Florian Boge, Matr.-Nr. 1725928 11.05.2010

Gödels erstes Unvollständigkeitstheorem und das Auseinanderfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit

Eine Hausarbeit von Florian Boge
zum Seminar
Gödels Unvollständigkeitstheoreme
Von apl. Prof. Dr. Manuel Bremer

Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf Wintersemester 2009/10

Inhalt

<u>Einleitung</u>

‚Dieser Satz ist nicht beweisbar', so lautet der natürlichsprachliche Gehalt des Gödel-Satzes (kurz: *G*), der in seiner arithmetischen Interpretation zeigt, dass bestimmte arithmetische Systeme nicht *negationsvollständig* sind, also nicht über den Wahrheitswert jedes Satzes ihrer Sprache entscheiden können (Vgl. Smith 2007, 2). Doch die Implikationen des dazugehörigen Theorems gehen über die bloße Feststellung der Negationsunvollständigkeit von Systemen wie der Peano Arithmetik erster Ordnung (kurz: *PA*) hinaus. Eine dieser Implikationen ist die Feststellung, dass arithmetische Wahrheit und Beweisbarkeit nicht zusammenfallen können, da Gödel mit seinem ersten Unvollständigkeitstheorem gezeigt hat, dass *G* einen *PA*-wahren Satz darstellt, der aber in *PA* nicht beweisbar ist.

Welche Konsequenzen müssen wir aber aus dieser Tatsache und der, dass auch jede Erweiterung von *PA* (also jedes System *S*, für das gilt: $PA \subset S$) dieses Problem hat, ziehen? Sollten wir davon ausgehen, dass unsere arithmetischen Systeme unzureichend sind, um alle Wahrheiten über abstrakte mathematische Entitäten zu erfassen? Oder sollten wir unsere Logik entsprechend anpassen, um zu vermeiden, dass es (zusätzlich zu den Axiomen) wahre Sätze eines Systems geben kann, die nicht in ihm beweisbar sind?

Ich möchte mich in dieser Arbeit mit diesen Fragen auseinandersetzen und versuchen zu erörtern, welche Ansätze ich für sinnvoll halte und warum. Dafür wird es zunächst notwendig sein, Gödels erstes Unvollständigkeitstheorem zu erklären um damit die Relevanz von *G* für *PA* aufzuzeigen. Dies soll auf Basis der Rekonstruktion von Peter Smith (2007) geschehen. Darüber hinaus werde ich noch die weiteren technischen Gründe nennen, die Smith anführt um zu zeigen, dass Wahrheit und Beweisbarkeit auseinanderfallen.

Anschließend wird es interessant sein, Vorschläge zum Umgang mit der skizzierten Problematik anzusehen und zu diskutieren inwiefern diese als erfolgreich angesehen werden dürfen, bzw. mit welchen eigenen Problemen sie konfrontiert sind.

Zuletzt will ich mich dabei in Grundzügen mit den Ideen des Intuitionismus und des Dialethismus auseinandersetzen, da diese Ansätze in gewisser Weise als Lösungsvorschläge zu dem hier skizzierten Problem des Auseinanderfallens von mathematischer Wahrheit und deren Beweisbarkeit angesehen werden können.

1. Die technische Herleitung des Problems

In seinem Buch *An Introduction to Gödel's Theorems* von 2007 stellt Peter Smith in detaillierter Weise dar, welche Voraussetzungen für das Zustandekommen von Gödels Unvollständigkeitstheoremen gegeben sein müssen und wie diese funktionieren. Ich werde mich in dieser Arbeit ausschließlich mit dem ersten Unvollständigkeitstheorem auseinandersetzen, da diese völlig hinreichend für die Herleitung unseres Problems ist. Wie bereits erwähnt, beziehen sich Gödels Theoreme zunächst auf arithmetische Systeme, vor allem *PA*. Sehen wir uns daher zu allererst einmal an, was ein arithmetisches System ausmacht und welche Axiome *PA*[1] hat.

1.1. Die Peano Arithmetik

Unter einer Arithmetik verstehen wir im Allgemeinen zunächst nichts anderes als eine *Rechentheorie*. Das *Lexikon der Mathematik* vom Spektrum Verlag definiert Arithmetik wie folgt:

> „Arithmetik, in klassischer Sichtweise dasjenige Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Rechnen mit Zahlen bzw. Variablen befasst. Unter „Rechnen" versteht man hierbei meist die Grundrechenarten." (Walz 2003, 412)

Eine Arithmetik ist also zunächst nichts weiter als eine Theorie darüber, wie Zahlen mittels Rechenoperationen mit einander kombinierbar sind. Die denkbar einfachste arithmetische Theorie nennt man auch *Baby Arithmetik* (Vgl. Smith 2007, 51 ff.) oder kurz: *BA*. Eine *BA* beinhaltet nichts weiter als aussagenlogische Junktoren, Klammern, freie Variablen und darüber hinaus ‚0' als eine Konstante (die dem Wert *null* entspricht), sowie die einstellige Nachfolgerfunktion **S** (die den direkten Nachfolger für jeden Wert liefert, also **S**0 = 1, **S**1 = 2 usw.) und die beiden zweistelligen Funktionen ‚+' und ‚×' (deren Standardinterpretation Addition und Multiplikation sind).

In dieser Art von Arithmetik lassen sich alle natürlichen Zahlen (inklusive Null) mittels Reihungen von **S** (mit i Vorkommen von **S** für $0 \leq i \leq n$) an deren Ende ‚0' auftaucht, darstellen. Darüber hinaus lassen sich diverse Grundrechenoperationen mit Hilfe von sechs Schemata

[1] Ich werde mich mit den Abkürzungen für Arithmetiken wahlweise auf die Arithemtik als Ganzes oder auf das zugrundeliegende System beziehen. Deshalb werden die Abkürzungen je nach Kontext mit oder ohne definiten Artikel auftauchen.

und der Instanziierung der darin verwendeten Platzhalter, wie etwa ‚ζ' und ‚ξ', durch **S**-Reihungen erfassen. Jede Instanz eines Schemas ist damit ein *BA*-Axiom. Die so definierte Arithmetik, *BA,* ist negationsvollständig (siehe Smith 2007, 53-54) und somit fällt die Menge der *BA*-wahren Sätze mit der der *BA*-Theoreme zusammen – also auch *BA*-Wahrheit mit *BA* -Beweisbarkeit. Allerdings sind die Kosten für diese schöne Eigenschaft recht hoch. Denn in unserer Definition der Sprache von *BA* haben wir keinerlei Quantoren verwendet, weswegen es keine quantifizierten *BA*-Sätze gibt und einfache allgemeine Wahrheiten über Rechenoperationen in *BA* nicht ausdrückbar sind.

Die Axiome der *PA* hingegen enthalten allesamt Quantoren, und zwar Allquantoren:

„**Axiom 1** $\forall x(0 \neq Sx)$
Axiom 2 $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
Axiom 3 $\forall x(x + 0 = x)$
Axiom 4 $\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y))$
Axiom 5 $\forall x(x \times 0 = 0)$
Axiom 6 $\forall x \forall y(x \times Sy = (x \times y) + x)$"
(Smith 2007, 78)[2]

Hinzu kommt noch das Induktionsschema, für das gilt, dass der universelle Abschluss einer Instanz davon ebenfalls ein Axiom ist:

„**Induction Schema** $(\{\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))\} \rightarrow \forall x\varphi(x))$"
(Smith 2007, ebd.)

Wobei ‚φ' hier als Prädikatenvariable für beliebige zahlentheoretische Eigenschaften zu verstehen ist.

