

Die 7 Faustregeln

(aus Thomason, Richmond H.: "Symbolic Logic. An Introduction", S. 46)

1. Angenommen, Sie versuchen, eine Satzform der Gestalt $(A \rightarrow B)$ abzuleiten: Nehmen Sie A an (öffnen Sie einen Unterbeweis mit der Annahme A), und versuchen Sie dann, B abzuleiten.

Beispiel:

1. $(p_1 \rightarrow p_2)$	
<u>2.</u> p_3	
<u>3.</u> p_1	
<u>4.</u> p_4	
<u>5.</u> p_2	\rightarrow Elim: 3, 1
<u>6.</u> $(p_4 \rightarrow p_2)$	\rightarrow Intro: 4-5
<u>7.</u> $((p_4 \rightarrow p_2) \wedge p_3)$	\wedge Intro: 6, 2
<u>8.</u> $(p_1 \rightarrow ((p_4 \rightarrow p_2) \wedge p_3))$	\rightarrow Intro: 3-7

2. Angenommen, Sie versuchen, eine Satzform der Gestalt $\neg A$ abzuleiten: Nehmen Sie A an (öffnen Sie einen Unterbeweis mit der Annahme A), und versuchen Sie dann, einen Widerspruch bzw. \perp abzuleiten.

Beispiel:

1. $(p_1 \rightarrow \neg p_2)$	
<u>2.</u> $(\neg p_2 \rightarrow \neg p_3)$	
<u>3.</u> $(p_1 \wedge p_3)$	
4. p_1	\wedge Elim: 3
5. $\neg p_2$	\rightarrow Elim: 4, 1
6. $\neg p_3$	\rightarrow Elim: 6, 2
7. p_3	\wedge Elim: 3
8. \perp	\perp Intro: 6, 7
<u>9.</u> $\neg(p_1 \wedge p_3)$	\neg Intro: 3-8

3. Angenommen, Sie versuchen eine Satzform der Gestalt $(A \wedge B)$ bzw. $(A \leftrightarrow B)$ abzuleiten: Versuchen Sie A und B bzw. $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ abzuleiten, um dann mit Hilfe der entsprechenden Einführungsregel das gewünschte Resultat zu erreichen.

Beispiel:

<u>1.</u>				
	<u>2.</u> $(p_1 \rightarrow p_2)$			
		<u>3.</u> $\neg p_2$		
			<u>4.</u> p_1	
			<u>5.</u> p_2	\rightarrow Elim: 4, 2
			<u>6.</u> \perp	\perp Intro: 3, 4
			<u>7.</u> $\neg p_1$	\neg Intro: 4-6
			<u>8.</u> $(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$	\rightarrow Intro: 3-7
			<u>9.</u> $(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$	
			<u>10.</u> p_1	
			<u>11.</u> $\neg p_2$	
			<u>12.</u> $\neg p_1$	\rightarrow Elim: 11, 9
			<u>13.</u> \perp	\perp Intro: 10, 12
			<u>14.</u> $\neg\neg p_2$	\neg Intro: 11-13
			<u>15.</u> p_2	\neg Elim: 14
			<u>16.</u> $(p_1 \rightarrow p_2)$	\rightarrow Intro: 10-15
			<u>17.</u> $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1))$	\leftrightarrow Intro: 2-8, 9-16

4. Seien Sie vorsichtig bei dem Versuch, Satzformen der Gestalt $(A \vee B)$ direkt mit Hilfe der Regel für die Disjunktionseinführung abzuleiten. Oftmals müssen solche Satzformen mit Hilfe der Regel für die Negationsbeseitigung aus $\neg\neg(A \vee B)$, mit Hilfe der Regel für die Disjunktionbeseitigung oder mit Hilfe einer anderen Beseitigungsregel abgeleitet werden.

