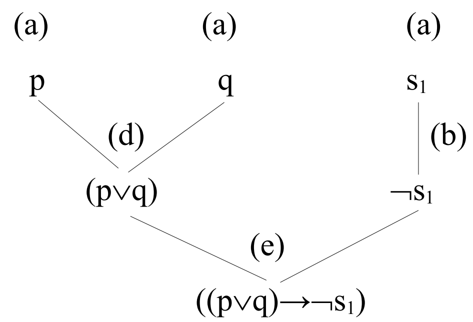
Janine Reinert
reinert@phil-fak.uni-duesseldorf.de

Selbsttest Logik I: Aussagenlogik

1. Sind die folgenden Zeichenkombinationen wohlgeformt? Wenn ja, so zeichnen Sie den entsprechenden Strukturbaum. Falls nicht, markieren Sie alle Fehler! Wenn Sie sich unsicher sind, diskutieren Sie kurz, was für und was gegen Wohlgeformtheit spricht.

(a) $((p \vee q) \rightarrow \neg s_1)$ [1P.]

wohlgeformt!



(b) $\neg\neg\underline{(}\neg(\neg\neg r \vee (p \wedge r_2))\underline{)}$ [1P.]

nicht wohlgeformt: bei Anwendung von Formregel (b) werden keine Klammern eingeführt.

(c) $\neg\neg\neg\neg\underline{rs} \wedge q_5$ [1P.]

nicht wohlgeformt: kein Junktor zwischen „r” und „s”.

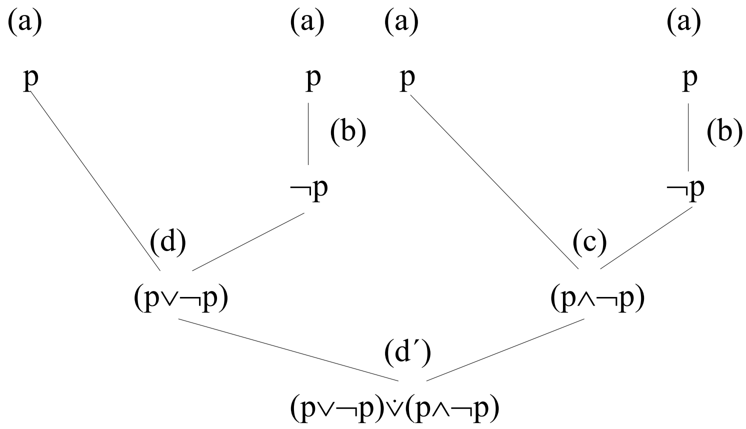
(d) $(p \vee \neg p) \dot{\vee} (p \wedge \neg p)$ [1P.]

mehrere Antwortmöglichkeiten:

1.) *Nicht wohlgeformt*, sofern wir uns strikt an die vereinbarten Formregeln (a)-(f) halten, da keine der Regeln (a)-(e) die Einführung von „$\dot{\vee}$” gestattet, und (f) besagt, dass jede Zeichenreihe, die nicht durch (a)-(e) konstruiert wurde, nicht wohlgeformt ist. Zudem fehlt die äußere Klammerung (was allerdings in Ordnung ist, sofern die Ersparnisregel für äußere Klammern gilt)

Man könnte allerdings folgendermaßen für Wohlgeformtheit argumentieren:

2.) *wohlgeformt*, sofern die Ersparnisregel für äußere Klammern gilt und wir „∨̇” als zusätzlichen Junktor zulassen wollen. Als definierter Junktor dient „∨̇” stets als „Abkürzung” für eine gemäß (a)-(f) wohlgefomte, komplexere Aussage (siehe Skript S. 29) – auch wenn keine unserer vereinbarten Formregeln (a)-(f) seine Einführung erlaubt, so ließe sich eine solche Regel einfach definieren (z.B. als (d´), in Anlehnung an (d)).
Der Strukturbaum wäre dann folgender:



[4P.]

2. Stellen Sie Wahrheitstafeln für folgende Aussagen/ Schlüsse auf (Sie brauchen bloß die relevanten Spalten einzutragen, können die Tafeln aber auch vollständig ausfüllen!). Geben Sie den logischen Status der betreffenden Aussage bzw. des Schlusses an und begründen Sie Ihr Urteil kurz.