Diese Arithmetik scheint auf den ersten Blick viele Vorzüge zu bieten. Sie erklärt in allgemeiner Weise, wie sich Zahlen gegenüber bestimmten Rechenoperationen verhalten und bietet dabei eine gewisse Praktikabilität, sowie Ausdrucksstärke, die *BA* aufgrund des Fehlens

[2] Smith verwendet eine Schriftart ohne Serifen um Ausdrücke der Sprache eines Systems wiederzugeben, eine Serifen-Schriftart, um in der Metasprache (hier: Deutsch mit eingegliederten logischen Symbolen) darüber reden zu können. Ich werde mich an diese Konvention mit den Schriftarten *Arial* und *Times New Roman* halten. Außerdem können einfache Anführungszeichen (‚ und ') dazu dienen, Ausdrücke der logischen oder mathematischen Objektsprache in der Metasprache zu zitieren. Die Verwendung letzerer variiert zwar, aber es sollte immer aus dem Kontext ersichtlich sein, welche Funktion sie erfüllen.

von Quantoren nicht bietet. Doch genau wegen dieser Ausdrucksstärke leidet die *PA* unter dem Problem, dass es in ihr Wahrheiten gibt, die nicht beweisbar sind, wie man mit Hilfe von *G* zeigen kann. Dies werde ich im nächsten Abschnitt noch einmal kurz zu erläutern versuchen.

1.2. Die semantische Version von Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem

Um den semantischen Beweis (mittels Korrektheit) von Gödels erstem Theorem für die *PA* zu verstehen, müssen wir erst einmal sehen, dass *G* in *PA* ausgedrückt werden kann, *PA* also die sprachlichen Mittel hat, den Satz wiederzugeben, bzw. eine wff[3] die den selben Gehalt hat auszudrücken. Dazu müssen wir erst einmal ein paar Komponenten verstehen, mit denen *G* in *PA* ausgedrückt wird.

1.2.1. Primitiv rekursive Funktionen

Eine primitiv rekursive Funktion (kurz: *p. r.* Funktion) ist eine solche Funktion, die entweder eine der Initialfunktionen ist, oder mittels *primitiver Rekursion* oder *Komposition* aus anderen *p. r.* Funktionen definiert werden kann – sonst ist keine Funktion *p .r.* (Vgl. Smith 2007, 87). Entscheidend ist, dass ich eine *p. r.* Funktion immer in einem endlichen, algorithmischen Verfahren berechnen kann, also immer nach endlich vielen, mechanisch angewandten Schritten zum Ausgabewert der Funktion gelange (Vgl. Smith 2007, 88 ff).

Dabei sind die Initialfunktionen **S**, also die Nachfolgerfunktion, die wir bereits kennengelernt hatten und die den direkten Nachfolger jedes Eingangswert als Ausgangswert liefert, die Nullfunktion *Z*, die für jeden Eingangswert den Ausgangswert Null liefert und die *k*-stellige Identitätsfunktion I_i^k $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_i$ für jedes k und jedes i $1 \leq i \leq k$, die lediglich einer *k*-stelligen Reihe von Eingangswerten den *i*-ten Wert aus dieser Reihe als Ausgangswert zuordnet (Vgl. Smith 2007, 86).

Unter *primitiver Rekursion* verstehen wir nichts anderes als die Definition einer Funktion für den Wert *Null* und ihrer Definition für den Nachfolger eines jedes Elementes unter Bezug auf das Element selbst (Vgl. Smith 2010 [2], 2).

Unter *Komposition* verstehen wir lediglich die Substitution einer oder mehrerer *p. r.* Funktionen in einer andere *p. r.* Funktion; die Ausgangswerte der substituierten Funktionen werden dann die Eingangswerte der Funktion in die substituiert wird. Die so entstandene, dritte Funktion ist ebenfalls *p. r.* und mittels Komposition definiert (Vgl. Smith 2007, 86).

[3] *wff* ist standardmäßig das Kürzel für ‚wohlformte Formel'.

Diese Art von Funktionen ist äußerst wichtig für unsere Herleitung von *G* in der *PA*, aber auch noch für spätere Feststellungen, die die Mächtigkeit von Gödels erstem Theorem zeigen. Wichtig für unseren semantischen Beweis der Unvollständigkeit der *PA* ist diese Art von Funktion allerdings aus zwei Gründen: Zum einen, da die Relation *Gdl(m, n),* die wir für die Konstruktion von *G* in der *PA* brauchen werden, als charakteristische Funktion eine *p. r.* Funktion hat, was in groben Zügen bedeutet, dass die genannte Relation (bzw. das zweistellige zahlentheoretische Prädikat) eine *p. r.* Funktion zum Ausdruck bringt (Vgl. Smith 2010 [2], 9). Zum anderen, da *PA* ein *p. r.-adäquate*s System ist, was in etwa bedeutet, dass *PA* die Möglichkeit hat, alle *p. r.* Funktionen mittels Σ_1-wffs (also einfach existenziell quantifizierten wffs) auszudrücken (Vgl. Smith 2007, 104 und 106 ff)[4].

Wir können also durch *p. r.* Funktionen eine Relation zwischen zwei Zahlen aufstellen, die ein essentieller Teil von *G* für *PA* ist. Doch, wie nebenbei bemerkt, ist diese Relation eine *zahlentheoretische*, da die *PA* ja nun mal über Zahlen redet. Wir müssen also einen Weg finden, wie wir den Gehalt von *G* mittels von Zahlen erfassen können.

1.2.2. Gödel-Nummerierung

Das entscheidende Verfahren, welches Gödel damals in den 30er Jahren benutzte, um sein Theorem für die *PA* aufzustellen, ist die Codierung von Formeln mittels Potenzen, deren Basen Primzahlen sind. Auf diese Weise kann man jeder Formel genau eine Zahl zuordnen, ohne Überschneidungsprobleme zu bekommen. Das Verfahren dazu wird in der Regel *Gödelisierung* oder *Gödel-Nummerierung* genannt, da es eben von Gödel stammt. Der erste Schritt in diesem Verfahren ist es, jedem logischen Symbol, dass in der Codierung berücksichtigt werden soll, eine natürliche Zahl *n*[5] zugeordnet. Dann wird eine Reihe von Primzahlen[6] aufgestellt, deren Anzahl mit der Anzahl der Symbole in der zu codierenden Formel identisch ist. Die Nummern der einzelnen Symbole der Formel werden sodann den Primzahlen in genau derselben Reihenfolge als Exponenten zugeordnet, in der sie auch in der Formel auftauchen. Das Produkt aller Potenzen ist dann die *Gödel-Nummer* (kurz: *G. N.*) der Formel.

[4] Eigentlich wird an genannter Stelle von Smith gezeigt, dass die schwächere Arithmetik *Q p. r.-adäquat* ist. Da aber *PA* stärker als *Q* ist, und somit zumindest die Ausdrucksstärke von *Q* hat, ist auch *PA p. r.-adäquat* –denn *p. r.-Adäquatheit* hängt von der Ausdrucksstärke (Quantoren) ab.

[5] Dabei muss für alle *n* gelten, dass sie aus der Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 stammen, da x^0 immer 1 ergibt und somit andernfalls bei der Codierung (in der *Multiplikation* der einzelnen Potenzen zu einer Zahl) Probleme der Ununterscheidbarkeit auftreten würden.

[6] Diese Reihung muss mit 2 beginnen, da 1^n immer 1 ist und auch so keine Unterscheidbarkeit (ebenfalls wegen der Multiplikation) zweier Codierungen zu Stande käme.

