | \quad \dots \\ | \quad S \\ | \dots \\ | \quad \underline{| B} \\ | \quad \dots \\ | \quad S \\ | \dots \\ > | S \end{array} \qquad \begin{array}{l} | (A \vee B) \\ | \dots \\ | \quad \underline{| B} \\ | \quad \dots \\ | \quad S \\ | \dots \\ | \quad \underline{| A} \\ | \quad \dots \\ | \quad S \\ | \dots \\ > | S \end{array}$$
Disjunktionseinführung (\vee Intro):

$$\begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ > | (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ > | (B \vee A) \end{array}$$
Negationsbeseitigung (\neg Elim):

$$\begin{array}{l} | \neg\neg A \\ | \dots \\ > | A \end{array}$$
Negationseinführung (\neg Intro):

$$\begin{array}{l} | \quad \underline{| A} \\ | \quad \dots \\ | \quad \perp \\ > | \neg A \end{array}$$
 \perp -Beseitigung (\perp Elim):

$$\begin{array}{l} | \perp \\ | \dots \\ > | A \end{array}$$
 \perp -Einführung (\perp Intro):

$$\begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ | \neg A \\ | \dots \\ > | \perp \end{array}$$
Konditionalbeseitigung (\rightarrow Elim):

$$\begin{array}{l} | (A \rightarrow B) \\ | \dots \\ | A \\ | \dots \\ > | B \end{array} \qquad \begin{array}{l} | A \\ | \dots \\ | (A \rightarrow B) \\ | \dots \\ > | B \end{array}$$
Konditionaleinführung (\rightarrow Intro):

$$\begin{array}{l} | \quad \underline{| A} \\ | \quad \dots \\ | \quad B \\ | \dots \\ > | (A \rightarrow B) \end{array}$$

Bikonditionalbeseitigung (« Elim):

(A ↔ B)	(A ↔ B)
...	...
A	B
...	...
> B	> A

Bikonditionaleinführung (« Intro):

	<u>A</u>		<u>A</u>

	B		B
...		...	
	<u>B</u>		<u>B</u>

	A		A
...		...	
> (A ↔ B)		> (B ↔ A)	

Reiteration (Reit):

A
...
> A

Beispiele

· Konjunktionseinführung (\wedge Intro):

(A \wedge B)	(A \wedge B)
...	...
> A	> B

1. p ₁	
2. (p ₅ \wedge p ₆)	
3. p ₆	\wedge Elim: 2

1. ((p ₂ \wedge p ₃) \wedge p ₄)	
2. (p ₂ \wedge p ₃)	\wedge Elim: 1
3. p ₅	
4. p ₃	\wedge Elim: 2
5. (p ₅ \rightarrow p ₃)	\rightarrow Intro: 3-4

1. p ₃	
2. (p ₄ \wedge p ₅)	
3. p ₅	\wedge Elim: 2
4. p ₄	r \wedge Elim: 2 f!

· Konjunktionseinführung (\wedge Intro):

A	A
...	...
B	B
...	...
> (A \wedge B)	> (B \wedge A)

1. (p ₁ \wedge p ₂)	
2. (p ₃ \wedge p ₄)	
3. p ₁	\wedge Elim: 1
4. p ₂	\wedge Elim: 1
5. p ₃	\wedge Elim: 2
6. (p ₃ \wedge p ₁)	\wedge Intro: 5, 3
7. (p ₂ \wedge (p ₃ \wedge p ₁))	\wedge Intro: 4, 6

1. p ₁	
2. p ₂	
3. (p ₁ \wedge p ₂)	\wedge Intro: 1, 2
4. (p ₂ \rightarrow (p ₁ \wedge p ₂))	\rightarrow Intro: 2-3

1.	p_1	
	2.	$(p_2 \wedge p_6)$
	3.	p_6
	4.	$(p_1 \wedge p_6)$
		\wedge Elim: 2
		r \wedge Intro: 1, 3 f!

