Aufgabenblatt PS Einführung in die Logik II SS 02 Blatt 3

Schreiben Sie folgende Angaben in der angegebenen Reihenfolge in die Kopfzeile Ihres Lösungsblattes:
Matrikelnummer / Name / Vorname / Geschlecht

Aufgabe 1: Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition (s. S.122), dass die folgenden Ausdrücke prädikatenlogische Satzformen sind. (Sie können sich dabei an den vorgestellten Termkalkül halten)

1. $(R^1{}_1a_1 \rightarrow \exists x_1R^1{}_1x_1)$
2. $\forall x_1\exists x_2\exists x_3\forall x_4R^6{}_1a_1x_4x_3x_2x_1a_5$
3. $\forall x_1\forall x_2(R^2{}_1x_1x_2 \rightarrow \exists x_3(R^2{}_1x_1x_3 \wedge R^2{}_1x_3x_2))$

Beispiellösung für " "$x_1(R^1{}_1x_1$ ® $R^1{}_2x_1$)" im Termkalkül:

(1)	$R^1{}_1a_1$	(i)
(2)	$R^1{}_2a_1$	(i)
(3)	$(R^1{}_1a_1 \rightarrow R^1{}_2a_1)$	(ii), (1), (2)
(4)	$\forall x_1(R^1{}_1x_1 \rightarrow R^1{}_2x_1)$	(iii), (3), ["a_1"/"x_1"]

Aufgabe 2: Übertragen Sie die erste Satzform in die polnische Notation, die zweite in unsere Standardnotation:

1. $((p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge \neg(p_3 \wedge \neg\neg\neg(p_5 \rightarrow p_7)))$
2. $Cp_1KNp_2Cp_3KNp_4p_5$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind, indem Sie entsprechende Ableitungen im Fitch-System erstellen.

1. "$(R^2{}_1a_1a_1 \wedge R^2{}_1a_2a_2)$" ist aus $\{\forall x_1\forall x_2\, R^2{}_1x_1x_2\}$ ableitbar.
2. "$\exists x_1\neg R^1{}_2x_1$" ist aus $\{\neg R^1{}_1a_1, \forall x_1\,(R^1{}_2x_1 \rightarrow R^1{}_1x_1)\}$ ableitbar.
3. "$\neg\exists x_1R^1{}_1x_1$" ist aus $\{\forall x_1\neg R^1{}_1x_1\}$ ableitbar.
4. "$\forall x_1(\neg R^1{}_3x_1 \rightarrow \neg R^1{}_1x_1)$" ist aus $\{\forall x_1(R^1{}_1x_1 \rightarrow R^1{}_2x_1), \forall x_1(\neg R^1{}_3x_1 \rightarrow \neg R^1{}_2x_1)\}$ ableitbar.

Aufgabe 4: Wir beziehen uns auf die Menge N der natürlichen Zahlen als Individuenbereich. Betrachten Sie die die Satzform D aus Aufgabe 1.3: $\forall x_1\forall x_2(R^2{}_1x_1x_2 \rightarrow \exists x_3(R^2{}_1x_1x_3 \wedge R^2{}_1x_3x_2))$

1. Sei J eine Interpretation, in der "$R^2{}_1$" die kleiner-als-Relation zugewiesen wird (d.h. die Menge aller geordneten Paare, in denen die erste Koordinate kleiner als die zweite ist). Erfüllt J D? Wenn nein, erläutern Sie Ihre Antwort. Wenn ja, zeigen Sie dass J D erfüllt. (Es gelte $J(a_i) = i$, für alle i.)
2. Sei J eine Interpretation, in der "$R^2{}_1$" die Identitätsrelation zugewiesen wird (d.h. die Menge aller geordneten Paare, in denen die erste Koordinate mit der zweiten identisch ist). Erfüllt J D? Wenn nein, erläutern Sie Ihre Antwort. Wenn ja, zeigen Sie dass J D erfüllt. (Es gelte $J(a_i) = i$, für alle i.)

Aufgabe 5: Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die prädikatenlogische Sprache aus dem Buch. Machen Sie dabei deutlich, für welche natürlichsprachlichen Ausdrücke die Relationsbuchstaben jeweils stehen sollen. (*Kontrollmöglichkeit*: Für die Satzformen, die diesen Sätzen in *Tarski's World* entsprechen, gilt: In "Bolzano's World" sind alle Satzformen wahr, in "Ron's World" (3) und (4), in "Claire's World" (2) und (4) und in "Peano's World" ist nur (3) wahr)

1. Jeder Würfel liegt zwischen zwei Objekten.
2. Jeder Würfel, hinter dem etwas liegt, ist klein.
3. Jeder Dodekaeder, zu dessen rechter Seite nichts liegt, ist klein.
4. Jeder Dodekaeder ist groß, der zur Linken eines Würfels liegt.

Aufgabe 6: Zeigen Sie mit Hilfe von *Tarski's World*, dass die Satzform "$\forall x\forall y$ ((Cube(x) $\wedge$ Cube(y)) $\rightarrow$ SameSize(x, y))" *nicht* aus der Menge {$\forall x$ (Tet(x) $\rightarrow$ (Medium(x) $\vee$ Large(x))), $\exists x$ (Tet(x) $\wedge$ (Small(x) $\vee$ $\exists y$ (Cube(y) $\wedge$ SameSize(x, y)))), $\exists x$ (Cube(x) $\wedge$ Small(x))}.
Hinweis: Sie können Ihre Lösungswelt ausdrucken, zeichnen oder beschreiben.

Aufgabe 7: Betrachten Sie "König's World".

1. Übersetzen Sie folgende Sätze der natürlichen Sprache in die Sprache von Tarski's World.
(a) Es gibt keinen großen Dodekaeder, der links von irgendeinem Würfel liegt.
(b) Alle Würfel liegen zwischen einem Tetraeder und einem Dodekaeder.

2. Geben Sie eine Interpretation an, unter der die folgenden Satzformen wahr sind, und die durch "Königs World" veranschaulicht wird.
(a) $\neg\exists x_1 (R^1{}_1 x_1 \wedge R^1{}_2 x_1)$
(b) $\forall x_1 (R^1{}_1 x_1 \rightarrow \exists x_2 (R^1{}_3 x_2 \wedge R^2{}_1 x_2 x_1))$

Abgabetermin: 27.06.2002