Wenn wir also zum Beispiel die Formel ‚∃y (S0 + y) = SS0‘ als Zahl ausdrücken wollen, gegeben, dass ‚∃‘ die Nummer 13 erhält, ‚y’ die Nummer 2, ‚(‘ die Nummer 17 usw., hätte sie als *G. N.* folgende (als Produkt ausgedrückte) Zahl:

$$2^{13} \cdot 3^{4} \cdot 5^{17} \cdot 7^{23} \cdot 11^{21} \cdot 13^{25} \cdot 17^{4} \cdot 19^{19} \cdot 23^{15} \cdot 29^{23} \cdot 31^{23} \cdot 37^{21}$$

(Vgl. Smith 2007, 125).

Die Tatsache, dass diese Zahl, einmal ausmultipliziert, von astronomischer Größe ist, bedeutet zwar, dass eine solche *G. N.* schwer zu decodieren ist, aber dennoch ist so ein elegantes Verfahren gegeben, mit dem man wffs als Zahlen darstellen, und somit über sie in der *PA* reden kann.

Doch was ist mit Beweisen? Für unseren semantischen Beweis brauchen wir nämlich auch die Möglichkeit, einen Beweis als Zahl darzustellen. Auch dies ist mit Hilfe der Gödelisierung möglich. Wenn wir annehmen, dass wir einen Beweis im Gentzen-Stil als Sequenz darstellen, dann müssen wir lediglich die Sequenz von wffs, deren letztes Glied die Konklusion darstellt und deren vorige Glieder die Prämissen darstellen, irgendwie als Zahl codieren. Dazu kann man folgendes machen: Man nimmt die *G. N.*s der einzelnen Formeln und benutzt diese wiederum als Exponenten für eine Reihung von Primzahlen (ebenfalls bei 2 beginnend, siehe Fußnote 5), die dieselbe Anzahl an Elementen hat, wie wffs in dem zu codierenden Beweis vorkommen. Das Produkt dieser Potenzen ist der Code für genau einen Beweis und wird *Super-G. N.* genannt (Vgl. Smith 2007, 127).

1.2.3. Diagonalisierung

Ein letztes Element, das wir für unseren semantischen Beweis von Gödels erstem Theorem brauchen, ist das Prinzip der *Diagonalisierung*. Diagonalisierung stellt ein arithmetisches Äquivalent zur Selbstreferenz dar. Wir brauchen die Diagonalisierung also, damit unser Satz *G* in der *PA* von sich selber sagen kann, dass er nicht beweisbar ist. Dieses Verfahren ist denkbar einfach, wie genial. Alles was benötigt wird, ist eine offene Formel mit einer freien Variable ‚U(y)‘. Nun muss lediglich das Numeral ‚$\ulcorner$U$\urcorner$‘ der *G. N.* für die Formel selbst in die Formel substituiert werden und schon ist eine Selbstreferenz der Formel auf sich selbst in arithmetischer Sprache ausgedrückt. Denn die entsprechende *G. N.*, die durch das Numeral symbolisiert wird, codiert ja genau die Formel selbst, in die das Numeral substituiert wird! Wir erhalten also: ‚U($\ulcorner$U$\urcorner$)‘, oder wie Smith allgemein für beliebige φ mit freiem y festhält:

Die *Diagonalisierung* von φ ist ‚$\exists y(y = \ulcorner\varphi\urcorner \wedge \varphi)$'.
(Vgl. Smith 2007, 130)

1.2.4. Der Beweis des Theorems

Wenn wir nun alle diese Elemente zusammenführen, so können wir zum einen zeigen, dass die *PA* negationsunvollständig ist, da sie einen wahren Satz enthält, über den sie nicht entscheiden kann; zum anderen haben wir damit aber auch schon gezeigt, dass es wahre Sätze gibt, die nicht beweisbar sind, und Wahrheit und Beweisbarkeit – zumindest schon einmal für die *PA* – auseinanderfallen.

Für den semantischen Beweis von Gödels erstem Theorem brauchen wir zunächst noch die Relation *Gdl(m, n),* welche durch Substitution der charakteristischen Funktion der Relation *diag(m, n)*[7] in die charakteristische Funktion der Relation *Prf(m, n)*[8] entsteht (Vgl. Smith 2007, 138-139). Die beiden Relationen *diag(m, n)* und *Prf(m, n)* sind beide *p. r.* (siehe Smith 2007, 133 und 128). Daher ist auch die Relation *Gdl(m, n) p. r.*, da sie durch die Komposition zweier *p. r.*-Funktionen entsteht. Wir können nun diese Relation durch eine Σ_1- Formel ‚$Gdl(x, y)$' ausdrücken. Damit können wir den Satz ‚$U(y)$' wie folgt definieren: „$U(y) =_{def} \forall x \neg Gdl(x, y)$" (Smith 2007, 139). Wenn wir diesen Satz jetzt diagonalisieren, also das Numeral ‚$\ulcorner U\urcorner$' in ‚$U(y)$' substituieren. Wir erhielten dann also ‚$\forall x \neg Gdl\ (x, \ulcorner U\urcorner)$'. Diese bedeutete aber nichts anderes als ‚$U(\ulcorner U\urcorner)$' was wiederum (n.V., siehe S. 8) äquivalent zu einem Gödel-Satz ‚G' innerhalb der *PA* wäre, nämlich ‚$\exists y(y = \ulcorner U\urcorner \wedge U(y))$' (Vgl. Smith 2007, ebd).

Jetzt können wir aber beweisen, dass ‚G' genau dann wahr ist, wenn er nicht in der *PA* beweisbar ist. Dieser Beweis funktioniert so, dass wir uns klarmachen, unter welchen Umständen der Satz ‚G' nun wahr wäre: genau dann, wenn es keine Zahl *m* gäbe, die den *PA*-Beweis für die Diagonlaisierung der wff, die selbst von ‚$\ulcorner U\urcorner$' codiert wird, codiert. (per Definition von *gdl* und ‚$U(y)$'). Die wff, die von ‚$\ulcorner U\urcorner$' codiert wird ist aber natürlich ‚$U(y)$' selbst und ihre Diagonalisierung ist der Satz ‚G' (siehe voriger Abschnitt). ‚G' ist also genau dann wahr, wenn es keinen Beweis für ‚G' gibt![9]

Nun kann aber die *PA*, sofern sie korrekt ist, nicht mehr (negations)vollständig sein! Denn wenn ‚G' in der *PA* bewiesen werden könnte, wäre diese nicht korrekt, weil sie einen falschen Satz beweisen würde (denn ‚G' ist ja wahr gdw er nicht beweisbar ist). Wenn man nun aber in

[7] Also der Relation, die Diagonalisierung zum Ausdruck bringt; *m* und *n* sind dabei die Gödelnummern von Formeln und *m* codiert die Diagonalisierung der von *n* codierten Formel.
[8] Also die Beweisrelation; *m* ist dabei die *super-G.N.* einer Sequenz von Formeln, die den *PA*-Beweis der durch *n* codierten Formel darstellen.
[9] Für einen ausführlicheren Beweis siehe Smith 2007, 139. Für meine Zwecke reicht die angeführte Beweisskizze.

der *PA* das Gegenteil von ‚G', also ‚¬G', beweisen könnte, würde man ebenfalls einen falschen Satz beweisen, da ‚G' ja nicht in der *PA* bewiesen werden kann und damit dem vorigen Beweis nach wahr sein muss! Es gibt also einen wahren, formal unentscheidbaren Satz (‚G') in der *PA*, womit diese (per Def.) nicht negationsvollständig ist (Vgl. Smith 2007, 140).[10]