• **Disjunktionbeseitigung (Ú Elim):**

	$(A \vee B)$		$(A \vee B)$

	<u>A</u>		<u>B</u>

	S		S

	<u>B</u>		<u>A</u>

	S		S

>	S	>	S

	1.	$(p_7 \vee p_1)$	
	2.	$(p_7 \rightarrow p_8)$	
	3.	$(p_1 \rightarrow (p_8 \wedge p_9))$	
	4.	p_7	
	5.	p_8	\rightarrow Elim: 4, 2
	6.	p_1	
	7.	$(p_8 \wedge p_9)$	\rightarrow Elim: 6, 3
	8.	p_8	\wedge Elim: 7
	9.	p_8	\vee Elim: 1, 4-5, 6-8

	1.	$(p_1 \vee p_3)$	
	2.	$(p_1 \rightarrow p_8)$	
	3.	p_1	
	4.	p_8	\rightarrow Elim: 3, 2
	5.	p_3	
	6.	p_8	
	7.	p_8	Reit: 6
	8.	p_8	r \vee Elim. 1, 3-4, 5-7 f!

• **Disjunktionseinführung (\vee Intro):**

A	A
...	...
> (A \vee B)	> (B \vee A)

1. (p ₁ \rightarrow p ₃)	
2. p ₁	
3. p ₃	\rightarrow Elim: 1, 2
4. (p ₃ \vee p ₇₇)	\vee Intro: 3

• **\wedge -Einführung (\wedge Intro):**

A
...
\neg A
...
> \perp

1. (p ₅ \rightarrow p ₂)	
2. (p ₅ \rightarrow \neg p ₂)	
3. p ₅	
4. p ₂	\rightarrow Elim: 3, 1
5. \neg p ₂	\rightarrow Elim: 3, 2
6. \perp	\perp Intro: 4, 5

1. (p ₅ \rightarrow p ₂)	
2. p ₅	
3. p ₂	\rightarrow Elim: 1, 2
4. (\neg p ₂ \wedge p ₄)	
5. \neg p ₂	\wedge Elim: 4
6. \perp	r \perp Intro: 3, 5 f!

• **\wedge -Beseitigung (\wedge Elim):**

\perp
...
> A

1. (p ₅ \rightarrow p ₂)	
2. (p ₅ \rightarrow \neg p ₂)	
3. p ₅	
4. p ₂	\rightarrow Elim: 3, 1
5. \neg p ₂	\rightarrow Elim: 3, 2
6. \perp	\perp Intro: 4, 5
7. p ₂₈	\perp Elim: 6

· **Negationsbeseitigung (\emptyset Elim):**

$$\begin{array}{l} | \neg\neg A \\ | \dots \\ > | A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} | 1. \neg\neg p_1 \\ | 2. (p_1 \rightarrow p_5) \\ | 3. p_1 \\ | 4. p_5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \neg \text{Elim: } 1 \\ \rightarrow \text{Elim: } 3, 2 \end{array}$$

· **Negationseinführung (\emptyset Intro):**

$$\begin{array}{l} | \quad | \underline{A} \\ | \quad | \dots \\ | \quad | \perp \\ > | \neg A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} | 1. (p_6 \rightarrow p_7) \\ | 2. \neg p_7 \\ | \quad | 3. p_6 \\ | \quad | 4. p_7 \\ | \quad | 5. \perp \\ | 6. \neg p_6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Elim: } 3, 1 \\ \perp \text{Intro: } 2, 4 \\ \neg \text{Intro: } 3-5 \end{array}$$

· **Konditionaleinführung (\textcircled{R} Intro):**

$$\begin{array}{l} | \quad | \underline{A} \\ | \quad | \dots \\ | \quad | B \\ | \dots \\ > | (A \rightarrow B) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} | 1. (p_{33} \wedge p_4) \\ | \quad | 2. p_7 \\ | \quad | 3. p_4 \\ | \quad | 4. (p_4 \vee p_5) \\ | 5. (p_7 \rightarrow (p_4 \vee p_5)) \end{array} \quad \begin{array}{l} \wedge \text{Elim: } 1 \\ \vee \text{Intro: } 3 \\ \rightarrow \text{Intro: } 2-4 \end{array}$$

(A → B)	A
...	...
A	(A → B)
...	...
> B	> B

1. p ₁	
2. (p ₁ → p ₄)	
3. p ₄	→ Elim: 1, 2

· **Bikonditionaleinführung (« Intro):**

	A		A

	B		B

	B		B

	A		A

> (A ↔ B)		> (B ↔ A)	