(a) p∨¬q [2P.]
r→¬p
¬r∨¬q

p	q	r	p ∨ ¬ q	r → ¬ p	¬ r ∨ ¬ q	
w	w	w		w f f w	f	✓
w	w	f			w	✓
w	f	w			w	✓
w	f	f			w	✓
f	w	w	f f f w	w w f	f	✓
f	w	f			w	✓
f	f	w			w	✓
f	f	f			w	✓

Der Schluss ist *gültig*: In keiner Zeile der Wahrheitstafel ist die Konklusion bei wahren Prämissen falsch (äquivalent formuliert: Wann immer die Konklusion falsch ist, so ist auch mindestens eine der Prämissen falsch).

(b) (q→p)→((¬q∨p)∧(¬p→¬q)) [2P.]

p	q	(q	→	p)	→	((¬	q	∨	p)	∧	(¬	p	→	¬	q))
w	w		w		<u>w</u>			w		w			w	f	
w	f		w		<u>w</u>			w		w			w	w	
f	w		f		<u>w</u>			f		f	w		f	f	
f	f		w		<u>w</u>			w		w			w	w	

Die Aussage ist *logisch wahr*, d.h. wahr unter jeder Interpretation ihrer Aussagevariablen.

(c) r ∴ (p∨¬p)∨s [1P.]

Die Wahrheitstafel erübrigt sich hier eigentlich: *Der Schluss muss gültig sein, denn eins der Disjunkte der Konklusion (p∨¬p) ist offenkundig logisch wahr. Daher ist auch die gesamte Disjunktion, also die Konklusion selbst, logisch wahr*. Es kann daher nicht der Fall eintreten, dass die Konklusion bei wahren Prämissen falsch ist. Logische Wahrheit folgt also aus beliebigem; (man sagt dafür auch: *verum ex quodlibet sequitur*; vgl S. 71 im Skript). (Eine Wahrheitstafel anzufertigen ist natürlich dennoch kein Fehler!)

(d) $(r_1 \rightarrow t_2) \wedge \neg(\neg r_1 \vee t_2)$ [1P.]

r_1	t_2	$(r_1$	$\rightarrow$	$t_2)$	$\wedge$	$\neg$	$(\neg$	r_1	$\vee$	$t_2)$
w	w		w		<u>f</u>	f			w	
w	f		f		<u>f</u>	w			f	
f	w		w		<u>f</u>	f			w	
f	f		w		<u>f</u>	f			w	

logisch falsch, d.h. falsch unter jeder Wahrheitswertzuordnung/ in jeder Zeile.

[6P.]

3. Überprüfen Sie folgende Aussagen bzw. Schlüsse per *Reductio ad absurdum*-Methode vollständig (!) auf ihren logischen Status.

(a) (p∧r)→((s∨r)∨(p∨s)) [1P.]

<u>(p ∧ r)→((s ∨ r) ∨ (p ∨ s))</u>

w w w f f f f f f f f ↯ *logisch wahr*

(b) ((p→q)→s)→(p→s) [2P.]

((p	→	q)	→	s)	→	(p	→	s)	
w	w_1	w	w	f	f	w	f	f	↯
w	f_1	f	w	f	f	w	f	f	

konsistente Zeile erreicht: *nicht log. wahr*

((p	→	q)	→	s)	→	(p	→	s)
w_1					w	w		
f_1	w				w	f	w	w_2
f	w		f	f	w	f	w	f_2

konsistente Zeile erreicht (unabhängig vom Wahrheitswert von q!): *nicht logisch falsch*
Daher ist die Aussage *kontingent.*

(c) (t∨r)→(r→t) [2P.]

(t	∨	r)	→	(r	→	t)
f	w	w	f	w	f	f

konsistente Zeile erreicht: *nicht log. wahr*

(t	∨	r)	→	(r	→	t)
w_1	w		w		w	w
f_1			w			

konsistente Zeile erreicht (unabhängig vom Wahrheitswert von r!): *nicht log falsch*
Daher ist die Aussage *kontingent.*

4. Beweisen Sie folgende Schlüsse/ Theoreme in unserem Kalkül des natürlichen Schließens **S**! (Achtung: In der Klausur wird auch verlangt werden, dass Sie die entsprechenden Strukturbäume zeichnen können!).

(a) $\neg p \vee s, \neg s \vee r, r \rightarrow q \therefore p \rightarrow (p \wedge q)$ [2P.]