Obwohl uns in erster Linie interessiert, dass wir hier einen Fall haben, in dem ein wahrer Satz nicht beweisbar ist, sollten wir uns noch kurz über die Tragweite des Theorems Gedanken machen. Denn das Resultat der Unvollständigkeit betrifft nicht bloß *PA*; für jedes *p. r.-axiomatisierte* System ab der Stärke des Systems *Q* (welches im Prinzip nichts anderes ist, als die *PA* ohne das Induktionsschema) gilt, dass für diese ein eigener Gödel-Satz konstruierbar ist, der dieses System unvollständig macht (Vgl. Smith 2010 [1], 7). *P. r.*-axiomatisiert ist ein System *T* gdw es folgende Bedingungen erfüllt:

> „[…](i') the numerical properties of being the g. n. of a *T*-wff/*T*-sentence are primitive recursive, (ii') the numerical property of being the g. n. of an axiom is p.r., likewise (iii') the numerical property of being the super g. n. of a properly constructed proof is p. r., and therefore (iv') the numerical property of being the super g. n. of a properly constructed proof from *T*'s axioms is p. r. too." (Smith 2007, 147)

Das Resultat daraus, welches es hier für uns festzuhalten gilt, ist, dass jede Erweiterung der *PA* (bzw. des Systems *Q*) ebenfalls unvollständig sein wird; es würde also nicht helfen, den Gödel-Satz des jeweiligen Systems zu dessen Axiomen hinzufügen. Diese Tat hätte lediglich eine Iteration des Problems auf höherer Stufe zur Folge. Es zeigt sich damit also, dass für eine ganze Reihe von mathematischen Systemen, die nichts weiter sind, als eine Theorie der natürlichen Zahlen und deren Rechenoperationen, gilt, dass sie unbeweisbare, wahre Sätze enthalten.

1.3. Weitere systematische Unterschiede zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit

Ein weiterer signifikanter Unterschied zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit ist ihr Status gegenüber ihrer Ausdrückbarkeit in arithmetischen Systemen. Für Beweisbarkeit gilt, dass sie zwar arithmetisch ausdrückbar ist, jedoch nicht repräsentierbar, wobei *ausdrücken* hier lediglich bedeutet, dass, sofern eine zahlentheoretische Eigenschaft oder Relation für gegebene Zahlen wahr in einem arithmetischen System ist, das entsprechende

[10] Ich möchte an dieser Stelle anmerken, dass auch Unvollständigkeitsbeweise für schwächere Voraussetzungen (Konsistenz) von *PA* führbar sind. Dies im Detail zu erläutern würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen und wäre ihr ansonsten nicht weiter dienlich.

Zahlentheoretische Prädikat, angewandt auf ein oder mehrere Numerale, deren korrespondierende Zahlen die Eigenschaft haben, wahr ist; trifft die Eigenschaft auf die entsprechenden Zahlen nicht zu so muss die die Negation der genannten Formel (Numeral(e) und Prädikat) wahr sein. *Repräsentieren* bedeutet hingegen, dass, bei Zutreffen oder nicht-Zutreffen einer entsprechenden Eigenschaft, diese oder ihre Negation in Form von Zahlenprädikat und Numeral(en) aus der jeweiligen arithmetischen Theorie *ableitbar* ist. Repräsentieren ist also etwas wesentlich stärkeres als ausdrücken.

Beweisbarkeit kann nun zwar wie gesagt ausgedrückt werden, durch ein Prädikat ‚$\mathrm{Prov}_T(\mathrm{x})$', angewandt auf die *G. N.*s von Theoremen der entsprechenden arithmetischen Theorie *T*; repräsentieren kann man sie aber dennoch nicht, wie Smith in einem Beweis mittels der Annahme der Konsistenz der entsprechenden Theorie *T* zeigt (siehe Smith 2007, 180). Für Wahrheit gilt hingegen, dass sie nicht einmal ausdrückbar ist in der jeweiligen Theorie *T*, auf die sie sich bezieht. Um den Beweis dafür zu verstehen, müssen wir uns aber zunächst noch ein weiteres Werkzeug ansehen, dass Smith bereits für den Beweis der nicht-Repräsentierbarkeit von Beweisbarkeit für eine gegebene Theorie *T* benutzt: Das Diagonal-Lemma.

1.3.1. Das Diagonal-Lemma

Zunächst einmal müssen wir die Klasse der Theorien festlegen, auf die das Diagonal-Lemma zutrifft. Es handelt sich dabei um so genannte *nette*[11] Theorien, das heißt, *p. r.* axiomatisierte Theorien, die konsistent sind und das System *Q*, welches wir weiter oben kurz angesprochen hatten, erweitern. Die *PA* und stärkere, auf ihr aufbauende Systeme sind also auch *nett*.

Das Diagonal-Lemma für all diese Theorien lautet:

> „[…] *If T is a nice theory and* $\varphi(\mathrm{x})$ *is any wff of its language with one free variable, then there is a sentence* γ *of T's language such that* $T \vdash \gamma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\gamma\urcorner)$*.*" (Smith 2007, 173)

Dieses Lemma sagt uns, dass jede dieser *netten* Theorien selbstreferierende Sätze enthalten wird. Es sagt uns aber auch ganz basal, dass jedes Theorem eines Systems *T* äquivalent zu einer zahlentheoretischen Eigenschaft der *G. N.* des Theorems ist. Wie bereits erwähnt, kann das Lemma für die Beweise diverser erstaunlicher Resultate über Arithmetiken verwendet werden. Der Beweis des Lemmas selbst ist recht kompliziert und muss für unsere Zwecke

[11] Im Englischen: ‚nice' (Vgl. Smith 2007, 151).

auch nicht weiter erläutert werden. Entscheidend ist dabei selbstverständlich, dass Diagonalisierung eine zentrale Rolle im Beweis spielt.

1.3.2. Wahrheit als unasudrückbar – Tarskis Theorem

Mit dem Diagonal-Lemma können wir nun auch noch zeigen, dass Wahrheit nicht einmal ausdrückbar ist, in der Sprache, auf die sie sich bezieht. Peter Smith nennt dieses Resultat und die Tatsache, dass *nette* Theorien ihre eigene Wahrheit auch nicht definieren können „[…] a pair of rather spectacular results that are ususally packaged together as *Tarski's Theorem*." (Smith 2007, 181).

Das T-Schema, das Alfred Tarski zur semantischen Konzeption von Wahrheit 1944 einführte, sowie die Überlegung, dass Wahrheit nur in einer Metasprache definiert werden kann, setze ich als bekannt voraus (Vgl. Tarski 1944, 145 und 152 ff.). Dasselbe Prinzip trifft auch auf *nette* arithmetische Theorien zu, da hier ebenfalls ein Analogon zum natürlichsprachlichen Lügner-Satz konstruierbar ist.