1. (p ₂ → p ₁)		
2. (p ₁ → (p ₂ ∧ p ₃))		
	3. p ₂	
	4. p ₁	→ Elim: 3, 1
	5. p ₁	
	6. (p ₂ ∧ p ₃)	→ Elim: 5, 2
	7. p ₂	∧ Elim: 6
8. (p ₁ ↔ p ₂)		↔ Intro: 3-4, 5-7

· **Bikonditionalbeseitigung (« Elim):**

(A ↔ B)	(A ↔ B)
...	...
A	B
...	...
> B	> A

1. (p ₁ ↔ p ₂)	
2. p ₁	
3. p ₂	↔ Elim: 2, 1

· **Reiteration (Reit):**

| A
| ...
> | A

| 1. p_3
| 2. $(p_1 \vee p_3)$
| 3. $(p_5 \leftrightarrow p_3)$
| 4. p_5 \leftrightarrow Elim: 1, 3
| 5. p_5 Reit: 4

| 1. $(p_6 \rightarrow p_7)$
| 2. $\neg p_7$
| | | 3. p_6
| | 4. $(p_6 \rightarrow p_7)$ Reit: 1
| | 5. p_7 \rightarrow Elim: 3, 4
| | 6. \perp \perp Intro: 2, 5
| 7. $\neg p_6$ \neg Intro: 3-6

7 Faustregeln

1. Angenommen, Sie versuchen, eine Satzform der Gestalt $(A \rightarrow B)$ abzuleiten: Nehmen Sie A an (öffnen Sie einen Unterbeweis mit der Annahme A), und versuchen Sie dann, B abzuleiten.
2. Angenommen, Sie versuchen, eine Satzform der Gestalt $\neg A$ abzuleiten: Nehmen Sie A an (öffnen Sie einen Unterbeweis mit der Annahme A), und versuchen Sie dann, einen Widerspruch bzw. \perp abzuleiten.
3. Angenommen, Sie versuchen eine Satzform der Gestalt $(A \wedge B)$ bzw. $(A \leftrightarrow B)$ abzuleiten: Versuchen Sie A und B bzw. $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ abzuleiten, um dann mit Hilfe der entsprechenden Einführungsregel das gewünschte Resultat zu erreichen.
4. Seien Sie vorsichtig bei dem Versuch, Satzformen der Gestalt $(A \vee B)$ direkt mit Hilfe der Regel für die Disjunktionseinführung abzuleiten. Oftmals müssen solche Satzformen mit Hilfe der Regel für die Negationsbeseitigung aus $\neg\neg(A \vee B)$, mit Hilfe der Regel für die Disjunktionsbeseitigung oder mit Hilfe einer anderen Beseitigungsregel abgeleitet werden.
5. Angenommen, unter den Annahmen befindet sich eine Satzform der Gestalt $(A \vee B)$: Wenden Sie auf diese Satzform die Regel für die Disjunktionsbeseitigung an, um die gewünschte Satzform abzuleiten (es sei denn, es gibt eine einfachere Alternative).
6. Nutzen Sie immer die Möglichkeit, Beseitigungsregeln anzuwenden, etwa wenn Sie zwei Satzformen der Gestalt A und $(A \rightarrow B)$ oder eine Satzform der Gestalt $(A \wedge B)$ haben (es sei denn, es gibt eine einfachere Alternative).
7. Allgemein gilt: Arbeiten Sie beim Erstellen einer schwierigen Ableitung sowohl vom Anfang der Ableitung (den Annahmen) als auch vom Ende der Ableitung (der Konklusion) hin zur Mitte, und versuchen Sie beide 'Stränge' zusammenzuführen. Wenden Sie dabei einerseits die Beseitigungsregeln auf die Satzformen an, die am Anfang der Ableitung stehen, und schließen Sie andererseits mit Hilfe der Einführungsregeln darauf zurück, aus welchen Satzformen die Satzformen am Ende der Ableitung gewonnen werden können.

(Thomason, Richard H.: "Symbolic Logic. An Introduction", 1. Aufl., S.46)