(1)	$\neg p \vee s$	Präm
(2)	$\neg s \vee r$	Präm
(3)	$r \rightarrow q$	Präm
(4)	[p]	KB-Ann.
(5)	$\neg\neg p$	(4) DN
(6)	s	(1) (5) DS
(7)	$\neg\neg s$	(6) DN
(8)	r	(2) (7) DS
(9)	q	(3) (8) MP
(10)	$p \wedge q$	(4) (9) KON
(11)	$p \rightarrow (p \wedge q)$	KB (4)-(10)

(b) $p \vee q, s \therefore ((p \vee r) \wedge s) \vee (s \wedge q)$ [2P.]

(1)	$p \vee q$	Präm
(2)	s	Präm
(3)	[p]	FU-Ann.
(4)	$p \vee r$	(3) ADD
(5)	$(p \vee r) \wedge s$	(2) (4) KON
(6)	$((p \vee r) \wedge s) \vee (s \wedge q)$	(5) ADD
(7)	[¬p]	FU-Ann.
(8)	q	(1) (7) DS
(9)	$s \wedge q$	(2) (8) KON
(10)	$((p \vee r) \wedge s) \vee (s \wedge q)$	(9) ADD
(11)	$((p \vee r) \wedge s) \vee (s \wedge q)$	FU (3)-(6), (7)-(9)

(c) $\neg s \lor (p \to q) \therefore s \to \neg(p \land \neg q)$ [3P.]

(1)	$\neg s \lor (p \to q)$	Präm
(2)	s	KB-Ann.
(3)	$\neg\neg s$	(2) DN
(4)	$p \to q$	(1) (3) DS
(5)	$\neg\neg(p \land \neg q)$	IB-Ann.
(6)	$p \land \neg q$	(5) DN
(7)	p	(6) SIMP
(8)	q	(4) (7) MP
(9)	$\neg q$	(6) SIMP
(10)	$q \land \neg q$	(8) (9) KON
(11)	$\neg(p \land \neg q)$	IB (5)-(9)
(12)	$s \to \neg(p \land \neg q)$	KB (2)-(10)

(d) $\varnothing \therefore \neg(p \land q) \lor (q \lor p)$ [3P.] [10P.]

(1)	[p]	FU-Ann.
(2)	$q \lor p$	(1) ADD
(3)	$\neg(p \land q) \lor (q \lor p)$	(2) ADD
(4)	$[\neg p]$	FU-Ann.
(5)	$[\neg\neg(p \land q)]$	IB-Ann.
(6)	$p \land q$	(5) DN
(7)	p	(6) SIMP
(8)	$p \land \neg p$	(4) (7) KON
(9)	$\neg(p \land q)$	IB (5)-(8)
(10)	$\neg(p \land q) \lor (q \lor p)$	(9) ADD
(11)	$\neg(p \land q) \lor (q \lor p)$	FU (1)-(3), (4)-(10)

Abschließend ein paar Anmerkungen:

- Bei diesem *Selbsttest* handelt es sich *nicht um eine Probeklausur*: eine solche finden Sie auf der Homepage von Prof. Schurz. Die Aufgaben hier habe ich so zusammengestellt, dass Sie selbst überprüfen können, wo Ihre Stärken und Schwächen liegen.
- Die Angaben zur Punktanzahl dienen eben diesem Zwecke: erreichen Sie insgesamt weniger als 60%, so sollten Sie dringend das Thema Aussagenlogik wiederholen. Dasselbe gilt für die einzelnen Teilaufgaben: Erreichen Sie bei einer der Teilaufgaben unter 60% empfehle ich, die entsprechende Passage im Skript nochmals gründlich durchzuarbeiten.
- Die hier gestellten Aufgaben sind weder von Prof. Schurz gutgeheißen noch kontrolliert worden. *Rückschlüsse auf die Struktur der anstehenden Logikklausur sind daher unzulässig! Um eine Vorstellung von der offiziellen Klausur zu bekommen sei erneut auf die Probeklausur von Prof. Schurz verwiesen.*
- Ebenso können sich Fehler in die Musterlösung eingeschlichen haben, auch wenn ich hoffe, sie eliminiert zu haben. Falls Ihnen Fehler auffallen, bitte ich um eine kurze Email an obige Adresse. Gleiches gilt, wenn Sie Fragen zu den hier gestellten Aufgaben haben.