Was die Ausdrückbarkeit der Wahrheit einer logischen Sprache L_A angeht, so müssen wir einmal annehmen, dass ein Prädikat ‚T_A' der Sprache die Eigenschaft der Wahrheit in ihr ausdrückt. Smith folgend können wir einmal *Q* als Beispiel einer Theorie nehmen, die *nett* ist. Per Diagonal-Lemma können wir dann für die Negation des Prädikates festlegen, dass es einen Satz ‚L' der Sprache gibt, für den gilt: ‚$\mathsf{Q} \vdash \mathsf{L} \leftrightarrow \neg \mathsf{T}_A(\ulcorner \mathsf{L} \urcorner)$'. Nach Annahme, dass *Q* nur wahre Sätze beweist, da seine Axiome wahr und die Regeln wahrheitserhaltend sind, können wir ferner darauf schließen, dass ‚$\mathsf{L} \leftrightarrow \neg \mathsf{T}_A(\ulcorner \mathsf{L} \urcorner)$'. Da aber ‚$\mathsf{T}_A$' das Wahrheitsprädikat der Sprache ist, muss auch gelten, dass ‚$\mathsf{T}_A(\ulcorner \mathsf{L} \urcorner) \leftrightarrow \mathsf{L}$', was uns in einen direkten Widerspruch führt! Es kann also kein Wahrheitsprädikat in *Q* und allen *netten* Theorien für die eigene Sprache der jeweiligen Theorie geben, da alle netten Theorien Q enthalten und damit dieser Beweis für sie durchführbar ist (Vgl. Smith 2007, 182).

Halten wir also fest, dass wir diverse Gründe haben anzunehmen, dass Wahrheit und Beweisbarkeit in der Art von arithmetischen Systemen, mit denen wir uns befasst haben auseinanderfallen müssen. Oder um es mit Peter Smiths Worten zu sagen:

> „Our results about the non-expressibility of truth of course point to another, particularly illuminating, take on the argument for incompleteness. For example: truth in L_A [die logische Sprache, die auch für die *PA* verwendet wird – d. Verf.] isn't provability in *PA*, because while *PA*-provability *is* expressible in L_A, truth-in-L_A *isn't.* […] In sum, as we emphasized before, arithmetical truth and provability in this or that formal system must fall apart." (Smith 2007, 183)

Was ziehen wir nun aber für Konsequenzen aus dieser Feststellung? Ich werde mich im Folgenden mit den verschiedenen Ansätzen zum Umgang mit dem Auseinanderfallen dieser beiden Eigenschaften befassen und versuchen Argumente zu finden, warum ich einen jeweiligen Ansatz für zu bevorzugen oder zu vernachlässigen halte.

2. Mögliche Umgänge mit dem Problem

Wir werden uns nun Vorschläge dazu ansehen, wie wir mit den Problemen, die durch Gödels und Tarskis Theoreme aufgeworfen wurden, umgehen können. Zunächst möchte ich mich mit einer Konzeption befassen, die versucht das Problem des wahren Gödel-Satzes der PA, der nicht beweisbar ist, durch Relativierung und Ebenentrennung zu umgehen, bzw. zu eliminieren. Diese Konzeption stammt von David Fair und soll im nächsten Abschnitt kurz skizziert und diskutiert werden.

2.1. Relativierung zum jeweiligen System

Die Idee von David Fair, mit der gezeigt werden soll, dass *PA* (oder *PA1*, wie er abkürzt[12], um hervorzuheben, dass es um die Peano-Arithmetik erster Ordnung geht) keinen wahren Satz enthält, der in ihr nicht beweisbar ist, basiert auf dem Prinzip der expliziten Relativierung von wahren Sätzen eines Systems zu dem jeweiligen System. Seiner Auffassung nach kann man die Wahrheit gegebener mathematischer Behauptungen immer nur bestimmen, wenn man deutlich macht in welchem System sie wahr sein sollen. So zum Beispiel im Falle des Parallelpostulates: In euklidischer Geometrie ist das Parallelpostulat selbstverständlich wahr; dies muss aber nicht unbedingt für nicht-euklidische Geometrien gelten (Vgl. Fair 1984, 364)!

In den meisten Fällen ist es erlässlich – so Fair – den genauen Bereich und dessen Entitäten (also die entsprechenden Komponenten des jeweiligen Systems) explizit anzugeben, in dem eine Behauptung wahr sein soll, da sich dies aus dem Kontext ergibt. Diese Betrachtungsweise erscheint mir zunächst recht unkontrovers. Der Punkt, den Fair machen möchte geht jedoch selbstverständlich über diese bloße Beobachtung hinaus.

Fair möchte für genauere Investigationen der Wahrheit eines Satzes (wie zum Beispiel dem Gödel-Satz) Bereichsindikatoren einführen, die angeben in welchem System der Satz ableitbar sein soll. Dazu wird für ein beliebiges System r der Operator ‚In r' eingeführt, der expliziert, dass das jeweilige Theorem ein Theorem des Systems r ist, also zunächst nur hier als wahr betrachtet werden darf. Auf Basis dieser Konvention lassen sich die beiden folgenden Prinzipien festhalten (für ϕ und ψ als Variablen für beliebige Sätze der jeweiligen Sprache):

[12] Ich werde beide Abkürzungen im Folgenden synonym verwenden.

„*Principle* 1: If ‘ϕ_1 & ϕ_2 & … & $\phi_n \rightarrow \psi$‘ is a theorem, then so is ‘In *r*, ϕ_1 & In *r*, ϕ_2 & … & In *r*, $\phi_n \rightarrow$ In *r*, ψ‘ for any non-negative *n*. […]” (Fair 1984, 371)

und:

“*Principle* 2: Whenever ‘ψ‘ is a logical contradiction ‘~In *r*, ψ‘ is a theorem.” (Fair 1984, 372)

wobei diese Prinzip nach Fair äquivalent ist zu der folgenden ‘Exportationsregel‘:

„In *r*, $\sim\phi \rightarrow$ ~In *r*, ϕ.“ (Fair 1984, ebd)

Zu der genannten Exportationsregel gibt es keine korrespondierende Importationsregel, da, nur weil ein Satz ϕ falsch ist, dies nicht bedeutet, dass seine Negation in einem beliebigen System *r* ableitbar ist.

Das erste Prinzip sagt uns, dass wir für jedes Theorem, bei dem ein Satz von mehreren impliziert wird, jeden Satz dieser Implikation zu dem System relativieren können. Das zweite Prinzip sagt uns lediglich, dass kein System inkonsistent sein darf; seine von Fair postulierte Äquivalenz sagt uns, dass wenn die Negation eines Satzes in einem System ableitbar ist, wir davon ausgehen können, dass der Satz selber nicht in diesem System ableitbar ist (was letztlich auch nur Konsistenz gewährleistet).

Eine weitere Relativierung, die Fair vornimmt, ist die, dass Aussagen über ein System (wie z.B. *PA1*) immer in einem (informellen) Metamathematischen System (MM) diskutiert werden, was auch explizit angegeben werden sollte. Dabei geht er davon aus, dass in dieser Metamathematik eine intuitiv-elementare (informelle) Arithmetik (EA) eingeht, sowie eine informelle Mengenlehre (IST). Darüber hinaus muss seiner Auffassung nach eine idealisierte syntaktische Theorie (SYN) vorausgesetzt werden (Vgl. Fair 1984, 377-379).

Nun können wir – in Fairs Verständnis – die genauere Analyse dessen, was es mit dem Gödel-Satz für *PA* auf sich hat, vornehmen:

„In MM(EA, IST, SYN), (~In PA1, *G* & ~In PA1, ~*G*)“ (Fair 1984, 379)

Das heißt, die Feststellung, die wir mit der Aufstellung von *G* für *PA* machen, ist eigentlich die, dass aus der metamathematischen Perspektive mit den genannten Voraussetzungen, das im System *PA* weder *G* noch sein Gegenteil folgt. Dies ist für Fair zunächst nicht weiter tragisch und sollte es auch für uns nicht, da *PA* als *Theorie über natürliche Zahlen* gedacht ist und alle unsere Intuitiven Erwartungen bezüglich dieser Objekte erfüllt (Vgl. Fair 1984, 375)! Dass diese Theorie unvollständig gegenüber bestimmten Entitäten ist, die man in ihr unter einer unintendierten Interpretation (Numerale als codierte Formeln) erhält, sollte uns insofern nicht weiter stören.