Beispiel:

<u>1.</u>			
	<u>2.</u> $\neg(p_1 \vee \neg p_1)$		
		<u>3.</u> p_1	
		<u>4.</u> $(p_1 \vee \neg p_1)$	\vee Intro. 3
		<u>5.</u> \perp	\perp Intro: 2, 4
		<u>6.</u> $\neg p_1$	\neg Intro: 3-5
		<u>7.</u> $(p_1 \vee \neg p_1)$	\vee Intro: 6
		<u>8.</u> \perp	\perp Intro: 2, 7
		<u>9.</u> $\neg\neg(p_1 \vee \neg p_1)$	\neg Intro: 2-8
		<u>10.</u> $(p_1 \vee \neg p_1)$	\neg Elim: 9

5. Angenommen, unter den Annahmen befindet sich eine Satzform der Gestalt $(A \vee B)$: Wenden Sie auf diese Satzform die Regel für die Disjunktionsbeseitigung an, um die gewünschte Satzform abzuleiten (es sei denn, es gibt eine einfachere Alternative).

Beispiel:

1. $(p_1 \rightarrow p_2)$	
2. $((p_1 \wedge p_3) \vee p_4)$	
<u>3.</u> $\neg(p_4 \wedge \neg p_5)$	
<u>4.</u> $(p_1 \wedge p_3)$	
5. p_1	\wedge Elim: 4
6. p_2	\rightarrow Elim: 5, 1
7. $(p_2 \vee p_5)$	\vee Intro: 6
<u>8.</u> p_4	
<u>9.</u> $\neg p_5$	
10. $(p_4 \wedge \neg p_5)$	\wedge Intro: 8, 9
11. \perp	\perp Intro: 3, 10
12. $\neg\neg p_5$	\neg Intro: 9-11
13. p_5	\neg Elim: 12
14. $(p_2 \vee p_5)$	\vee Intro: 13
15. $(p_2 \vee p_5)$	\vee Elim: 2, 4-7, 8-14

6. Nutzen Sie immer die Möglichkeit, Beseitigungsregeln anzuwenden, etwa wenn Sie zwei Satzformen der Gestalt A und $(A \rightarrow B)$ oder eine Satzform der Gestalt $(A \wedge B)$ haben (es sei denn, es gibt eine einfachere Alternative).
7. Allgemein gilt: Arbeiten Sie beim Erstellen einer schwierigen Ableitung sowohl vom Anfang der Ableitung (den Annahmen) als auch vom Ende der Ableitung (der Konklusion) hin zur Mitte, und versuchen Sie beide 'Stränge' zusammenzuführen. Wenden Sie dabei einerseits die Beseitigungsregeln auf die Satzformen an, die am Anfang der Ableitung stehen, und schließen Sie andererseits mit Hilfe der Einführungsregeln darauf zurück, aus welchen Satzformen die Satzformen am Ende der Ableitung gewonnen werden können.

Übungsaufgaben

1. $\{(p_1 \vee p_3), (p_1 \rightarrow p_2), (p_3 \rightarrow p_2)\} \vdash \neg\neg p_2$

1. $(p_1 \vee p_3)$	
2. $(p_1 \rightarrow p_2)$	
<u>3.</u> $(p_3 \rightarrow p_2)$	
<u>4.</u> p_1	
5. p_2	\rightarrow Elim: 4, 2
<u>6.</u> p_3	
7. p_2	\rightarrow Elim: 6, 3
8. p_2	\vee Elim: 1, 4-5, 6-7
<u>9.</u> $\neg p_2$	
10. \perp	\perp Intro: 8, 9
11. $\neg\neg p_2$	\neg Intro: 9-10

2. $\{((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)), \neg p_3\} \vdash \neg p_1$

1. $(p_1 \rightarrow p_2)$	
2. $(p_2 \rightarrow p_3)$	
<u>3.</u> $\neg p_3$	
<u>4.</u> p_1	
5. p_2	\rightarrow Elim: 4, 1
6. p_3	\rightarrow Elim: 5, 2
7. \perp	\perp Intro: 3, 6
8. $\neg p_1$	\neg Intro: 4-7

3. $\{(\neg p_1 \vee p_2)\} \vdash (p_1 \rightarrow p_2)$

<u>1.</u> $(\neg p_1 \vee p_2)$	
<u>2.</u> p_1	
<u>3.</u> $\neg p_1$	
4. \perp	\perp Intro: 2, 3
5. p_2	\perp Elim: 4
<u>6.</u> p_2	
7. p_2	Reit: 6 [Zeile 7 könnte auch ausgelassen werden]
8. p_2	\vee Elim: 1, 3-5, 6-7
9. $(p_1 \rightarrow p_2)$	\rightarrow Intro: 2-8