Problematisch wird es an dem Punkt, an dem wir zeigen können, dass der Gödel-Satz *wahr* in *PA* ist, aber dort nicht bewiesen werden kann. Genau hier kommt Fairs Differenzierung ins Spiel. Sein Punkt ist, dass die Feststellung der Wahrheit von *G* keine Feststellung innerhalb von *PA* ist, sondern eine Feststellung in MM! Denn die Wahrheit von *G* wird aus dem geschlossen, was *G sagt*. Es gilt also:

> „In MM(EA, IST, SYN), ‚*G*' says ~In PA1, *G*" (Fair 1984, 381)

Daraus folgt aber lediglich, dass *G* in MM wahr ist und nicht *PA1*, also:

> „In MM(EA, IST, SYN), G" (Fair 1984, ebd)

Wir umgehen also gewissermaßen die unangenehme Konsequenz von Gödels erstem Theorem, da wir die Wahrheit von *G* auf eine Metaebene verschieben und damit keinen wahren Satz von *PA* haben, der von *PA* nicht bewiesen werden kann. Dass PA nicht über alles entscheiden kann, soll uns dabei nicht weiter stören, da es sich ja schließlich um eine Theorie über natürliche Zahlen handelt.

Doch diese zunächst elegant wirkende Lösung scheint mir eine gewisse Schwierigkeit zu bergen. Denn es ist ohne weiteres möglich, mit den sprachlichen Ressourcen der informellen Meta-Mathematik einen entsprechenden Gödel-Satz für selbige zu konstruieren. Wir müssten, um hier zu vermeiden, dass MM wahre, unbeweisbare Sätze enthält, voraussetzen, dass es zu MM wieder eine Metaebene gibt. Auf dieser Metaebene würde sich das Problem mutmaßlich wiederholen, sodass wir in einen infiniten Regress hierarchische geordneter Metaebenen gelangen würden.

Wenn einem dieser infinite Regress noch nicht problematisch genug erscheint – da man z.B. der Auffassung sein könnte, es reiche, dass diese Ebenen potentiell konstruierbar sind; im konkreten Fall benötige man lediglich eine Metaebene zu einem System mit der das Problem der entsprechenden Objektebene vermieden werde – sollte man sich das folgende Problem vor Augen führen: In welcher systematischen Ebene befinden wir uns wenn wir über *die gesamte Hierarchie* urteilen?[13]

Man bräuchte hier eine Ebene, die außerhalb der gesamten Hierarchie liegt. Dort ließe sich aber ein analoges Problem (Konstruktion eines Gödel-Satzes) aufwerfen, weshalb wir eine neue, außerhalb gelegene Ebene der Betrachtung bräuchten. Aber auch hier wären wir gezwungen, eine Hierarchie zur Vermeidung des Gödel-Problems aufzustellen, die – in einer räumlichen Metapher ausgedrückt – einen orthogonalen infiniten Regress zu dem ersten darstellen würde! Das gleiche Problem des Urteilens über diese gesamte Hierarchie ergäbe sich aber auch in dieser Hierarchie erneut, weshalb wir mit einer ‚polidirektionalen' (um es wieder räumlich zu versinnbildlichen) Folge von Infiniten Regressen konfrontiert wären, die ebenfalls infinit ist.

In diesem infiniten Regress aus infiniten Regressen würden wir das Problem des Gödel-Satzes innerhalb jeder einzelnen Hierarchie und von jeder der Hierarchien zur nächsten lediglich iterieren. Dies scheint also kein Ausweg zu sein! Wenden wir uns daher anderen Möglichkeiten des Umgangs zu, indem wir uns zwei Beispiele alternativer Logiken ansehen, die man als Ausweg aus dem Problem durch Aufgabe bestimmter Prinzipien ansehen kann.

2.2. Intuitionismus und die Aufgabe unbewiesener Wahrheiten

Unter Intuitionismus versteht man eine Strömung in der Logik und Mathematik, die den Wahrheitsbegriff vollständig vom Beweisbegriff abhängig macht. Enrico Martino schreibt dazu:

> „[…]Intuitionsim identifies mathematical truth with provability. A basic philosophical tenet of Intuitionism is that mathematical entities exist only as mental constructions and that, in the absence of a reality determining mathematical truth, a mathematical proposition can be true only in virtue of a proof […]." (Martino 2002, 55)

[13] Ich bin auf dieses Problem in einem Seminar über Graham Priest von apl. Prof. Dr. Manuel Bremer aufmerksam gemacht worden; Vgl. auch: Priest 2006, 20.

Ein Intuitionist ist also gewissermaßen in einem straken Sinne Konstruktivist gegenüber mathematischen Entitäten; daher kann aus intuitionistischer Sicht in logisch-mathematischen Kontexten nur das für wahr erachtet werden, für das es einen aktualen Beweis gibt.

Diese Perspektive hat zum einen selbstverständlich Implikationen für die Schlussregeln, die in intuitionistischen Kalkülen gelten, zum anderen aber auch eine Implikation für unser Thema; Sätze für die gilt, dass weder sie noch ihr Gegenteil beweisbar sind, sind weder wahr noch falsch, also in einem gewissen Sinne wahrheitswertlos, denn die Falschheit eines Satzes hängt davon ab, dass es einen Beweis seiner Negation gibt (Vgl. Iemhoff 2008, 1).

Für unseren Gödel-Satz würde das bedeuten, dass er in genau diesem Sinne wahrheitswertlos wäre, wenn wir eine intuitionistische Perspektive einnehmen würden und unsere metasprachlichen Überlegungen über seinen Gehalt, die uns zu der Überzeugung führen, dass er wahr sein muss, nicht als einen Beweis betrachten. Damit hätten wir zwar einen Umgang mit der Tatsache gefunden, dass es Wahrheiten in einem System geben kann, die dieses nicht beweisen kann – nämlich die bloße Negierung dieser Tatsache! – die Frage ist aber, ob der Preis den wir dafür zahlen müssen nicht zu hoch ist.

Zunächst einmal müssten wir akzeptieren, dass der Gödel-Satz keinen Wahrheitswert hat. Wir müssten damit akzeptieren, dass er nicht wahr ist, auch wenn uns dies so evident erscheint, da wir keinen Beweis für ihn konstruieren können, er aber genau dies besagt! Zudem müssten wir eine ganze Menge basaler logischer Schlussregeln und Prinzipien aufgeben, wie zum Beispiel den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (also $A \vee \neg A$, Vgl. Iemhoff 2008, ebd), die uns zunächst intuitiv recht plausibel erscheinen und deduktiv gesehen auch sehr nützlich sind.

Diese Einwände sind meines Erachtens aber noch keine sehr starken Ausschlusskriterien für den Intuitionismus. Ein größeres Problem tut sich jedoch auf, wenn wir uns fragen, was, wenn jedes mathematische Statement erst bewiesen werden muss um wahr sein zu können, den Ausgangspunkt für Deduktion darstellen soll? Michael Dummett schreibt zu diesem Punkt:

> „[I]ntuitionists incline to write as though, while we cannot delimit in advance the realm of all possible intuitionistically valid proofs, still we can be certain for particular proofs given, and particular principles of proof enunciated, that they are intuitionistically correct." (Dummett 1959, 347)

Wir müssen also doch die Wahrheit einiger Prinzipien vor der Führung jeglichen Beweises voraussetzen, um überhaupt Beweise führen zu können. Eine Möglichkeit des Umgangs mit dieser Problematik sehe ich für den Intuitionisten darin, eine Kohärenz-Auffassung von Wahrheit anzunehmen: Auch die Wahrheit der Ausgangsprinzipien wird erst angenommen, wenn diese wiederum mittels anderer bewiesener Sätze bewiesen werden. Doch auch dieser Rückzug auf ein anderes Wahrheitsverständnis scheint mir zu scheitern, denn was kann dann mit Beweis noch gemeint sein, wenn ich zunächst von wahrheitswertlosen Sätzen (meinen Axiomen, oder vorausgesetzten Prinzipien, die meinen Schlussregeln unterliegen) auf die Wahrheit der erschlossenen Sätze schließen möchte? Beweise hätten insofern nicht mehr die Funktion des Wahrheitstransfers, sondern die der ‚Wahrheitsschaffung' und es ist fragwürdig, was dann überhaupt noch mit ‚Wahrheit' gemeint sein soll.

Die Position des Intuitionismus strapaziert jedenfalls jegliche realistische Intuition über Wahrheit und Beweisbarkeit. Es ist fragwürdig, inwiefern uns dieser Rückzug auf ein beweisgebundenes Verständnis von Wahrheit einen Nutzen im Hinblick auf unsere Gödel-Problematik bringt und inwiefern wir damit besser bedient wären, als mit der Akzeptanz von beweistranszendenten Wahrheiten.

2.3. Dialethismus: Die Aufgabe der Konsistenz

Eine letzte Möglichkeit des Umgangs, die ich diskutieren möchte, sehe ich im Dialethismus, wie er zum Beispiel von Graham Priest vertreten wird. Dialethismus bedeutet nichts anderes als die Annahme der Wahrheit bestimmter Widersprüche. Der paradigmatische Fall eines solchen Widerspruches ist die bekannte Lügner-Antinomie: ‚Dieser Satz ist nicht wahr.'[14] Ist dieser Satz wahr, so sagt er uns, dass er nicht wahr ist; ist er nicht wahr, so sagt er genau dies, was ihn wahr macht. Priest ist der Auffassung, dass wir diese Art von Sätzen als wahre Widersprüche auffassen sollten, da alle Alternativen noch größere Schwierigkeiten aufwerfen würden (Vgl. Priest 2006, 10 ff.). Priest hält uns also dazu an, das Prinzip der Konsistenz an bestimmten Stellen aufzugeben. Eine Logik, die dies beinhaltet, wird in der Regel als *parakonsistent* bezeichnet.

Doch was hat dies alles mit unserem auseinanderfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit zu tun? Nun, zunächst einmal könnten wir, wenn wir uns an das erinnern, was wir in Abschnitt 1.3.2. abgehandelt haben, Wahrheit und Beweisbarkeit wieder auf einer Ebene vereinen, da Tarskis Theorem im finalen Schritt Gebrauch von der Annahme der Konsistenz macht! Es ist genau der Lügner-Satz (hergestellt mit Hilfe des Diagonal-Lemmas), mit dem gezeigt werden soll, dass die Wahrheit einer Sprache nicht in ihr selbst ausgedrückt werden kann. Akzeptieren wir aber, dass sowohl der Lügner-Satz, als auch sein Gegenteil wahr sind, so

[14] Ich werde nicht weiter auf den geschichtlichen Hintergrund oder Ähnliches eingehen, sondern diese Antinomie als philosophisches Allgemeinwissen voraussetzen.

haben wir kein Problem mehr mit der semantischen Geschlossenheit der Sprache, also der Tatsache, dass sie ihr eigenes Wahrheitsprädikat enthält.

Bevor wir uns nun aber mit den Schwierigkeiten auseinandersetzen, die dieser Ansatz beinhaltet, sehen wir uns zunächst noch an, wie er mit unserer Gödel-Problematik umgeht. Nachdem Priest seine Auffassung deutlich gemacht hat, dass *naives* Beweisen – also informelles, deduktives Beweisen aus Basisannahmen, wie wir es in diversen mathematischen Kontexten pflegen (Vgl. Priest 2006, 40) – prinzipiell formalisierbar wäre, und zudem auf einer rekursiven Beweisrelation beruht[15], sowie die Bedingungen für die Herleitung von Gödels erstem Theorem erfüllt (Vgl. Priest 2006, 44), zeigt er auf, dass ‚naives Beweisen' in diesem Sinne inkonsistent sein muss:

> „[L]et *T* be (the formalisation of) our naive proof procedures. Then, since *T* satisfies the conditions of Gödel's theorem, if *T* is consistent there is a sentence φ which is not provable in *T*, but which we can establish as true by a naive proof, and hence *is* provable in *T*. The only way out of this problem, other than to accept this contradiction, and thus dialethism anyway, is to accept the inconsistency of naive proof. So we are forced to admit that our naive proof procedures are inconsistent. But our naive proof procedures are just those methods of deductive arguments by which things are established as true. It follows that some contradictions are true; that is, dialethism is correct." (Priest 2006, ebd)

Wie aufgefallen sein sollte, bezieht sich Priest auf Konsistenz um das Vorhandensein eines Gödel-Satzes (hier: ‚φ') in *T* zu behaupten. Wir hatten weiter oben angesprochen, dass selbst-referenzielle Sätze, wie der Gödel-Satz, in allen *netten* Theorien auftauchen. Und ein Kriterium für eine *nette* Theorie war Konsistenz. Das heißt, dass auch die wesentlich schwächere Annahme der Konsistenz in unseren Beweis von Gödels Theorem (und dem obigen Beweis) eingeht – und dies ist die Stelle an der Priest ansetzt. Die andere Möglichkeit wäre selbstverständlich die Aufgabe der Korrektheit, gegen welche Priest einige Argumente hervorbringt (Vgl. Priest 2006, 45).

Überdies gibt Priest einen Beweis für den antinomischen Charakter des Gödel-Problems indem er einen Beweis für den unbeweisbaren Gödel-Satz liefert. Er tut dies einmal als semi-formalen Beweis für *T*, inklusive eines Korrektheitsbeweises per Induktion auf die Länge des

[15] Andernfalls wäre es nach Priests Auffassung absolut mysteriös, wie Konsens über einen Beweis zu Stande käme; denn Formalisierbarkeit des naiven Beweisens bedeutet letztlich nur, dass den Beweisen eigentlich klare Strukturen zu Grunde liegen. Und eine rekursive Beweisrelation liegt vor, da die Beweise endlich und effektiv erfassbar sind (Vgl. Priest 2006, 41).

Beweises (Vgl. Priest 2006, 49-50) und einmal als informellen Beweis für unsere naive Beweistheorie:

> „Consider the sentence ‚This sentence is not provably true.‘ Suppose the sentence is false. Then it is provably true, and hence true. By *reductio* it is true. Moreover, we have just proved this. Hence it is provably true. And since it is true, it is not provably true. Contradiction.” (Priest 2006, 46)

Wenn wir also akzeptieren dass ein Gödel-Satz beweisbar und nicht beweisbar ist, so haben wir das Problem des Auseinanderfallens von Wahrheit und Beweisbarkeit eliminiert. Die Kosten, die wir dafür zu tragen haben sind allerdings recht hoch, da wir jetzt das Vorhandensein wahrer Widersprüche akzeptieren müssen. Der Widerspruch, den wir durch den oben informell aufgezeigten Beweis erhalten, ist in gewisser Weise sogar noch stärker, als der, den wir durch die Lügner-Antinomie erhalten. Bei der Lügner-Antinomie müssen wir lediglich akzeptieren, dass wir eine Möglichkeit haben, den Satz als wahr zu beweisen (über die Annahme seiner Falschheit) und eine Möglichkeit ihn als falsch zu beweisen (über die Annahme der Wahrheit, da er die eigene Falschheit behauptet).

Beim Gödel-Satz ist es hingegen so, dass die Feststellung seiner Unbeweis*barkeit* einen negierten Existenzsatz (es gibt keinen Beweis…) bedeutet, welcher wiederum zu einem Allsatz mit interner Negation äquivalent ist. Da wir aber bei einem Allsatz jederzeit instanziieren können, können wir zeigen, dass auch der gegebene Beweis für den Gödel-Satz selbst *kein* Beweis für den Gödel-Satz ist. Wir bekommen also sogar eine inkonsistente Beweisrelation, wenn wir den obigen Beweis zulassen[16].

Wir stehen also vor der großen Frage, ob epistemische Werte, wie die semantische Geschlossenheit einer Sprache (im Falle der Lügner-Antinomie) oder das Zusammenfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit, sowie die Negationsvollständigkeit bestimmter Systeme (im Falle des Gödel-Satzes) uns wichtiger erscheinen, als Konsistenz. Dies ist eine tiefgreifende philosophische Frage, mit massiven ontologischen Implikationen. Würden wir Konsistenz aufgeben, so würde dies zum einen zeigen, dass unser gesamter Erkenntnisapparat in sich widersprüchlich ist, bzw. die Anlage zum Herleiten von Widersprüchen enthält. Wenn wir aber eine gewissen Adäquatheit unseres Erkenntnisvermögens gegenüber der zu erkennenden Welt voraussetzen, so müssten wir davon ausgehen, dass die Welt in sich in irgendeinem

[16] Auch auf dieses Problem bin ich in dem bereits genannten Seminar von Manuel Bremer aufmerksam gemacht worden.

Sinne ‚uneinheitlich‘ wäre, also so, dass sie in mancher Hinsicht nur mit Hilfe widersprüchlicher Sätze korrekt erfassbar wäre.

Ich vermag auf diese Frage keine klare Antwort zu geben. Ein schwaches Argument für den Dialethismus ist vielleicht, dass die Annahme der Konsistenz nicht unbedingt der Intuition aller Menschen hundertprozentig gerecht wird. Ich selbst war zu Beginn meines Philosophie-Studiums lange nicht so von der Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch überzeugt, wie einige erfahrene Logiker dies zu Weilen sind. Ebenso habe ich beobachtet, dass auch einige andere junge Studenten diese Skepsis gegenüber uneingeschränkter Konsistenz teilten.

Man könnte hier einwenden, dass dies letztlich auf einem zu geringen Verständnis von (klassisch-)logischen Prinzipien beruht. Aber wie wir gesehen haben liefern diese Prinzipien allerlei Probleme, weshalb auch erfahrene Logiker wie Graham Priest von der uneingeschränkten Aufrechterhaltung der Konsistenz abkommen. Wie gesagt, vermag ich kein endgültiges Urteil über die Adäquatheit des Dialethismus zur Lösung unseres Problems zu geben. Dennoch denke ich, dass der Ansatz ein interessanter ist, den zu erforschen es sich lohnt.

3. Fazit

In dieser Arbeit habe ich mich mit dem Problem des Auseinanderfallens von Wahrheit und Beweisbarkeit auseinandergesetzt, und dies insbesondere im Hinblick auf Gödels erstes Unvollständigkeitstheorem. Dabei habe ich zunächst versucht eine knappe Darstellung des Unvollständigkeitstheorems zu bieten, sowie eine Diskussion verwandter Probleme die den Unterschied zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit in klassisch-logischen Systemen deutlich machen.

Meine anschließende Diskussion der Möglichkeiten des Umgangs mit diesem Problem bleibt jedoch relativ ergebnislos! In keiner der diskutierten Möglichkeiten sehe ich eine wirklich klare Lösung des Problems. Mein Resultat für diese Diskussion kann also nur sein, dass ich geneigt bin, einen Unterschied zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit vor dem Hintergrund meiner bisherigen Kenntnisse zu akzeptieren. Dass die Klasse der wahren Sätze die der beweisbaren übersteigt ist zunächst – im Hinblick auf Axiome – auch kein größeres Problem. Aber erstens bleibt hier die Tatsache, dass der Gödel-Satz nicht zu den Axiomen hinzugefügt werden kann (da dies, wie in Abschnitt 1.2.4. angedeutet, nur zu einer Iteration des Problems führen würde) im Raum stehen; zweitens die Frage, wie wir dann überhaupt zu der Überzeugung der Wahrheit bestimmter Sätze kommen können, wenn nicht durch einen Beweis.

Eine der attraktiveren Lösungen scheint für mein Verständnis der Dialethismus zu sein, auch wenn dieser dem Verstand einige Bürden auferlegt. In jedem Falle wird vor dem Hintergrund der skizzierten Problematik für mich sehr deutlich, wie eine so große Vielfalt alternativer Logiken im letzten Jahrhundert aufkommen konnte. Und ebenso wird die Beschäftigung mit verschiedenen logischen Systemen, wie eben dem Dialethismus, umso interessanter. Ich denke, dass die Möglichkeit einer Vereinigung von Wahrheit und Beweisbarkeit nicht verworfen werden muss, auch wenn es abzuwägen gilt, welcher Ausweg die kleinsten Übel mit sich führt. Bis dahin müssen wir aber wohl mit den unangenehmen Konsequenzen von Gödels und Tarskis Theoremen leben.

Verwendete Literatur

Dummett, Michael. 1959. “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”, in: *The Philosophical Review*, 68 (3): 324-348.

Fair, David. 1984. “Provability and Mathematical Truth”, in: *Synthese* 61: 363-385.

Iemhoff, Rosalie. 2008. “Intuitionism in the Philosophy of Mathematics”, in: Metaphysics Research Lab, CSLI (eds.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Online-URL: http://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/ (Stand: 02.05.2010).

Martino, Enrico. 2002. “The Priority of Arithmetical Truth over Arithmetical Provability”, in: *Topoi* 21: 55-63.

Priest, Graham. 2006. *In Contradiction*: *A Study of the Transconsistent*. Oxford: Clarendon Press.

Smith, Peter. 2007. *An Introduction to Gödel’s Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press.

Smith, Peter. 2010 [1]. *Gödel Without (Too Many) Tears – 8: The First Incompleteness Theorem*. Online-URL: http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/gwt/GWT08.pdf (Stand: 08.04.2010).

Smith, Peter. 2010 [2]. *Gödel Without (Too Many) Tears – 5: Primitive recursive functions*. Online-URL: http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/gwt/GWT05.pdf (Stand: 08.04.2010).

Tarski, Alfred [1944] 1977. “Die semantische Konzeption der Wahrheit” in Gunnar Skirbekk (Hrsg.), *Wahrheitstheorien*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Walz, Guido (Red.). 2003. *Lexikon der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl. (u.a.).

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich, Florian Boge, dass ich die Hausarbeit mit dem Titel

Gödels erstes Unvollständigkeitsheorem und das Auseinanderfallen von Wahrheit und Beweisbarkeit

selbständig verfasst und keine anderen als die angegeben Quellen benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Düsseldorf, den

(Florian Boge)